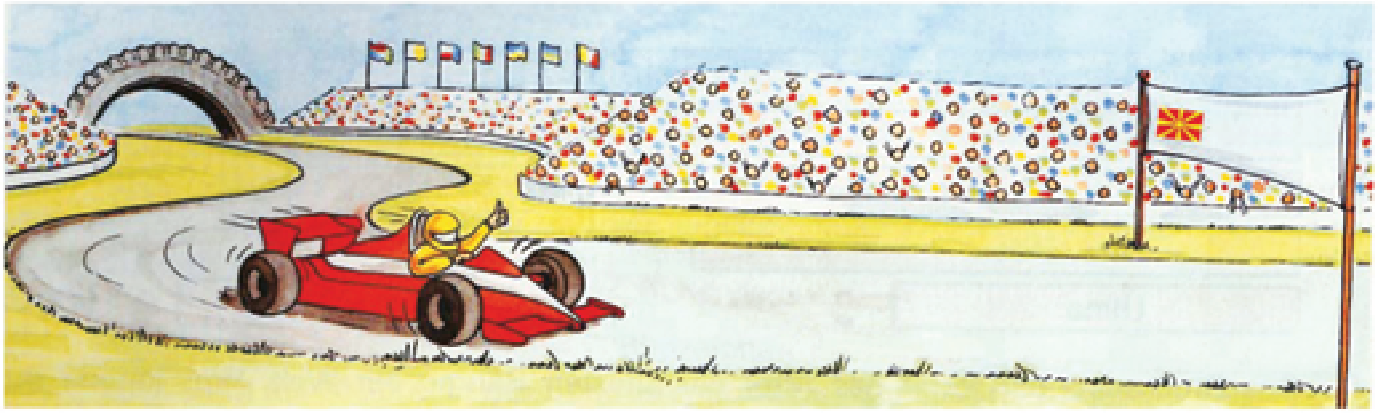
ЈОВО СТЕФАНОВСКИ
НАУМ ЦЕЛАКОСКИ

МАТЕМАТИКА

ОСМО ОДДЕЛЕНИЕ

Осумгодишно основно
образование



ДЕВЕТТО ОДДЕЛЕНИЕ

Деветгодишно основно
образование

2010
Скопје

Драг ученику!

Оваа книга ќе ти помогне да ги изучиш предвидените содржини за VIII одделение. Ќе учиш нови интересни содржини за сличност на фигури. Ќе научиш техники за решавање линеарни равенки и линеарни неравенки, како и за решавање на некои системи линеарни равенки. Ќе ги прошириш знаењата за линеарната функција и за геометриските тела и нивната плоштина и волумен.
Книгава е поделена на четири тематски целини, а секоја од нив е поделена на поттеми.
Тематските целини започнуваат со содржина, а наставните единици во нив се нумерирани.
Во наставните единици има ознаки во боја и преку нив се испишани пораки, активности, обврски и други сугестии, и тоа:

Потсети се!

Наставните единици започнуваат со нешто што ти е познато. Треба да се потсетиш и да ги решиш дадените барања. Тоа ќе ти користи при изучувањето на новото во лекцијата.

А, Б ...

Со овие ознаки наставната единица е поделена на делови (порции) кои се однесуваат на новите поими.

1.
2.
3. ...

Со ваквите ознаки се означени активностите, прашањата и задачите што ќе ги решаваш самостојно или со помош на твојот наставник. Во овој дел го учиш новото во лекцијата, затоа треба да бидеш внимателен и активен за подобро да го научиш и разбереш. Најбитното е обоено со жолта боја, при што формулациите на теоремите се во портокалова рамка.

Треба да знаеш:

Најбитното од лекцијата е издвоено во вид на прашања, задачи или тврдења. Тоа треба да го паметиш и да го користиш во задачи и практични примери.

Провери се!

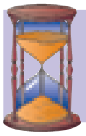
Овој дел содржи прашања и задачи со кои можеш да се провериш дали поголемиот дел од изученото го разбираш за да можеш да го применуваш и користиш во секојдневниот живот.

Задачи

Треба редовно и самостојно да ги решаваш овие задачи. Со тоа подобро ќе го разбереш изученото, а тоа ке ти биде од голема полза.

Обиди се! ...

Потруди се да ги решаваш задачите и проблемите во овој дел (ова не е задолжително). Со тоа ќе знаеш повеќе и ќе бидеш побогат со идеи.



ПРОВЕРИ ГО ТВОЕТО ЗНАЕЊЕ

На крајот од секоја тема имаш тест од прашања и задачи. Реши го самостојно тестот и со тоа ќе ги провериш твоите знаења од изучената тема.

Кога ќе наидеш на тешкотии при изучувањето на математиката не откажувај се, обиди се повторно, а упорноста ќе ти донесе резултат и задоволство.
Ќе нè радува ако со оваа книга ја засакаш математиката повеќе и постигнеш одличен успех.

Од авторите

ТЕМА 1. СЛИЧНОСТ

ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

1 РАЗМЕР МЕЃУ ДВЕ ОТСЕЧКИ

Потсети се!

- **Размер** или **однос** на бројот a и бројот b ($b \neq 0$) е количникот на a и b, т.е.

$$a : b \text{ или } \frac{a}{b};$$

се чита: a спрема b;
бројот a се вика *прв член*, а b *втор член* на размерот.

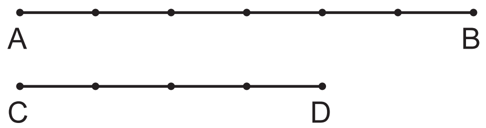
- Бројот што се добива со извршување на делењето на a со b се вика **вредност на размерот** $a : b$ и се означува со k. Во тој случај $a : b = k$, т.е. $a = bk$.

- Најди ја вредноста на размерот:

а) $28 : 4$; б) $35 : 5$; в) $12 : 16$; г) $1{,}8 : 2{,}4$.

- За кои размери се вели дека се *еднакви*?
- Кои од размерите а) – г) се еднакви?
- Најди го непознатиот член на размерот:
  а) $x : 8$, ако вредноста му е 4;
  б) $18 : y$, ако вредноста му е 12.

1. На цртежот се дадени две отсечки:



при што $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm.

- Запиши го размерот на мерните броеви од должината на отсечката AB и должината на отсечката CD.
- Количникот 6 : 4 ќе го сметаме за размер меѓу отсечката AB и отсечката CD.

Општо

- **Размер** или **однос** меѓу две отсечки е количникот од мерните броеви на нивните должини при иста мерна единица.
- Односот на една отсечка AB спрема друга отсечка CD го запишуваме:

$$\overline{AB} : \overline{CD} \text{ или } \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

- Дали вториот член $\overline{CD}$ може да биде еднаков на нула?
- Во задачата 1, односот $\overline{AB} : \overline{CD}$ е 6 : 4, а неговата вредност е $\frac{3}{2}$.

2. Најди ја вредноста на размерот на отсечката a спрема отсечката b, ако:
а) $a = 12$ cm, $b = 4$ cm; б) $a = 30$ cm, $b = 6$ dm.

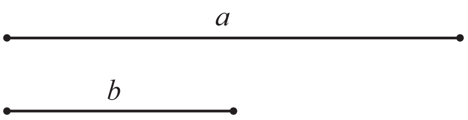
Внимавај!

- Должините на двете отсечки во размерот треба да се изразени со иста мерна единица.
- Размерот на двете отсечки е **неименуван** број.

3. Секој член од размерот 0,5 : 0,25: а) помножи го со 20; б) подели го со 5.

- Потоа, вредноста на дадениот размер спореди ја со вредностите на добиените размери во а) и б).
- Што заклучуваш?

4. Запиши го односот на отсечката a = 6 cm спрема отсечката b = 3 cm и одреди ја неговата вредност.



- Потоа, одреди го односот $a : b$ и неговата вредност, ако должините на отсечките ги запишеш во: а) mm; б) dm; в) m.
- Што заклучуваш за тие односи?

Со претходните две задачи се потсети дека:

- Размерот $a : b$ не се менува ако двата негови членови се помножат или се поделат со ист ненулти број, т.е.

ако $a : b = k$ и $m \neq 0$, тогаш $(am) : (bm) = k$ и $(a : m) : (b : m) = k$.

Ако односот на два броја е $a : b = k$, тогаш на што е еднаков бројот a? Што покажува бројот k за броевите a и b?

Ако $a : b = k$, тогаш $a = kb$. Бројот k покажува колку пати бројот b се содржи во бројот a.

Запомни

- Ако односот на две отсечки AB и CD е k, т.е. $\overline{AB}:\overline{CD} = k$, тогаш $\overline{AB} = k \cdot \overline{CD}$.

- Односот k покажува колку пати отсечката CD се содржи во отсечката AB, т.е. k е мерниот број на должината на отсечката AB кога за мерна единица ќе се земе отсечката CD.

Б **5.** Дадени се отсечките a = 1,2 dm, b = 18 cm.

- Запиши го размерот $a : b$ и пресметај ја неговата вредност.
- Запиши го размерот $b : a$ и пресметај ја неговата вредност.

- За размерот $b : a$ се вели дека е **обратен** на размерот $a : b$.

- Така, размерот 18 : 12 е обратен на размерот 12 : 18.

6. Ана има 5 години, Билјана има 10 години, а Стојна има 35 години.

- Запиши го односот на годините меѓу:
  а) Ана и Билјана; б) Билјана и Стојна; в) Ана и Стојна.

- Разгледај ги размерите 5 : 10, 10 : 35 и воочи дека имаат нешто заедничко.
- Вториот член од првиот размер е еднаков со првиот член од вториот размер.

Запомни!

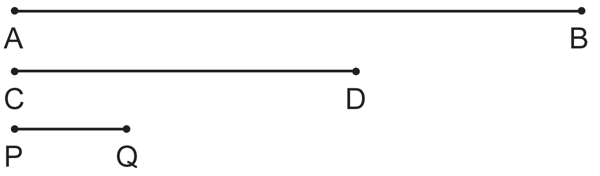
- Размерите $a : b$ и $b : c$ обично се запишуваат кратко со $\boxed{a : b : c}$.
  Записот $a : b : c$ се вика **продолжен размер** на a, b, c.
- Така, 5 : 10 : 35 е продолжен размер што е замена за двата размера 5 : 10 и 10 : 35. Покрај тие два размера, продолженият размер го содржи и размерот 5 : 35.

7. Воздушните растојанија меѓу три града A, B, C се: $\overline{AB}$ = 40 km, $\overline{BC}$ = 100 km, $\overline{CA}$ = 120 km.

