СОДРЖИНА

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_1

1. Пресметај ја вредноста на алгебарскиот израз:

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-(a+b)\right]:\left[1+\frac{(a-b)^2}{ab}\right]$$

2. Ако е $\frac{x-2y}{2x+y}=3$, тогаш колку е: $\frac{x+3y}{3x-y}$

3. Ако е $\frac{b}{a}=\frac{2}{3},\frac{c}{b}=\frac{3}{4}$, тогаш колку е: $\frac{a+b+c}{a-b-c}$

РЕШЕНИЕ

1. ПРВА ЗАДАЧА

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-(a+b)\right]:\left[1+\frac{(a-b)^2}{ab}\right]=$$

$$=\left[\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2}{3ab}\right]:\left[\frac{ab+a^2-2ab+b^2}{ab}\right]=$$

$$=\frac{a^3+b^3}{3ab}:\frac{a^2-ab+b^2}{ab}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{3ab}:\frac{a^2-ab+b^2}{ab}=\frac{a+b}{3}$$

2. ВТОРА ЗАДАЧА

$$x-2y=3(2x+y)\ \Rightarrow x-2y=6x+3y\Rightarrow\ -5x=5y\ \Rightarrow x=-y$$

$$\frac{x+3y}{3x-y}=\frac{-y+3y}{-3y-y}=\frac{2y}{-4y}=-\frac{1}{2}$$

3. ТРЕТА ЗАДАЧА

Iz $a:b:c\ =\ 6:\ 4:\ 3$, slijedi $a\ =\ 6k, b\ =\ 4k$ i $c\ =\ 3k$

$$\frac{a+b+c}{a-b-c}=\frac{6k+4k+3k}{6k-4k-3k}=\frac{13}{-1}=-13$$

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_2

1. Ако е $\frac{x}{y}+x=\frac{y}{x}+y, x \neq y$, тогаш колку е: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

2. За која вредност на променливите x и y, дропката $R=\frac{3x^2+3y^2-12x+17}{x^2+y^2-4x+5}$ има најголема вредност и колку изнесува таа?

3. Тројца работници работејќи заедно ја изработуваат работата за 2 дена. Првиот и вториот работник заедно истата работа можат да ја сработат за три дена, а вториот и третиот работник заедно за 4 дена. За колку време секој од нив сам би ја сработил таа работа?

РЕШЕНИЕ од ЗАДАЧИ 2

1. РЕШЕНИЕ:

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=y-x \;\Rightarrow\; \frac{x^2-y^2}{xy}=y-x \;\Rightarrow\; \frac{(x+y)(x-y)}{xy}=y-x \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{xy}=-1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1$$

2. РЕШЕНИЕ:

$$R=\frac{3x^2+3y^2-12x+17}{x^2+y^2-4x+5}=\frac{3x^2-12x+12+3y^2+3+2}{x^2-4x+4+y^2+1}=$$

$$=\frac{3[(x-2)^2+y^2+1]}{(x-2)^2+y^2+1}+\frac{2}{(x-2)^2+y^2+1}=$$

$$=3+\frac{2}{(x-2)^2+y^2+1}$$

Vrijednost razlomka je tim veća ako je nazivnik što manji, pa $x-2=0 \;\Longrightarrow x=2$ i $y=0$. Najveća vrijednost razlomka iznosi $R=3+\frac{2}{0+0+1} \;\Longrightarrow R=5$

3. РЕШЕНИЕ:

Neka je prvi radnik uradio posao za x dana, drugi za y dana a treći za z dana. Za jedan dan sami urade prvi $\frac{1}{x}$ posla, drugi $\frac{1}{y}$ posla, a treći $\frac{1}{z}$. Zajedno urade za jedan dan $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Na osnovu teksta zadatka imamo još $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\end{array}\right\} \Longrightarrow z=6$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}\end{array}\right\} \Longrightarrow x=4$$

Na kraju dobijamo da je i $\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \;\Longrightarrow y=12$. Dakle, prvi radnik bi sam uradio posao za 4 dana, drugi za 12 dana a treći radnik za 6 dana.

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_3

1. Цифрата на единици во трицифрениот број е 3. Ако ја преместиме на местото стотки (а останатите две цифри ги поместиме надесно), тогаш стариот број спрема новиот ќе се однесува како 3:4. Кои се тоа броеви?
2. Двоцифрен број има цифра на десетки 3 пати поголема од цифрата на единици. Ако го одземеме од него бројот 18, тогаш ќе добиеме број со заменети цифри. Кој број е тоа?
3. Ако на производот на два природни броеви им го додаме нивниот збир, тогаш ќе го добиеме бројот 14. Кои броеви се тоа?
4. Реши ја равенката:

$$2\left\{2x-\left[\frac{1}{4}x-\frac{1}{18}\left(16-\frac{1}{2}(x+4)\right)\right]\right\}-\frac{1}{2}(x-2)=4x-\frac{2}{3}(x+2).$$

РЕШЕНИЕ од ЗАДАЧИ 3

1. РЕШЕНИЕ:

Označimo li s x dvocifreni dio broja na mjestu stotica i desetica, naš je broj $10x+3$. Pomicanjem cifre 3 na mjesto stotica dolazimo do broja $300+x$. Jednačina glasi $(10x+3):(300+x)=3:4 \Longrightarrow x=24$. Dakle, traženi brojevi su 243 i 342.

2. РЕШЕНИЕ:

$a=3b$
$30b+b-18=10b+3b$
$18b=18$
$b=1, a=3$
Traženi broj je 31.

3. РЕШЕНИЕ:

Tražene brojeve označimo sa x, y. Iz teksta zadatka zaključujemo da mora vrijediti $xy + x + y = 14 \Longrightarrow y=\frac{14-x}{x+1}$. Za x uzmemo bilo koji prirodan broj, a pripadni y izračunamo iz dobivenog izraza. Međutim, jasno je da za x nećemo uzimati redom baš sve moguće prirodne brojeve (jer njih ima beskonačno mnogo), pa proučimo malo taj izraz da vidimo u kojim granicama ćemo izabrati x. Iz brojnika $14-x$ zaključujemo da x ne može biti veći od 14 jer tada brojnik postaje negativan, nazivnik pozitivan, što znači da bi y bio negativan, a to ne može biti jer y mora biti prirodan broj. Dakle, x mora biti manji od 14. Redom navedi sve brojeve od 1 do 14, izračunaj pripadne y i ispiši samo ona rješenja u kojima su oba broja prirodna. Rješenje su brojevi 2 i 4.

4. РЕШЕНИЕ:

$$2\left\{2x-\left[\frac{1}{4}x-\frac{1}{18}\left(16-\frac{1}{2}(x+4)\right)\right]\right\}-\frac{1}{2}(x-2)=4x-\frac{2}{3}(x+2) \Leftrightarrow x=10$$

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_4

1. Зададен е правилен шестоаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точките P_1 и P_2 се средни точки на страните A_4A_5 и A_3A_4. Колку изнесува размерот на плоштината на триаголникот $P_1A_1P_2$ и плоштината на правилниот шестоаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$?

2. Реши го системот на равенки:
$$(x+y)^2-z^2=1,\ \ (y+z)^2-x^2=5,\ \ (z+x)^2-y^2=10.$$

3. Нека се p и q зададени различни прости броеви. Најди ги сите подредени парови (m,n) од природни броеви кои го задоволуваат равенството:
$$p\cdot m+q\cdot n=m\cdot n$$

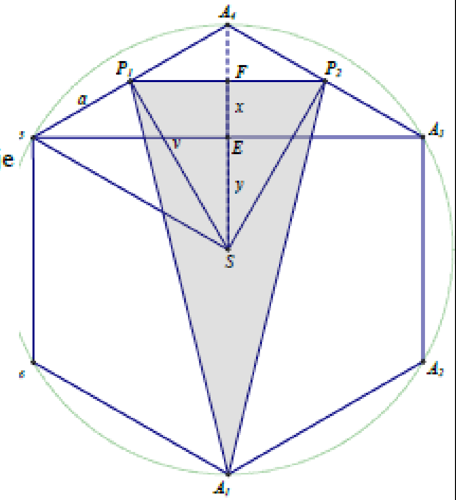
4. Нека е H подножјето на висината од триаголникот ABC повлечено од темето C. Нека R и S се последователно точки во кои впишаните кружници на триаголниците AHC и BCH ја допираат страната CH. Ако е AB=2018, AC=2017 и BC=2016, тогаш пресметај го RS?