- Претстави ги тие растојанија, на цртеж, намалени 800 000 пати.
- Запиши го продолжениот размер $\overline{CA} : \overline{AB} : \overline{BC}$ во што попрост вид.

8. На цртежот се дадени три отсечки AB, CD и PQ, такви што $\overline{AB} = 5\,\overline{PQ}$, $\overline{CD} = 3\overline{PQ}$.

- Колку пати отсечката PQ се содржи во отсечката а) AB; б) CD?



- Воочи дека отсечката PQ, во отсечките AB и CD, се содржи цел број пати.
- За отсечката PQ се вели дека е **заедничка мера** на отсечките AB и CD.

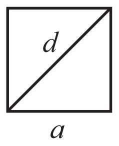
Општо

- За две отсечки се вели дека се **сомерливи**, ако постои трета отсечка којашто се содржи цел број пати во секоја од нив.
- Размерот на две сомерливи отсечки е рационален број (цел или дробен).

- Отсечките AB и CD од задачата 8 се сомерливи. Такви се и паровите отсечки: AB, BC и BC, CA, во задачата 7 (заедничка мера им е отсечка со должина, на пример, 1 km).

9. На цртежот е претставен квадрат со страна a и дијагонала d.

- Изрази ја дијагоналата d со помош на страната a.
- Покажи дека размерот $d : a$ е ирационалниот број $\sqrt{2}$.



Воочи дека

- Има парови отсечки за кои не постои отсечка што би се содржела цел број пати во секоја од нив. За такви две отсечки се вели дека се **несомерливи** и нивниот размер секогаш е ирационален број.

■ На пример, страната a и дијагоналата d на квадрат се несомерливи отсечки; нивниот размер $d : a$ е бројот $\sqrt{2}$.

Треба да знаеш:

- да именуваш и да одредиш размер на два броја и на две отсечки;
- да одредиш вредност на размер и еднакви размери;
- да запишеш обратен размер и продолжен размер;
- да одредиш непознат член во размер.

Провери се!

▲ Дадени се отсечките $\overline{AB} = 8$ cm и $\overline{AC} = 2$ cm (на цртежот).

● Искажи ја вредноста на размерот: а) $\overline{AB} : \overline{AC}$; б) $\overline{AC} : \overline{CB}$; в) $\overline{CB} : \overline{AC}$; г) $\overline{CB} : \overline{AB}$.

▲ Искажи го размерот на a спрема b во што е можно попрост вид:
а) $a = 6$, $b = 18$; б) $a = 28$ cm, $b = 7$ cm; в) $a = 1$ kg, $b = 800$ g.

▲ Одреди ја вредноста на секој од размерите:
а) 6 : 8; б) 150 : 200; в) 80 : 60; г) 0,18 : 0,24.
Кои од нив се еднакви?

▲ Вредноста на размерот $x : 4$ е 5. Колку е x?

Задачи

1. Искажи го размерот $a : b$ во што попрост вид, ако:

а) $a = 15$ cm, $b = 2$ dm;

б) $a = 6x$, $b = 4x$;

в) $a = 2\ \ell$, $b = 800$ mℓ.

2. Запиши го обратниот размер за секој од размерите во претходната задача.

3. Следните размери претстави ги во вид на размери чии членови се цели броеви.

а) 0,3 : 0,6; б) 0,35 : 0,7; в) $\frac{2}{5} : \frac{4}{3}$;

г) $2\frac{3}{5} : 5{,}2$; д) $5\frac{1}{4} : \frac{35}{2}$.

Кои од нив се еднакви меѓу себе?

4. Растојанието Скопје – Валандово е 150 km, Скопје – Крива Паланка е 100 km, а Скопје – Тетово е 50 km.

а) Запиши продолжен размер на тие растојанија.

б) Запиши го тој продолжен размер во што попрост вид.

5. Пресметај го непознатиот член во размерот, ако е дадена неговата вредност:

а) $x : 5 = 3$; в) $6{,}5 : y = 13$;

б) $x : 1{,}3 = 6$; г) $4\frac{2}{3} : y = 3\frac{1}{3}$.

6. Најди го односот на страната и периметарот на:
а) рамностран триаголник;
б) рамностран петаголник;
в) рамностран шестаголник.

7. Дадена е отсечка $\overline{AB} = 24$ cm и на неа е избрана точка C, така што $\overline{AC} = 18$ cm. Да се најде:

а) $\overline{AC} : \overline{CB}$

б) размерот на најкусата спрема најдолгата отсечка.

8. Помалата од две отсечки се содржи во поголемата 7 пати и останува отсечка којашто се содржи во помалата отсечка точно 2 пати. Колку е долга поголемата отсечка, ако се знае дека помалата отсечка е долга 1 cm?

9. Во правоаголен триаголник еден од аглите има 60°. На што е еднаков односот на хипотенузата и помалата катета?

10. Збирот од должините на две отсечки е 35, а нивната разлика е 7.
Да се најде односот на тие отсечки.

- Три кокошки за три дена несат три јајца.

а) Колку јајца несат шест кокошки за шест дена?

б) Колку кокошки за 100 дена ќе снесат 100 јајца?

2 ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

Потсети се!

- Какви се меѓу себе размерите 12 : 8 и 6 : 4?
- Што претставува равенството на еднаквите размери: 12 : 8 = 6 : 4?
- Ако размерите $a : b$ и $c : d$ се еднакви, тогаш равенството

$$a : b = c : d, \text{ т.е. } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

се вика **пропорција**, а броевите a, b, c, d се *членови* на таа пропорција.

- Кој од тие броеви е прв член, а кој е трет член на пропорцијата?
- Кои се надворешни, а кои внатрешни членови?
- Најди го производот на надворешните и производот на внатрешните членови на пропорцијата 12 : 8 = 6 : 4.
- Какви се меѓу себе тие производи?

А **1.** Дадени се четири отсечки со должини $\overline{AB} = 40$ cm, $\overline{PQ} = 7$ cm, $\overline{CD} = 8$ cm, $\overline{RS} = 35$ cm.

- Дали можеш од нив да образуваш пропорција?
- Состави од нив некоја пропорција.

Воочи дека, на пример:

40 cm : 8 cm = 35 cm : 7 cm,

т.е. од должините на дадените отсечки може да се формира пропорцијата

40 : 8 = 35 : 7.

Поради тоа, може да се каже дека паровите отсечки AB, CD и RS, PQ се *пропорционални*.

Општо

За два пара отсечки a, b и c, d се вели дека се **пропорционални**, ако нивните должини образуваат пропорција:

$$a : b = c : d, \text{ т.е. } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

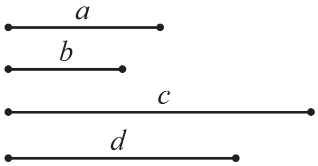
- Вредноста k на еднаквите размери $a : b$ и $c : d$ на паровите пропорционални отсечки a, b и c, d се вика **коефициент на пропорционалноста**.

- Кој е коефициентот на пропорционалноста на отсечките AB, CD и RS, PQ од задачата 1?

Како ќе го одредиш коефициентот на пропорционалноста на отсечките?

Ќе ја одредам вредноста на односот $\overline{AB} : \overline{CD}$, т.е. 40 cm : 8 cm = 40 : 8 = 5; k = 5.

2. Дадени се отсечките a = 2 cm, b = 1,5 cm, c = 4 cm, d = 3 cm.



- Покажи дека a, b и c, d се пропорционални. Кој е коефициентот на пропорционалноста?
- Запиши пропорција на отсечките a, b и c, d. Најди го производот на надворешните членови и производот на внатрешните членови. Какви се тие производи меѓу себе?

Важи и општо!

- Производот од надворешните членови на една пропорција е еднаков со производот од нејзините внатрешни членови, т.е.

$$\text{ако } a : b = c : d, \text{ тогаш } a \cdot d = b \cdot c$$

- Ова правило се вика **основно својство на пропорциите.**

- За секоја од четирите пропорционални отсечки a, b, c, d се вели дека е **четврта геометриска пропорционала** на другите три.

- На пример, $d = \dfrac{bc}{a}$ е четврта геометриска пропорционала на отсечките a, b, c во пропорцијата $a : b = c : d$.

3. Најди ја должината на четвртата геометриска пропорционала x на отсечките a = 6 cm, b = 8 cm, c = 12 cm во пропорциите:

а) $a : b = c : x$; б) $x : c = a : b$; в) $a : x = b : c$.

- Спореди го твоето решение за а) со даденото:

$a : b = c : x$; 6 : 8 = 12 : x; $6x = 8 \cdot 12$; x =16 cm.

Потсети се!

- За броевите 5 и 20 најди број x таков што 5 : x = x : 20.
- Што претставува бројот $\sqrt{5 \cdot 20}\ (=10)$ за броевите 5 и 20?
- Најди ја геометриската средина на броевите 2 и 32.

Б **4.** Дадени се отсечките a = 9 cm и b = 4 cm. Најди отсечка x, таква што $a : x = x : b$.

- Спореди го твоето решение со даденото.

☞ Пропорцијата 9 : x = x : 4, според основното својство, се сведува на равенката $x^2 = 9 \cdot 4$, па $x = \sqrt{36} = 6$; x = 6 cm.

■ Воочи дека бројот 6 е геометриска средина на броевите 4 и 9.

Запомни!

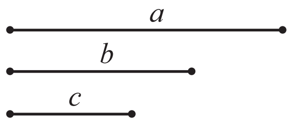
■ **Геометриска средина** (или **средна геометриска пропорционала**) на две отсечки со должини a и b се вика отсечка со должина x таква што $a : x = x : b$, т.е.

$$\boxed{\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \quad ☞ \quad x^2 = ab \quad ☞ \quad x=\sqrt{ab}}$$

5. Најди ја геометриската средина на отсечките:

а) a =12 cm, b = 27 cm; б) a = 5 cm, b = 12 cm.

6. Утврди со мерење дали отсечката b од цртежот е геометриска средина на отсечките a и c.



В **7.** Дадена е пропорцијата $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$. Покажи дека е пропорција и равенството $\frac{8+4}{4}=\frac{10+5}{5}$.

Важи и општо

■ Ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, тогаш $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

● Обиди се да го докажеш тоа.

■ Воочи дека: од $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следува $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$; потоа: $\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d}$, т.е. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

8. Покажи дека важи и обратното тврдење.

● Ако $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, тогаш $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

■ *Потсети се!* Кога три или повеќе размери се еднакви, тогаш тие може да се запишат во форма на **продолжена пропорција**, како на пример: $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$.