5. Дваесет ученици кои учествуваат во кампот по математика одлучиле меѓусебно да си праќаат пораки и тоа секој од нив точно на десетмина преостанати ученици. Одреди го најмалиот можен број на обострани пораки, т.е. најди пример на распоред на праќање пораки во кој бројот на обострани пораки е најмал можен и докажи дека помал број на обострани пораки не е можно да се постигне. (Обострана порака помеѓу ученикот A и B е кога ученикот A му праќа порака на ученикот B и ученикот B му праќа порака на ученикот A)?

РЕШЕНИЕ од ЗАДАЧИ 4

1. РЕШЕНИЕ:

ПРВ начин:



Označimo: $|P_1P_2| = m$, $|FE| = x$, $|ES| = y$, $|A_3A_4| = a$.

Tada je površina šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka $P_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a površina trokuta $\Delta A_1P_2P_1$ je $P_3 = \frac{m \cdot (a+x+y)}{2}$.

$|P_1P_2| = m = |A_5E| = v$ i $|FE| = x = \frac{1}{4}a$, jer je $\overline{P_1P_2}$ srednjica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$.

$|ES| = y = \frac{1}{2}a$, jer je y duljina katete nasuprot kutu od 30° u pravokutnom trokutu ΔA_5ES s hipotenuzom duljine a. Slijedi

$$P_3 = \frac{m \cdot (a+x+y)}{2} = \frac{v \cdot \left(a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a\right)}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{7}{4}a}{2} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$$, pa je traženi omjer jednak:

$$P_3 : P_6 = \left(\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}\right) : \left(6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{7}{16} : \frac{6}{4} = \frac{7}{24}.$$

ВТОР начин

Neka je duljina stranica šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka a, tj. $|A_1A_2| = a$.

P_1 i P_2 su polovišta stranica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$, pa je $\overline{P_1P_2}$ srednjica trokuta $\Delta A_5A_3A_4$.

Neka je točka E sjecište dužina $\overline{A_5A_3}$ i $\overline{A_4S}$, a točka F sjecište dužina $\overline{P_1P_2}$ i $\overline{A_4S}$.

Tada vrijedi da je:

$$|P_1P_2| = \frac{1}{2}|A_5A_3| = |A_5E| = v = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Uočimo da je trokut ΔP_1SP_2 jednakostraničan trokut sa stranicama duljine $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dužina $\overline{FS}$ je visina tog jednakostraničnog trokuta, pa vrijedi:

$$|FS| = \frac{1}{2}v\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{4}.$$

Tada je površina šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka $P_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

a površina trokuta $\Delta A_1P_2P_1$ je $P_3 = \frac{1}{2} \cdot |P_1P_2| \cdot |FA_1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3a}{4} + a\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7a}{4} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$.

Iz dobivenih površina slijedi da je traženi omjer jednak:

$$P_3 : P_6 = \left(\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}\right) : \left(6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{7}{16} : \frac{6}{4} = \frac{7}{24}.$$

2. РЕШЕНИЕ

Iz $(x+y)^2 - z^2 = 1$, $(y+z)^2 - x^2 = 5$, $(z+x)^2 - y^2 = 10$

rastavljanjem na faktore slijedi da je

$(x+y+z)\cdot(x+y-z) = 1$,

$(x+y+z)\cdot(y+z-x) = 5$,

$(x+y+z)\cdot(z+x-y) = 10$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe vrijedi da je $(x+y+z)\cdot\left[(x+y-z)+(y+z-x)+(z+x-y)\right] = 16$, odnosno $(x+y+z)^2=16$, iz čega slijedi da $x+y+z=4$ ili $x+y+z=-4$.

1. slučaj:

Ako je $x+y+z=4$ onda je $x+y-z=\frac{1}{4}$, $y+z-x=\frac{5}{4}$, $z+x-y=\frac{10}{4}$.

Dalje redom zbrajajući dvije po dvije jednadžbe dobije se:

$2y=\frac{6}{4}\longrightarrow y=\frac{3}{4}$

$2x=\frac{11}{4}\longrightarrow x=\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}$

$2z=\frac{15}{4}\longrightarrow z=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$

2. slučaj:

Ako je $x+y+z=-4$ onda je $x+y-z=-\frac{1}{4}$, $y+z-x=-\frac{5}{4}$, $z+x-y=-\frac{10}{4}$.