За неа важи:

$$\boxed{\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}}$$

Треба да знаеш:

- да го дефинираш поимот пропорција;
- да одредиш непознат член во пропорција;
- да објасниш кои парови отсечки се пропорционални;
- да одредиш геометриска средина на две отсечки.

Задачи

1. Кој број треба да стои на местото од буквата a за да биде точно равенство:

а) $\frac{5}{2}=\frac{a}{8}$; б) $\frac{a}{14}=\frac{3}{7}$?

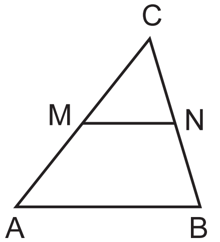
2. Состави пропорција од должините на четири отсечки: 28 cm; 16 cm;1,2 dm; 2,1 dm.

3. Најди ја должината x на четвртата геометриска пропорционала на отсечките a, b, c во пропорцијата $a : b = x : c$, ако:

а) $a=\frac{1}{2}$ dm, $b=\frac{3}{4}$ dm, $c=\frac{2}{3}$ dm;

б) a = 2 m, b = 3 m, c = 4 m.

4. Во ΔABC на цртежот е дадено: $\overline{CM}:\overline{MA}=\overline{CN}:\overline{NB}$. Во секоја редица од табелата се дадени некои должини. Одреди ги должините што недостасуваат.



	$\overline{CM}$	$\overline{MA}$	$\overline{CN}$	$\overline{NB}$
а)	8	6	4	▨
б)	6	4	▨	5
в)	▨	8	8	4

5. Најди ја геометриската средина на отсечките a и b, ако:

а) a = 2 cm, b = 8 cm;

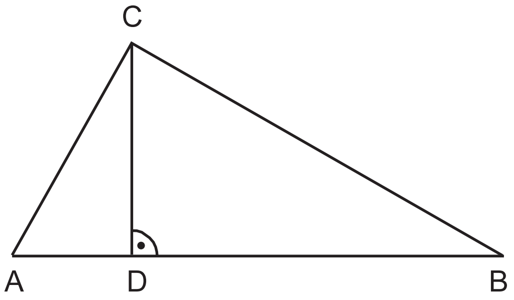
б) $a=4\frac{4}{5}$ dm, b = 12 cm;

в) a = 7 cm, b = 14cm.

Провери се!

- Најди го непознатиот член во пропорцијата 10 : a = 15 : 6.
- Најди ја должината на четвртата геометриска пропорционала x на отсечките a = 4 cm, b = 5 cm, c = 8 cm во пропорцијата $a : b = c : x$.
- Најди ја геометриската средина на отсечките a = 2 cm и b = 8 cm.

6. Во правоаголниот ΔABC на цртежот, отсечката CD е висината спуштена кон хипотенузата AB.



Со мерење, утврди дека:

а) отсечката CD е геометриска средина на отсечките AD и DB;

б) отсечката AC е геометриска средина на отсечките AD и AB.

7. Најди ги x и y, ако:

а) $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{3}{2}$; б) $\frac{7}{x}=\frac{y}{6}=\frac{1}{4}$.

8. Покажи дека од пропорцијата $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ може да се добијат пропорциите:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c};\quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b}.$$

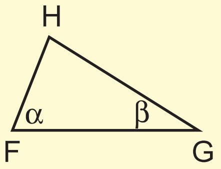
9. Докажи дека:

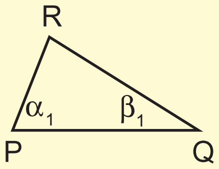
ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, тогаш $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

3 ДЕЛЕЊЕ ОТСЕЧКА НА ЕДНАКВИ ДЕЛОВИ

Потсети се!

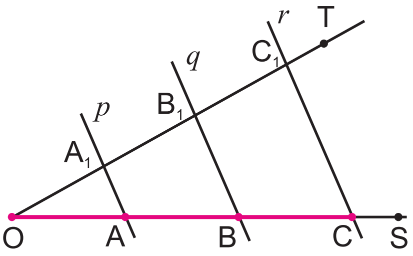
- Како ќе поделиш дадена отсечка на еднакви делови:
  а) на два; б) на четири?
- За ΔFGH и ΔPQR на цртежот е дадено:
  $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\overline{FG} = \overline{PQ}$.





- Какви се меѓу себе тие триаголници?
- Какви се меѓу себе соодветните страни на складни триаголници?

А **1.** На цртежот е претставен агол SOT и на кракот OS се нанесени еднакви отсечки $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC}$.

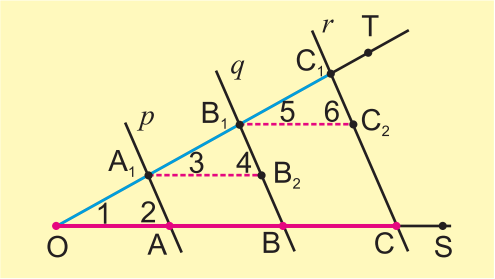


Низ точките A, B и C се повлечени меѓусебно паралелни прави p, q и r, коишто го сечат кракот OT во точките A_1, B_1 и C_1, соодветно.

- За отсечките OA_1, A_1B_1 и B_1C_1 се вели дека се *соодветни* на отсечките (по ред): OA, AB и BC.
- Измери ги отсечките OA_1, A_1B_1, B_1C_1. Што заклучуваш?

2. Во врска со цртежот од задачата 1, обиди се да докажеш дека

$$\overline{OA_1} = \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1}.$$



- Разгледај го цртежот на кој се повлечени уште отсечките A_1B_2 и B_1C_2, паралелно со кракот OS, и се означени неколку агли со броеви.

- Воочи ги ΔOAA_1 и $\Delta A_1B_2B_1$ и согледај дека:

☞ $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$, $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ (Зошто?) ☞ $\overline{OA} = \overline{A_1B_2}$ (Зошто?)

☞ $\Delta OAA_1 \cong \Delta A_1B_2B_1$, па $\overline{OA_1} = \overline{A_1B_1}$ (Зошто?).

- Воочи ги $\Delta A_1B_2B_1$ и $\Delta B_1C_2C_1$. Покажи дека и тие се складни и дека $\overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1}$.

- Воочи ја и запомни ја следната **теорема за еднаквите отсечки** на краците од еден агол.

Ако на едниот крак од даден агол се *нанесени еднакви отсечки* и низ нивните краеви се повлечени *паралелни прави* што го сечат другиот крак на аголот, тогаш тие прави отсекуваат и *на другиот крак меѓусебно еднакви отсечки*.

Врз основа на оваа теорема можеш да поделиш дадена отсечка на произволен број еднакви делови.

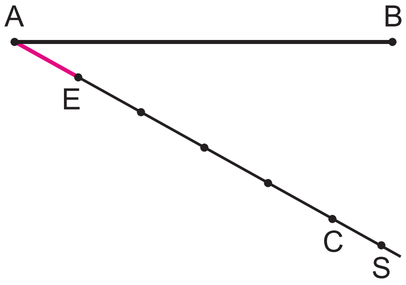
3. Отсечката AB на цртежот подели ја на 5 еднакви делови.

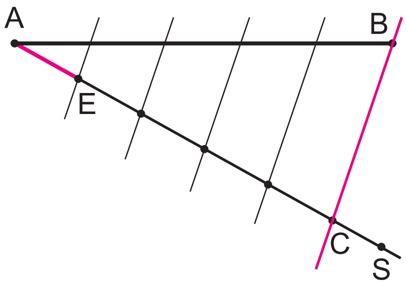
Како ќе ја употребиш претходната теорема за да ја поделиш отсечката AB на 5 еднакви дела?

Во точката A ќе повлечам произволна полуправа и на неа со почеток во A ќе нанесам 5 еднакви отсечки. Потоа ќе повлечам паралелни прави, според теоремата.

Следи го решавањето и воочи ја постапката за **поделба на отсечка на еднакви делови**.

- Повлечи произволна полуправа AS како на цртежот.
- На AS, почнувајќи од A, петпати нанеси произволно избрана отсечка, на пример AE; со тоа ќе добиеш пет точки; петтата означи ја со C.





- Повлечи ја, прво, правата CB и потоа, низ секоја од добиените точки на AC, повлечи права паралелна со правата CB; тие прави ја делат отсечката AB на пет еднакви делови.

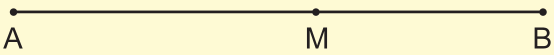
Објасни зошто тие 5 делови се еднакви меѓу себе.

4. Нацртај отсечка AB со должина 7 cm и подели ја на 6 еднакви делови.

5. Нацртај една отсечка и одреди ја нејзината средина, користејќи ја теоремата за еднаквите отсечки.

Потсети се!

На отсечката AB е означена точката M така што: $\overline{AM} = 4$ cm и $\overline{MB} = 3$ cm.

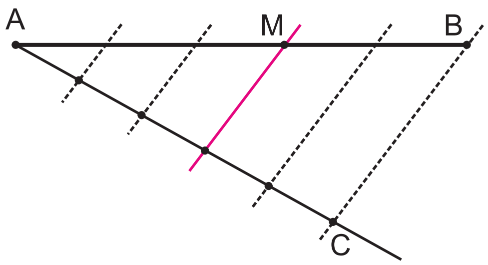


Во кој однос точката M ја дели отсечката AB?

Б **6.** Нацртај отсечка AB од 6 cm.

а) Подели ја на 5 еднакви делови.

б) Означи точка M таква што $\overline{AM} : \overline{MB} = 3 : 2$.



Спореди го твоето решение со даденото на цртежот.

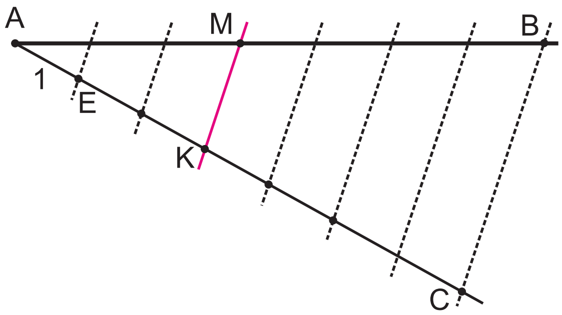
7. Нацртај отсечка AB и подели ја на два дела чијшто однос е 3 : 4.

- Прво, подели ја отсечката AC на 3 + 4 = 7 еднакви делови.

Спореди го твоето решение со даденото на цртежот, на кој е земено $\overline{AK} = 3 \cdot \overline{AE}$ и KM || CB.

Така е добиено $\overline{AM} : \overline{MB} = 3 : 4$.