Dalje redom zbrajajući dvije po dvije jednadžbe dobije se:

$2y=-\frac{6}{4}\longrightarrow y=-\frac{3}{4}$

$2x=-\frac{11}{4}\longrightarrow x=-\frac{11}{8}=-1\frac{3}{8}$

$2z=-\frac{15}{4}\longrightarrow z=-\frac{15}{8}=-1\frac{7}{8}$

3. РЕШЕНИЕ

ПРВ начин

Transformirajmo polaznu jednadžbu:

$m\cdot n-p\cdot m-q\cdot n+p\cdot q=p\cdot q,$

$(m-q)\cdot(n-p)=p\cdot q.$

Iz toga slijedi da $m-q$ i $n-p$ moraju biti istog predznaka. Također, očito je $m\neq q$ i $n\neq p$, jer je $p\cdot q>0$. Iz polazne jednadžbe slijedi da ne može biti $m<q$ i $n<p$. Naime, kada bi to bio slučaj, onda bi iz polazne jednadžbe slijedilo $m\cdot n=p\cdot m+q\cdot n>m\cdot n+m\cdot n=2\cdot m\cdot n$, odnosno $m\cdot n<0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da su m i n prirodni brojevi.

Dakle, $m-q$ i $n-p$ moraju biti pozitivni*, te imamo četiri mogućnosti:

$m-q=pq,\quad n-p=1,\qquad (1)$

$m-q=p,\quad n-p=q,\qquad (2)$

$m-q=q,\quad n-p=p,\qquad (3)$

$m-q=1,\quad n-p=pq.\qquad (4)$

Iz (1) dobivamo rješenje $(m,n)=(pq+q,\ p+1)$,

iz (2) dobivamo rješenje $(m,n)=(p+q,\ p+q)$,

iz (3) dobivamo rješenje $(m,n)=(2q,\ 2p)$,

a iz (4) dobivamo rješenje $(m,n)=(q+1,\ pq+p)$.

***Napomena:** Učenica/učenik ne mora odmah uočiti da može eliminirati slučajeve kada su $m-q$ i $n-p$ negativni. U tom će slučaju imati osam umjesto četiri slučaja, ali svi slučajevi kad su $m-q$ i $n-p$ negativni neće rezultirati rješenjem.

ВТОР начин

Riješimo jednadžbu po varijabli m:

$$m=\frac{qn}{n-p}.$$

Dalje imamo:

$$m=\frac{qn-pq+pq}{n-p}=\frac{q(n-p)}{n-p}+\frac{pq}{n-p}=q+\frac{pq}{n-p}.$$

Kao u prethodnom načinu rješavanja, zaključujemo da su $m-q$ i $n-p$ pozitivni**. Zato imamo četiri mogućnosti:

$n-p=1,\qquad (1)$

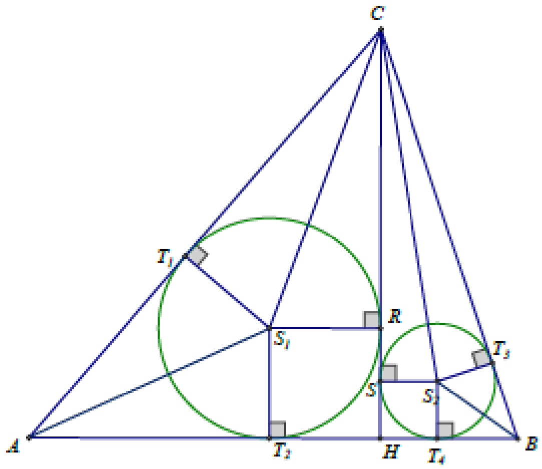
$n-p=q,\qquad (2)$

$n-p=p,\qquad (3)$

$n-p=pq.\qquad (4)$

Iz (1) dobivamo rješenje $(m, n) = (pq + q,\ p + 1)$,
iz (2) dobivamo rješenje $(m, n) = (p + q,\ p + q)$,
iz (3) dobivamo rješenje $(m, n) = (2q,\ 2p)$,
a iz (4) dobivamo rješenje $(m, n) = (q + 1,\ pq + p)$.
****Napomena:** Kao i u prvom načinu rješavanja, učenica/učenik ne mora odmah uočiti da može eliminirati slučajeve kada su $m - q$ i $n - p$ negativni. U tom će slučaju imati osam umjesto četiri slučaja, ali svi slučajevi kad su $m - q$ i $n - p$ negativni neće rezultirati rješenjem.