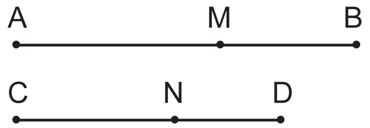
- Објасни зошто $\overline{AM} : \overline{MB} = 3 : 4$.



Оваа конструкција се вика **поделба на отсечка во даден однос**.

8. Отсечката AB на цртежот е поделена со точката M во однос 3 : 2. Исто така, отсечката CD со точката N е поделена во истиот однос 3 : 2.

- Состави пропорција за деловите од отсечката AB и од отсечката CD.



Една можност е: $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{CN} : \overline{ND}$, што значи AM, MB се *пропорционални* со отсечките CN, ND. Поради тоа се вели дека отсечките AB и CD се *поделени пропорционално*.

Општо

За две отсечки се вели дека **се поделени пропорционално**, ако односот на деловите од едната отсечка образува пропорција со односот од деловите на другата отсечка.

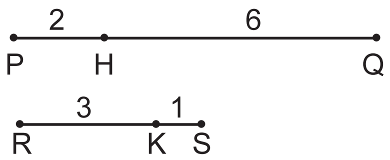
9. Нацртај две отсечки со должини 7 cm и 4 cm и подели ги пропорционално во однос 1 : 2.

Треба да знаеш:

- да поделиш отсечка на еднакви делови и да ја објасниш постапката;
- да поделиш отсечка во даден однос;
- да објасниш кога две отсечки се поделени пропорционално.

Провери се!

- Нацртај отсечка AB од 5 cm и подели ја на 3 еднакви делови. Потоа, означи точка M што ја дели отсечката AB во однос 2 : 1.
- Запиши една пропорција меѓу деловите на отсечките PQ и RS коишто со точките H и K на цртежот се поделени пропорционално.



Задачи

1. Нацртај отсечка од 6 cm и подели ја на еднакви делови:

а) на три; б) на седум.

2. Нацртај отсечка AB и подели ја во однос

а) 2 : 1; б) 5 : 2.

3. Нацртај отсечка со должина 10 cm и подели ја:

а) на 7 еднакви делови;

б) во однос 4 : 3;

в) на три отсечки во однос 1 : 2 : 4.

4. Нацртај ΔABC и неговите страни подели ги на по три еднакви делови.

5. Нацртај ΔABC и тежишната линија AA_1. Одреди го тежиштето T на триаголникот со тоа што AA_1 ќе ја поделиш во однос $\overline{AT}:\overline{TA_1}=2:1$.

6. Точката M ја дели отсечката AB во однос $\overline{AB}:\overline{MB}=5:3$. Должината на отсечката AM е 4,8 dm. Најди ја должината на отсечката MB; AB.

7. За колку треба да се продолжи отсечката $\overline{AB}=12$ cm за да се добие отсечка AC што ја задоволува пропорцијата $\overline{AC}:\overline{BC}=5:2$?

8. Точката M ја дели отсечката AB во однос $\overline{AM}:\overline{MB}=3:2$. Најди ги размерите $\overline{AM}:\overline{AB}$ и $\overline{AB}:\overline{MB}$.

4 ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА ЗА ПРОПОРЦИОНАЛНИ ОТСЕЧКИ

Потсети се!

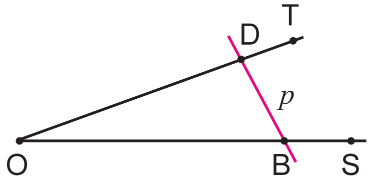
- Како се дели дадена отсечка:

  а) на еднакви делови;

  б) во даден однос $m : n$?

  Објасни ја конструкцијата.

1. На цртежот е даден остар агол SOT. На кракот OS е избрана точка B, а на кракот OT точка D. Низ B и D е повлечена права p.

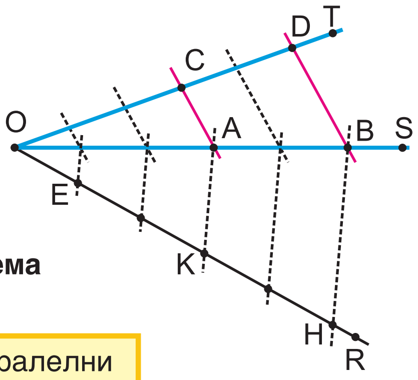


- На отсечката OB одреди точка A, така што $\overline{OA} : \overline{AB} = 3 : 2$.
- Низ точката A повлечи права $q \parallel p$. Нека правата q го сече кракот OT во точката C. Покажи дека $\overline{OC} : \overline{CD} = 3 : 2$.

Што ќе користиш за да покажеш дека $\overline{OC} : \overline{CD} = 3 : 2$?

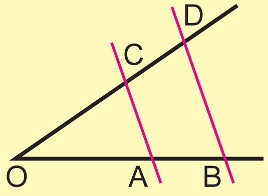
Ќе ја искористам постапката и тврдењето за делење отсечка во даден однос.

- На цртежот е дадено решението на задачата. Одговори на следните прашања.
  - Како е поделена отсечката OB на 5 еднакви делови?
  - Како е одредена точката A така што $\overline{OA} : \overline{AB} = 3 : 2$?
  - Зошто $\overline{OC} : \overline{CD} = \overline{OA} : \overline{AB} = 3 : 2$?



- Воочи го и запомни го тврдењето наречено **Талесова теорема за пропорционални отсечки**.

Ако краците на еден агол се пресечат со две различни паралелни прави, тогаш отсечките што се добиени на едниот крак се пропорционални со соодветните отсечки на другиот крак.

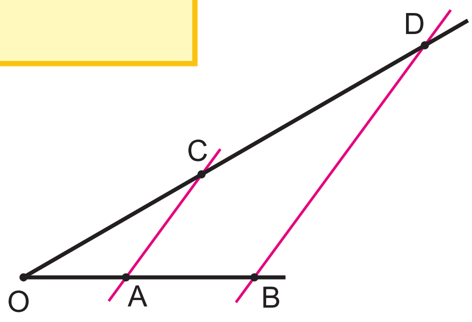


$$AC \parallel BD \;☞\; \overline{OA} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CD}$$

2. На цртежот е земено AC || BD.

Ако $\overline{OA} = 4$ dm, $\overline{AB} = 5$ dm, $\overline{OC} = 8$dm,

- најди ја $\overline{CD}$;
- покажи дека $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OC} : \overline{OD}$.



- Важи општо: од равенството $\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{CD}$ (во Талесовата теорема) се добива равенството $\overline{OB}:\overline{OA}=\overline{OD}:\overline{OC}$ или

$$\boxed{\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OC}:\overline{OD}\ .}$$

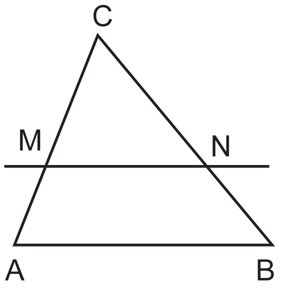
- Со користење на соодветно својство на пропорции, од $\overline{AB}:\overline{OA}=\overline{CD}:\overline{OC}$ следува

$$\boxed{(\overline{AB}+\overline{OA}):\overline{OA}=(\overline{CD}+\overline{OC}):\overline{OC}\,.}$$

- Покажи дека $\overline{OB}:\overline{OA}=\overline{OD}:\overline{OC}$.

3. На цртежот е даден ΔABC и права $MN \parallel AB$ што ги сече другите две страни AC и BC.

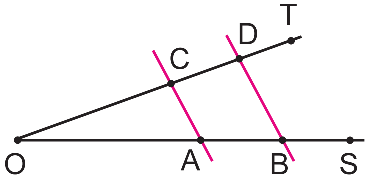
- Утврди дека страните AC и BC со правата MN се поделени пропорционално, т.е. $\overline{CM}:\overline{MA}=\overline{CN}:\overline{NB}$.



- *Ако ти е неопходна помош...*

Прво, согледај дека краците на ∢ACB се пресечени со паралелните прави MN и AB. Потоа, примени ја Талесовата теорема.

4. Нацртај агол SOT и нанеси отсечки како на цртежот: $\overline{OA}=4\text{ cm}$, $\overline{OB}=6\text{ cm}$, $\overline{OC}=3\text{ cm}$, $\overline{OD}=4{,}5\text{ cm}$.

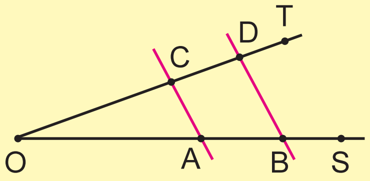


- Увери се дека отсечките OA, OB и OC, OD се пропорционални, т.е. $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OC}:\overline{OD}$.
- Повлечи ги правите AC и BD. Потоа, со помош на два триаголни линијари, провери дали тие прави се паралелни.

- Ако црташе и мереше доволно прецизно, секако заклучи дека AC || BD.

Важи општо!

Ако две прави отсекуваат од краците на некој агол пропорционални отсечки, тогаш тие прави се паралелни.



$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OC}:\overline{OD}$ ☞ AC || BD

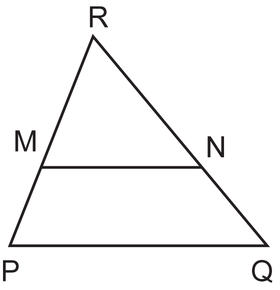
- Ова својство на пропорционалните отсечки е наречено **обратна теорема на Талесовата**.

5. Утврди за кои од следниве должини според цртежот, ќе биде MN || PQ:

а) $\overline{RM}=10$, $\overline{RP}=12$, $\overline{RN}=15$, $\overline{RQ}=18$;

б) $\overline{RP}=14$, $\overline{MP}=4$, $\overline{RQ}=21$, $\overline{NQ}=6$;

в) $\overline{RM}=6$, $\overline{RP}=8$, $\overline{RN}=9$, $\overline{RQ}=14$.



Треба да знаеш:

- да ја искажеш Талесовата теорема и да ја примениш во едноставни задачи;
- да ја искажеш обратната теорема на Талесовата и да ја примениш во едноставни задачи.

Провери се!

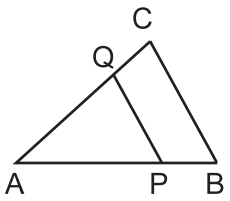
▲ На цртежот е дадено дека PQ || BC. Дополни ги следните тврдења за да бидат точни:

а) $\overline{AP}:\overline{AB}=\square:\square$;

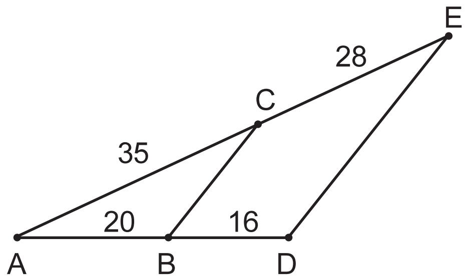
б) $\overline{AP}:\overline{PB}=\square:\square$;

в) $\square:\square=\overline{AQ}:\overline{QC}$;

г) $\overline{AC}:\overline{AQ}=\square:\square$.

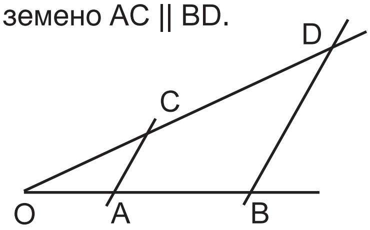


▲ Дали за назначените отсечки на цртежот ќе биде BC || DE?



Задачи

1. На цртежот е земено AC || BD.



Најди ја $\overline{OB}$, ако:

$\overline{OA}=4$ cm, $\overline{OC}=6$ cm, $\overline{OD}=9$ cm.

2. Во $\triangle ABC$ на цртежот е дадено MN || AB.

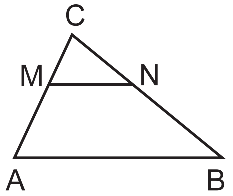
а) Најди ја $\overline{CN}$, ако:

$\overline{CM}=12$; $\overline{CA}=18$; $\overline{BN}=8$;

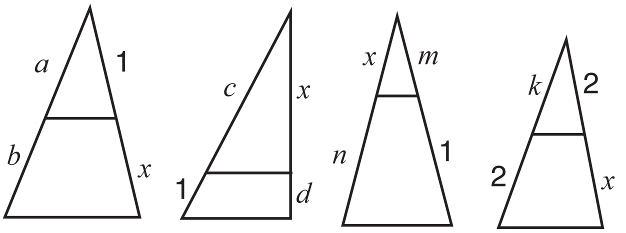
б) Најди ја $\overline{CM}$, ако:

$\overline{CM}=\overline{NB}$, $\overline{MA}=4$ и

$\overline{CN}=9$.

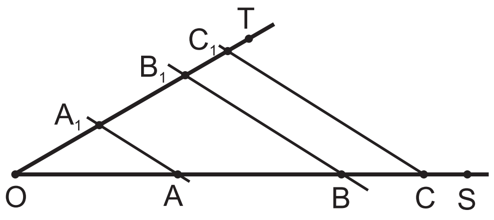


3. Во секој од триаголниците на цртежот е повлечена отсечка паралелна со основата и назначени се должините на некои отсечки.



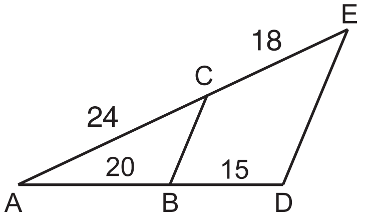
Во сите четири случаи најди го x, сметајќи дека другите букви се дадени броеви.

4. Краците на ∢SOT (на цртежот) се пресечени со паралелните прави AA_1, BB_1 и CC_1, при што $\overline{OA}:\overline{AB}:\overline{BC}=2:3:1$ и $\overline{OA_1}=6$ cm. Најди ги должините на отсечките A_1B_1 и B_1C_1.

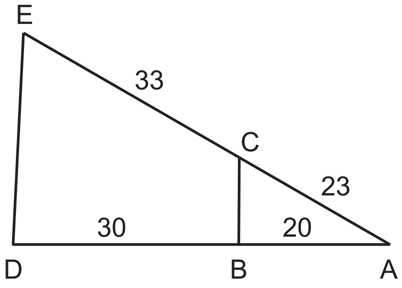


5. За назначените отсечки на цртежот а); б), провери дали ќе биде BC || DE. Образложи го твојот одговор.

а)



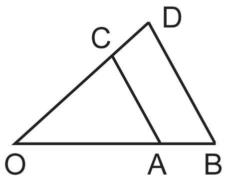
б)



6. Покажи дека од пропорцијата

$\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{CD}$ се

добиваат пропорциите:



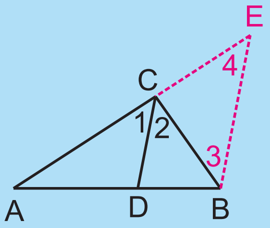
а) $\overline{AB}:\overline{OA}=\overline{CD}:\overline{OC}$;   в) $\overline{OB}:\overline{AB}=\overline{OD}:\overline{CD}$;

б) $\overline{OB}:\overline{OA}=\overline{OD}:\overline{OC}$;   г) $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OC}:\overline{OD}$.

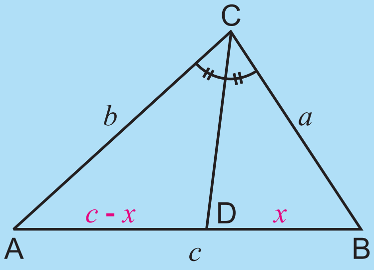
Обиди се! ...
Не е задолжително

7. На цртежот е даден ΔABC во кој CD е симетралата на аголот при темето C. Потоа, продолжена е страната AC и повлечена е правата BE || DC.

а) Докажи дека ΔBEC е рамнокрак со краци $\overline{BC}=\overline{CE}$.



б) Докажи дека симетралата на ∢ACB во ΔABC ја дели спротивната страна AB на два дела што се пропорционални со другите две страни, т.е. $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{CA}:\overline{CB}$, т.е. $(c-x):x=b:a$.

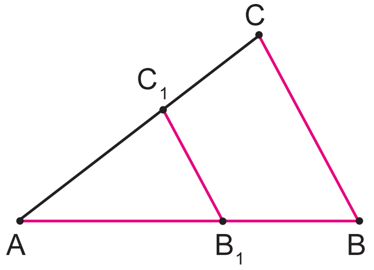


5 ЗАДАЧИ СО ПРИМЕНА НА ТАЛЕСОВАТА ТЕОРЕМА

Потсети се!

- Како гласи Талесовата теорема за пропорционални отсечки?
- Од пропорцијата $a : b = c : x$ изрази ја x со помош на a, b, c.

A **1.** Нацртај ΔABC. Потоа, повлечи права B_1C_1 што ги сече краците на $\sphericalangle A$ и е паралелна со страната BC, како на цртежот.



- Какви се меѓу себе односите $\overline{AB}:\overline{AB_1}$ и $\overline{AC}:\overline{AC_1}$?
- Измери ги внимателно отсечките AB, AB_1; BC, B_1C_1 и потоа пресметај ги односите $\overline{AB}:\overline{AB_1}$ и $\overline{BC}:\overline{B_1C_1}$.
- Што забележуваш?

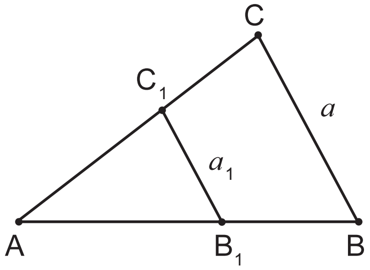
Ако црташе и мереше доволно прецизно, сигурно забележа дека отсечките AB, AB_1 се пропорционални со отсечките BC, B_1C_1, т.е.

$$\boxed{\overline{AB}:\overline{AB_1}=\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=\overline{AC}:\overline{AC_1}}$$

Важи општо!

Ако во еден триаголник се повлече права што е паралелна на една страна и ги сече другите две страни на триаголникот, тогаш се добива нов триаголник чиишто страни се пропорционални на страните од дадениот триаголник.

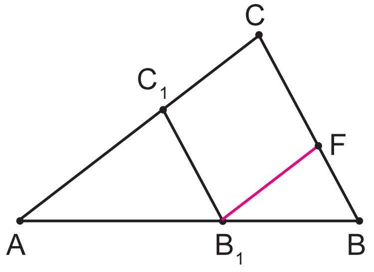
2. Обиди се да го докажеш тврдењето во задачата 1, со примена на Талесовата теорема.

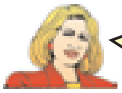


Дадено: во ΔABC, правата $B_1C_1 \parallel BC$ (како на цртежот).

Докажи дека: $\boxed{\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}},}$ т.е. $\boxed{\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{c}{c_1},}$

каде што: $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{B_1C_1}=a_1$, $\overline{AC_1}=b_1$, $\overline{AB_1}=c_1$.





Дадениот цртеж е дополнет со повлекување на правата B_1F паралелна со AC. Како ќе ја примениш Талесовата теорема за да ги докажеш дадените равенства?

Ќе ги запишам пропорциите од пропорционалните отсечки што се добиени за аглите: $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$. Потоа ќе извршам споредување.

Спореди го твоето размислување и решение со даденото.

☞ $\sphericalangle BAC$ е пресечен со $B_1C_1 \parallel BC$, па според Талесовата теорема: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}}$ (1)

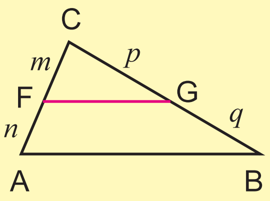
☞ $\sphericalangle ABC$ е пресечен со $B_1F \parallel AC$, па според Талесовата теорема: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{FC}}$ (2)

☞ Четириаголникот B_1FCC_1 е паралелограм (зошто?), па: $\overline{FC} = \overline{B_1C_1}$; по заменувањето во (2), се добива $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$. (3) ☞ Од (1) и (3): $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}}$, т.е. $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{c}{c_1} = \dfrac{b}{b_1}$.

■ Ова тврдење се вика уште **Талесова теорема за триаголник**.

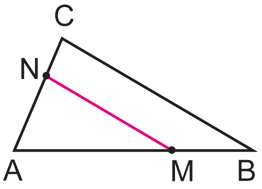
Важи и обратно тврдење!

Ако една права при пресекувањето на две страни на триаголникот ги разделува нив на пропорционални отсечки, тогаш таа права е паралелна со третата страна на триаголникот.



$m : n = p : q$ ☞ $FG \parallel AB$

3. Во ΔABC на цртежот $MN \parallel BC$.



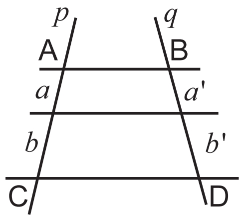
● Најди го односот $\overline{BC} : \overline{MN}$, ако $\overline{AM} = 12$, $\overline{AB} = 18$.

● Најди ја $\overline{MN}$, ако $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 10$ и M е средина на AB.

☞ Провери го решението за $\overline{MN}$ според својството на средната линија во триаголник!