4. РЕШЕНИЕ



Neka je T_1 točka dirališta kružnice upisane trokutu ΔAHC i stranice $\overline{AC}$, a T_2 točka dirališta kružnice upisane trokutu ΔAHC i stranice $\overline{AH}$.
Promotrimo pravokutne trokute ΔAS_1T_1 i ΔAT_2S_1. Oni imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{AS_1}$, sukladne prave kutove $\angle S_1T_1A \cong \angle AT_2S_1$ i jednake duljine stranica $|S_1T_1| = |S_1T_2|$.
Dakle trokuti ΔAS_1T_1 i ΔAT_2S_1 su sukladni po teoremu SSK$^{>}$, stoga je $|AT_1| = |AT_2|$.
Promotrimo pravokutne trokute ΔCT_1S_1 i ΔCS_1R. Oni imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{CS_1}$, sukladne prave kutove $\angle CT_1S_1 \cong \angle S_1RC$ i jednake duljine stranica $|S_1T_1| = |S_1R|$.
Dakle trokuti ΔCT_1S_1 i ΔCS_1R su sukladni po teoremu SSK$^{>}$, stoga je $|T_1C| = |RC|$.

Zatim, $|T_2H| = |RH|$ jer su obje duljine duljine polumjera iste kružnice.
Sada imamo
$|AC| = |AT_1| + |T_1C| = |AT_2| + |RC| = |AH| - |T_2H| + |CH| - |RH| = |AH| + |CH| - 2|RH|$.
Odatle slijedi

$$|RH| = \frac{1}{2}\cdot(|AH| + |CH| - |AC|) = \frac{1}{2}\cdot(|AH| + |CH| - 2017). \tag{1}$$

Analogno, pomoću T_3 i T_4, dobivamo

$$|SH| = \frac{1}{2}\cdot(|BH| + |CH| - |BC|) = \frac{1}{2}\cdot(|BH| + |CH| - 2016). \tag{2}$$

Prema Pitagorinom poučku imamo
$2017^2 - |AH|^2 = |CH|^2 = 2016^2 - |BH|^2$,
odakle slijedi
$|AH|^2 - |BH|^2 = 2017^2 - 2016^2$,
odnosno

$$|AH| - |BH| = \frac{2017^2 - 2016^2}{|AH| + |BH|} = \frac{(2017-2016)(2017+2016)}{|AB|} = \frac{4033}{2018}. \tag{3}$$

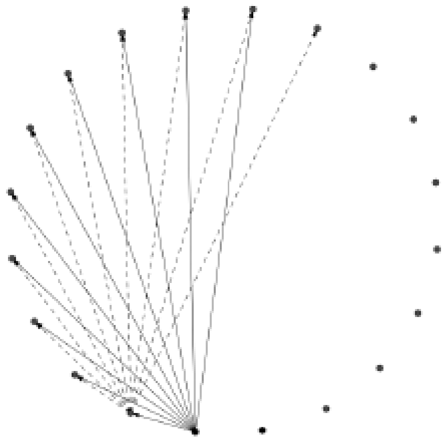
Konačno, iz (1), (2) i (3) slijedi

$$|RS| = |RH| - |SH| = \frac{1}{2}\cdot(|AH| - |BH| - 1) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4033}{2018} - 1\right) = \frac{2015}{4036}.$$

5. РЕШЕНИЕ

Ukupno je upućeno $20 \cdot 10 = 200$ poruka, a parova učenika ima $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$.

Zato barem $200 - 190 = 10$ poruka mora biti poslano između istih parova učenika pa je najmanji mogući broj obostranih poruka barem 10.
Konstruirajmo sada raspored poslanih poruka tako da je broj obostranih poruka točno 10.
Neka su učenici poredani ukrug i neka je svatko poslao poruku deset učenika koji se nalaze u krugu nakon njega u smjeru kazaljke na satu. Uočimo da će u tom rasporedu slanja poruka samo učenici koji su jedan nasuprot drugoga (dijametralno suprotni) poslati obostrane poruke.



(Svaka točka predstavlja jednog učenika, a orijentirana dužina jednostranu poruku.)

Time je konstruiran traženi raspored poruka za koje je broj obostranih poruka točno 10.
Iz navedenog možemo zaključiti da je najmanji mogući broj obostranih poruka jednak 10.

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_5

1.

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_6

1.

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_7

1.

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_8

1.

ЗАДАЧИ за НАТПРЕВАР_9

1.