4. Правите p и q на цртежот се пресечени со три меѓусебно паралелни прави. Покажи дека соодветните отсечки a, a' се пропорционални со отсечките b, b', т.е.

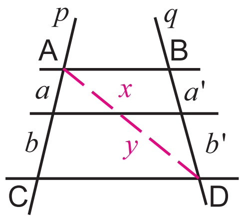
$$a : a' = b : b'.$$



■ Проследи го решението на задачата.

☞ Повлечи ја отсечката AD, како на цртежот, и воочи дека краците на $\sphericalangle CAD$ и на $\sphericalangle ADB$ се пресечени со по две паралелни прави, па:

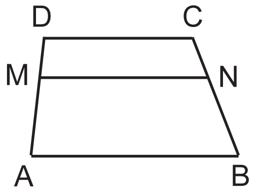
$$a : b = x : y \quad \text{и} \quad a' : b' = x : y.$$



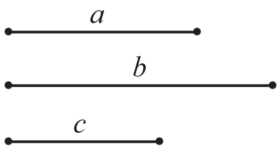
☞ Бидејќи десните страни на равенствата им се еднакви, можеш да заклучиш дека $a : b = a' : b'$ т.е. $a : a' = b : b'$.

● Според претходниот цртеж, дадено е $a = 3$, $b = 5$ и $b' = 7$. Најди ја должината на отсечката b'.

5. За трапезот ABCD на цртежот е дадено: $MN \parallel AB$, $\overline{AD} = 18$ cm, $\overline{BC} = 24$ cm и $\overline{DM} = 3$ cm Најди ги $\overline{BN}$ и $\overline{NC}$.



6. Дадени се отсечките a, b, c како на цртежот.



- Најди отсечка x таква што $a : b = c : x$, т.е. *конструирај ја четвртата геометриска пропорционала* на отсечките a, b, c.

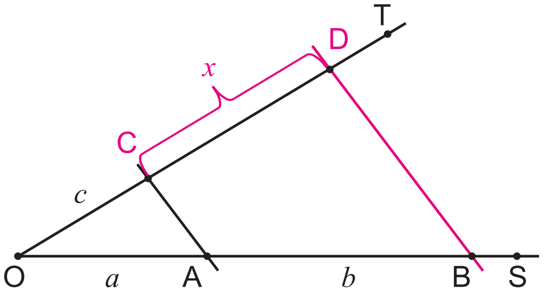
- Ако не можеш сам да ја решиш задачата, ќе ти помогнат следните упатства.

☞ Потсети се на Талесовата теорема.

☞ Нацртај агол SOT и нанеси ги отсечките $a=\overline{OA}$, $b=\overline{AB}$ и $c=\overline{OC}$, како на цртежот.

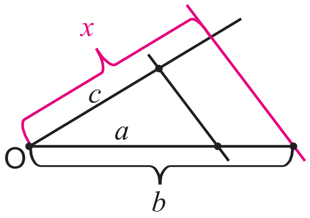
☞ Повлечи права низ B, паралелна со AC и пресекот означи го со D.

☞ $x=\overline{CD}$ е бараната отсечка. (Зошто?)



- Четвртата геометриска пропорционала x на отсечките a, b, c може да се добие и според другиов цртеж.

- Разгледај го цртежов и образложи ја постапката.



7. За отсечките a = 4 cm, b = 6 cm и c = 5 cm, конструирај ја четвртата геометриска пропорционала: а) $x=\frac{bc}{a}$; б) $x=\frac{ac}{b}$.

- Прво согледај дека од $x=\frac{bc}{a}$ можеш да ја составиш пропорцијата $x : c = b : a$.

8. Нацртај две отсечки a = 3 cm и b = 2 cm. Конструирај отсечка x, таква што $x = ab$.

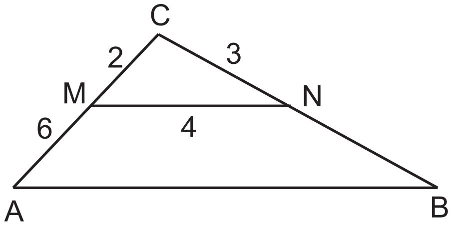
- Прво согледај дека од $x = ab$ можеш да ја составиш пропорцијата $1 : a = b : x$; потоа изведи ја конструкцијата.

Треба да знаеш:

- да ја искажеш Талесовата теорема за триаголник и да ја примениш во едноставни задачи;
- да конструираш четврта геометриска пропорционала на три отсечки.

Провери се!

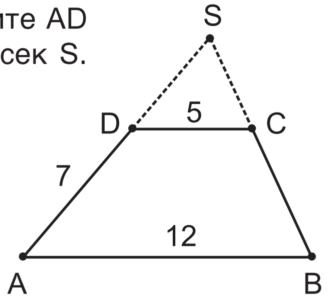
- За ΔABC е дадено: MN || AB. Најди ги неговите страни според податоците на цртежот.
- Објасни ја постапката за конструирање четврта геометриска пропорционала x на три дадени отсечки a, b, c.



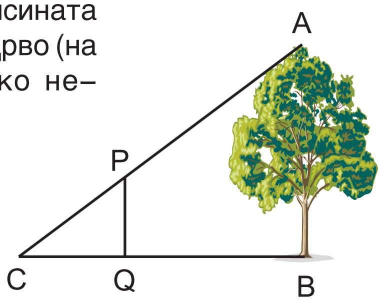
Задачи

1. Во трапезот ABCD на цртежот, со основи $\overline{AB}=12$, $\overline{CD}=5$ и крак $\overline{AD}=7$, продолжени се краците AD и BC до нивниот пресек S.

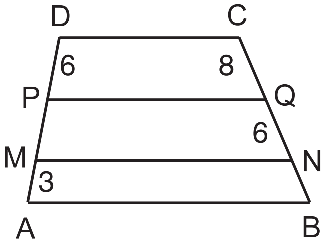
Најди ја $\overline{SD}$.



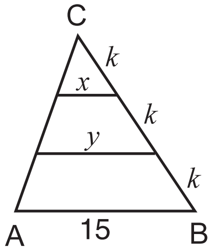
2. Одреди ја висината AB на едно дрво (на цртежот) ако неговата сенка BC е 20 m, а во исто време, сенката на стапот PQ од 1 m е долга 1,4 m.



3. Во трапезот ABCD на цртежот, MN || PQ || AB. Најди ги должините на краците AD и BC според податоците на цртежот.



4. Во ΔABC на цртежот страната BC е поделена на три еднакви делови и низ делбените точки се повлечени прави, паралелни со страната AB, чијашто должина е 15 cm. Најди ја должината на секоја од отсечките, зафатени во триаголникот.



5. Конструирај ја четвртата геометриска пропорционала на отсечките a = 4 cm, b = 5 cm, c = 3 cm ($a : x = b : c$).

6. Нацртај три отсечки a, b, c. Потоа, конструирај отсечка x, таква што:

а) $x : a = b : c$; б) $a : x = b : c$;

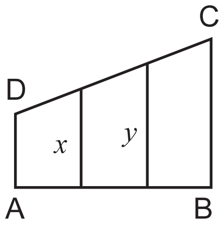
в) $a : b = x : c$.

7. Нацртај отсечки a и b. Потоа конструирај отсечка x, таква што $x = a^2$.

8. Нацртај отсечки a и b. Потоа конструирај отсечка x, таква што

а) $x=\dfrac{a^2}{b}$; б) $x=\dfrac{b^2}{a}$.

9. Страната DC на трапезот ABCD со основи $\overline{AD}=8$ и $\overline{BC}=20$, поделена е на три еднакви делови и низ делбените точки се повлечени прави паралели со основите (како на цртежот). Најди ги должините x и y на отсечките зафатени во трапезот.



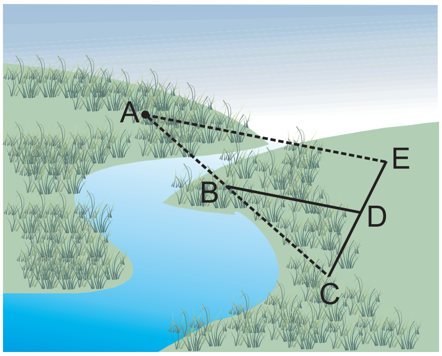
■ *Помош.* Повлечи ја правата DM паралелна со AB и разгледај го ΔDMC (потсети се како ја реши задачата 4).

10. На цртежот е претставена ситуација на теренот со недостапна точка A и достапна точка B.

а) Најди го недостапното растојание $\overline{BA}$.

б) Пресметај го $\overline{BA}$, ако се измерени должините: $\overline{BC}=100$ m, $\overline{CE}=250$ m и $\overline{CD}=80$ m.

в) Најди го растојанието $\overline{EA}$, ако се измерени: $\overline{CE}=250$ m, $\overline{CD}=80$ m и $\overline{DB}=96$ m.

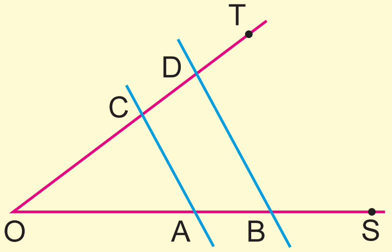


СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

6 СЛИЧНИ ФИГУРИ. СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Потсети се!

- Краците на аголот SOT се пресечни со паралелните прави AC и BD.

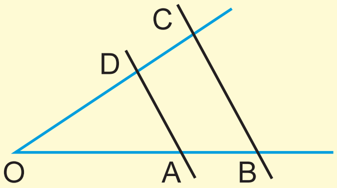


- Според цртежот, запиши размер на отсечки што е еднаков со размерот:

а) $\overline{OA}:\overline{AB}$; б) $\overline{OC}:\overline{OD}$.

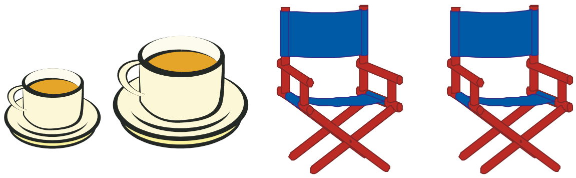
- Според која теорема ги запиша размерите?

- На цртежот важи пропорционалноста на отсечките: $\overline{OA}:\overline{AB}=\overline{OD}:\overline{DC}$.



- Каква положба имаат правите AD и BC?
- Какви се по големина аглите:
а) $\sphericalangle OAD$ и $\sphericalangle OBC$; б) $\sphericalangle ODA$ и $\sphericalangle OCB$?

A Во секојдневниот живот многу често среќаваме предмети што имаат иста форма, а различна или иста големина: автомобил и неговиот модел; две чаши; два стола итн.



За две геометриски фигури што имаат сосема иста форма, а различна или иста големина, обично, велиме дека се **слични**.

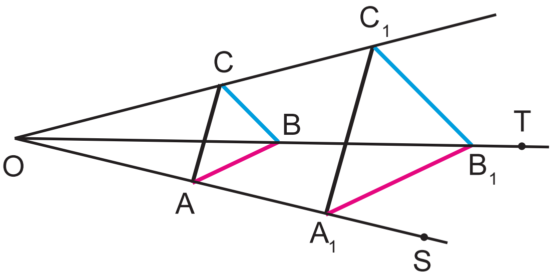
1. За кои од следните фигури можеме да речеме дека се слични:

- два квадрата;
- два круга;
- квадрат и круг?

2. Дадени се две географски карти на Македонија. Првата со размер 1 : 1000000, а втората со размер 1 : 500000.

- Дали тие карти се слични?
- На првата карта, растојанието од Скопје до Куманово е 4 cm. Колкаво е растојанието од Скопје до Куманово на втората карта?
- Кој е односот на растојанието Скопје–Куманово од првата карта со растојанието Скопје–Куманово на втората карта?
- Каков е односот на растојанието меѓу кои било две места на првата карта со растојанието меѓу соодветните две места на втората карта?

3. Разгледај го цртежот на кој темињата на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ лежат на полуправи со почетна точка O и образуваат пропорционални отсечки: $\overline{OA}:\overline{OA_1}=1:2$; $\overline{OB}:\overline{OB_1}=1:2$; $\overline{OC}:\overline{OC_1}=1:2$.



За триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ ќе разликуваме: соодветни темиња, соодветни агли и соодветни страни, т.е.

- ☞ *соодветни темиња* се: A и A_1; B и B_1; C и C_1;
- ☞ *соодветни агли* се: ∢A и ∢A_1, ∢B и ∢B_1, ∢C и ∢C_1;
- ☞ *соодветни страни* се: AB и A_1B_1; BC и B_1C_1; AC и A_1C_1.

● Покажи дека соодветните страни на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се паралелни, т.е.

$$AB \parallel A_1B_1;\ BC \parallel B_1C_1 \text{ и } AC \parallel A_1C_1.$$

● Покажи дека соодветните агли на триаголниците се еднакви, т.е.

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1;\quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_1 \quad \text{и } \sphericalangle C = \sphericalangle C_1.$$

● Покажи дека соодветните страни на триаголниците се пропорционални, т.е.

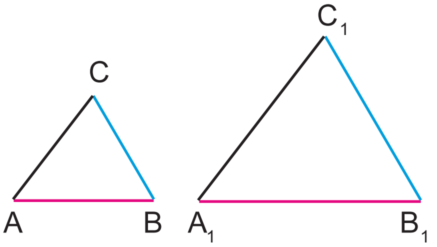
$$\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=\overline{AC}:\overline{A_1C_1}=1:2.$$

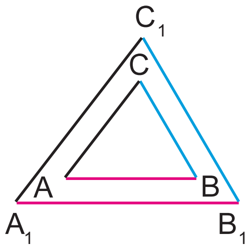
Спореди го твоето решение на задачата со даденото.

- ☞ Бидејќи $\overline{OA}:\overline{OA_1}=\overline{OB}:\overline{OB_1}$, од обратната теорема на Талесовата, следува дека $AB \parallel A_1B_1$. На ист начин можеш да покажеш дека $BC \parallel B_1C_1$ и $AC \parallel A_1C_1$.
- ☞ Бидејќи $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$, следува дека ∢A = ∢A_1, како агли со паралелни краци. На ист начин можеш да покажеш дека ∢B = ∢B_1 и ∢C = ∢C_1.
- ☞ Потсети се на Талесовата теорема: ако краците на аголот SOT се пресечени со паралелните прави AB и A_1B_1, тогаш соодветните отсечки AB и A_1B_1 се пропорционални со отсечките OA и OA_1, т.е. $\overline{OA}:\overline{OA_1}=\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=1:2$. Можеш да покажеш дека ист размер имаат и другите соодветни страни на триаголниците, т.е.

$$\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=\overline{AC}:\overline{A_1C_1}=1:2.$$

За триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ покажа дека соодветните агли им се еднакви, а соодветните страни им се пропорционални. Тие можат да бидат дадени и во друга положба, како на цртежот, десно.





Ако триаголникот ABC го нацрташ на проѕирна хартија, можеш да го поставиш во областа на $\Delta A_1B_1C_1$ (како на цртежот), така што соодветните страни да им се паралелни. Воочи дека ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ имаат иста форма, но различна големина, т.е. дека тие се **слични триаголници**.

Запомни!

- За два триаголници се вели дека се **слични**, ако соодветните агли им се еднакви и соодветните страни им се пропорционални.
- За сличните триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ запишуваме: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.
  Се чита: ΔABC е **сличен** со $\Delta A_1B_1C_1$.
- Кој е коефициентот на пропорционалноста на страните кај сличните триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ во задачата 3?
- Во задачата **3** согледа дека коефициентот на пропорционалноста на страните на сличните триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ е 1 : 2, т.е. $\frac{1}{2}$.

- Коефициентот на пропорционалноста на соодветните страни на два слични триаголници ($\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$) се вика и **коефициент на сличноста**.
- Ако запишеш $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, тоа ќе значи дека соодветните темиња се: A и M, B и N, C и P.

4. Во задачата 3 согледа дека $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ и коефициентот на сличноста е $\frac{1}{2}$.

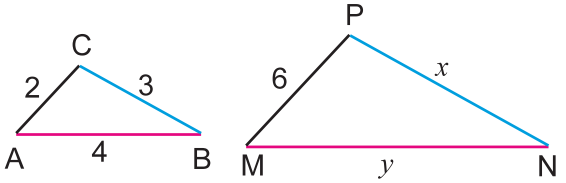
- Зошто $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ и кој е коефициентот на сличноста?

Треба да знаеш:

- ако $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$, тогаш $\overline{AB} : \overline{XY} = \overline{BC} : \overline{YZ} = \overline{AC} : \overline{XZ} = k$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle X$, $\sphericalangle B = \sphericalangle Y$, $\sphericalangle C = \sphericalangle Z$;
- да го одредиш коефициентот на сличноста на два слични триаголници.

Провери се!

- На цртежот: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.
- Запиши ги соодветните:
  а) страни; б) агли.
- Одреди го коефициентот на сличноста.
- Одреди ги x и y.



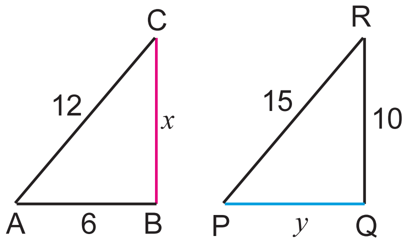
Задачи

1. Даден е: $\Delta ABC \sim \Delta RST$.
Запиши ги соодветните:
а) страни, б) агли.

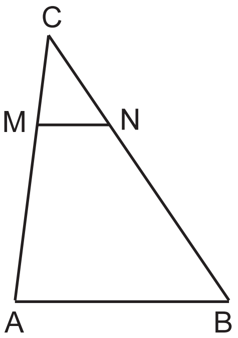
2. Нацртај два рамнострани триаголника, првиот со страна a = 3 cm, а вториот со страна 4 cm.

- Покажи дека тие се слични.
- Одреди го коефициентот на сличноста.

3. На цртежот, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ и назначени се должините на страните. Одреди ги x и y.



4. На цртежот, $\Delta ABC \sim \Delta MNC$. На што се еднакви $\overline{CB}$ и $\overline{MN}$, ако $\overline{CM}=5$; $\overline{CN}=6$; $\overline{AB}=12$ и $\overline{CA}=15$?



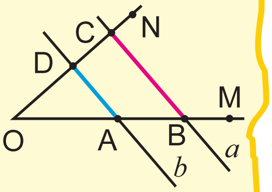
5. Од тоа што $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$, дали следува дека $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$? Образложи.

6. Нека M и N се средини на страните AC и BC во триаголникот ABC. Покажи дека $\Delta MNC \sim \Delta ABC$.

7 ПРВ ПРИЗНАК ЗА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Потсети се!

- За да утврдиш дали два триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ се слични треба да провериш дали нивните соодветни агли се еднакви и соодветните страни се пропорционални т.е. $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$ и $\overline{AB}:\overline{A_1B_1}=\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=\overline{AC}:\overline{A_1C_1}$.
- Краците на аголот MON се пресечени со паралелните прави *a* и *b*, така што $\overline{OB}:\overline{OA}=\overline{OC}:\overline{OD}=2:1$
- Воочи ги триаголниците OAD и OBC, а потоа:



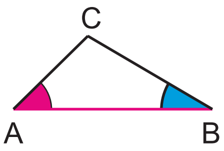
- определи го односот на страните BC и AD;
- определи какви се меѓу себе соодветните агли на триаголниците.
- Дали $\Delta OBC \sim \Delta OAD$?

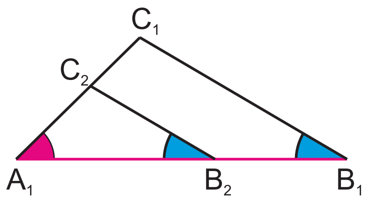
1. Нацртај ΔABC и отсечка A_1B_1 што е трипати подолга од страната AB. Потоа, нацртај триаголник $A_1B_1C_1$ со страна A_1B_1, $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle A$ и $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle B$.

Дали соодветните внатрешни агли на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се еднакви? Зошто?

Соодветните агли се еднакви;
- $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, по конструкција;
- $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$, бидејќи $\sphericalangle C = 180^\circ - (\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 180^\circ - (\sphericalangle A_1 + \sphericalangle B_1) = \sphericalangle C_1$.

- Провери со мерење дали соодветните страни на $\Delta A_1B_1C_1$ со ΔABC се пропорционални. Одреди го коефициентот на пропорционалноста.
- Обиди се да образложиш дека соодветните страни на $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC се пропорционални и дека $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.





Спореди го твоето решение со даденото.

☞ На цртежот се дадени ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, така што $\overline{A_1B_1}=3\overline{AB}$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$.

☞ За да покажеш дека $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ треба да провериш дали се исполнети шесте барања за слични триаголници, т.е.

$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$ и $\overline{A_1B_1}:\overline{AB}=\overline{B_1C_1}:\overline{BC}=\overline{A_1C_1}:\overline{AC}$.

☞ Ти покажа дека соодветните агли на триаголниците се еднакви.

☞ Претпостави дека ΔABC е поместен во $\Delta A_1B_1C_1$, така што: темето A се совпаѓа со A_1, B со B_2 и темето C со C_2; $\sphericalangle A$ се совпаѓа со $\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B$ со $\sphericalangle A_1B_2C_2$ и $\sphericalangle C$ со $\sphericalangle B_2C_2A_1$.

☞ Бидејќи $\sphericalangle A_1B_2C_2 = \sphericalangle B_1$, следува дека $B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Според цртежот, со помош на Талесовата теорема за пропорционални отсечки, имаш покажано дека $\overline{A_1B_1}:\overline{A_1B_2}=\overline{A_1C_1}:\overline{A_1C_2}=\overline{B_1C_1}:\overline{B_2C_2}=3:1$, т.е. $\overline{A_1B_1}:\overline{AB}=\overline{B_1C_1}:\overline{BC}=\overline{A_1C_1}:\overline{AC}$.
Можеш да заклучиш дека $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

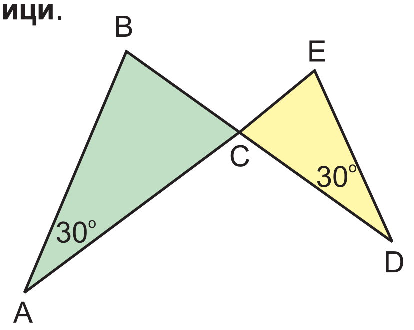
■ Воочи дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и ABC што ги нацрта имаат по два агли соодветно еднакви и ти покажа дека $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. Според тоа, за да утврдиш дали два триаголници се слични доволно е да провериш дали тие имаат два еднакви соодветни агли.

Запомни!

■ Два триаголници се слични, ако два агли од едниот триаголник се еднакви со два агли од другиот триаголник.

■ Ова тврдење е наречено **прв признак за слични триаголници**.

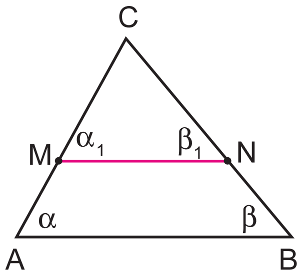
2. На цртежот е дадено: $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 30^\circ$ и точката C е пресек на отсечките AE и BD. Докажи дека $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.



Б **3.** Во ΔABC е повлечена отсечка MN паралелна со AB.

● Покажи дека $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$.

● Докажи дека $\Delta ABC \sim \Delta MNC$.



■ Воочи го следното тврдење.

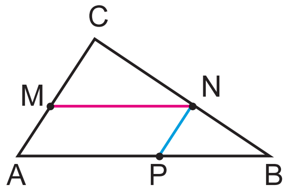
■ Ако во еден триаголник е повлечена права што е паралелна со една од страните и ги сече другите две страни, тогаш се добива триаголник што е сличен на дадениот.

● Спореди го ова тврдење со Талесовата теорема за триаголник.

4. Во ΔABC на цртежот, повлечени се отсечките: $MN \parallel AB$ и $NP \parallel AC$.

● Колку триаголници воочуваш?

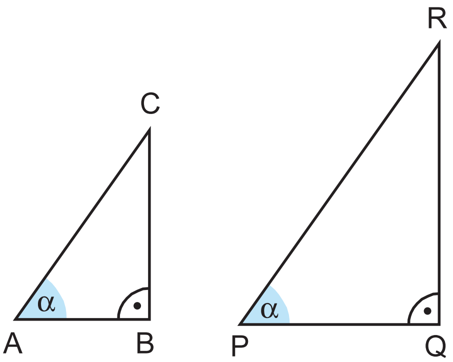
● Запиши кои триаголници се слични меѓу себе.



Воочи дека:

- Секој триаголник е сличен сам на себе.
- Два складни триаголника се слични.

- Колкав е нивниот коефициент на сличност?



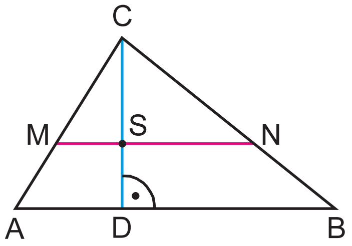
5. На цртежот се дадени правоаголните триаголници ABC и PQR, така што $\sphericalangle A = \sphericalangle P = \alpha$.

- Покажи дека $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

- Воочи дека триаголниците имаат по два агли соодветно еднакви: $\sphericalangle A = \sphericalangle P$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle Q = 90^o$.

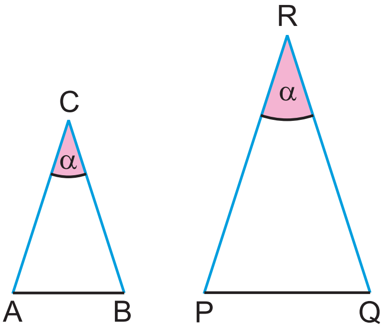
- Според првиот признак за слични триаголници следува:

☞ Два правоаголни триаголници се слични ако еден остар агол од едниот е еднаков со еден остар агол од другиот триаголник.



6. Во триаголникот ABC на цртежот е повлечена висината CD и отсечката MN || AB.

- Колку правоаголни триаголници можеш да воочиш и кои од нив се слични меѓу себе?



7. На цртежот се дадени два рамнокраки триаголници ABC и PQR, на кои аглите при врвот им се еднакви, т.е. $\sphericalangle C = \sphericalangle R = \alpha$.

- Покажи дека $\sphericalangle A = \sphericalangle P$.
- Покажи дека $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

Општо

- Два рамнокраки триаголници се слични, ако аголот при врвот на едниот триаголник е еднаков со аголот при врвот на другиот траголник.

8. Нацртај два рамнокраки траголници ABC и $A_1B_1C_1$ со основи AB и A_1B_1 соодветно, при што $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$.

- Покажи дека $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.
- Искажи друго тврдење за сличност на два рамнокраки траголници.

Треба да знаеш:

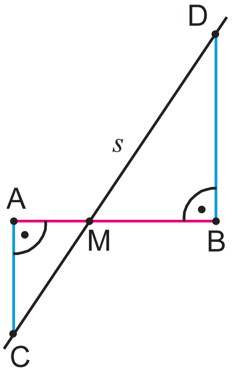
- да го искажеш првиот признак за сличност на триаголници;
- кои се доволни услови за сличност на два правоаголни, односно два рамнокраки триаголници;
- да утврдиш сличност на два триаголници;
- да одредиш непозната страна кај слични триаголници.

Провери се!

▲ На краевите на отсечката AB се повлечени отсечките

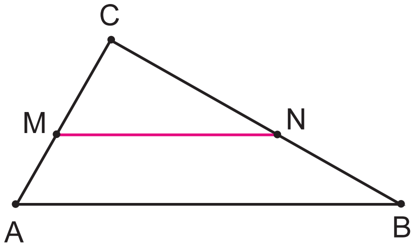
$\overline{AC} = 3$ cm и

$\overline{BD} = 5$ cm, нормални на AB. Во кој однос правата *s* ја дели отсечката AB?



Задачи

1. На цртежот е даден триаголник ABC и MN || AB.



- Одреди го размерот:

а) Ако $\overline{CM}:\overline{MA} = 3:2$, тогаш

$\overline{CM}:\overline{CA} =$ □;

б) Ако $\overline{CM}:\overline{MA} = 7:3$, тогаш

$\overline{CN}:\overline{NB} =$ □;

в) Ако $\overline{CM}:\overline{CA} = 3:4$, тогаш

$\overline{AB}:\overline{MN} =$ □.

2. Даден е ΔABC со страни $\overline{AB} = 20$, $\overline{BC} = 12$ и $\overline{CA} = 16$. Низ точката M што лежи на страната BC е повлечена права паралелна со AB и ја сече AC во точката N. Одреди $\overline{MN}$, ако $\overline{CM} = 3$.

3. Во трапезот ABCD, со основи AB и CD дијагоналите AC и BD се сечат во точката S.

а) Докажи дека $\Delta ABS \sim \Delta CDS$.

б) Одреди ја $\overline{CD}$, ако $\overline{AB} = 12$, $\overline{AS} = 6$ и $\overline{SC} = 3$.

4. Конструирај триаголник $A_1B_1C_1$ сличен на ΔABC со страни 4, 5, 6 ако:

а) најмалата страна му е 5;

б) коефициентот на сличноста е $\frac{3}{4}$.

5. Одреди ја висината на едно дрво чијашто сенка е долга 10 m, а во исто време, човек висок 1,7 m има сенка долга 1 m.

8 ВТОР И ТРЕТ ПРИЗНАК ЗА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

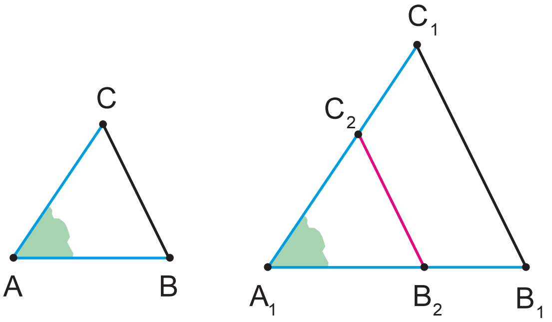
Потсети се!

- Кои шест барања треба да бидат исполнети за два триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ да бидат слични?
- Кои се доволни услови, според првиот признак за сличност на триаголници, за да биде $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$?

A **1.** Нацртај ΔABC со $\sphericalangle A = 60^\circ$ и страни $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{AC} = 2$cm. Потоа нацртај $\Delta A_1B_1C_1$ со $\sphericalangle A_1 = 60^\circ$ и страни $\overline{A_1B_1} = 3\overline{AB}$, $\overline{A_1C_1} = 3\overline{AC}$.

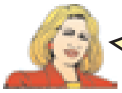
- Измери ги и спореди ги: $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle C_1$, $\overline{BC}$ и $\overline{B_1C_1}$.

  Што заклучи?



- На цртежот се дадени триаголниците според условите на задачата. Претпостави дека ΔABC е поместен така што $\sphericalangle A$ се совпаѓа со $\sphericalangle A_1$ и ΔABC се совпаѓа со триаголникот $A_1B_2C_2$.

- Одреди ги односите: $\overline{A_1B_1} : \overline{A_1B_2}$; $\overline{A_1C_1} : \overline{A_1C_2}$ и $\overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_2}$.
- Покажи дека $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$ и $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$.
- Зошто $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$?



Кои соодветни елементи на двата триаголници се дадени и дали е тоа доволно да покажеш дека триаголниците се слични?

Дадени се по две соодветно пропорционални страни и еднакви агли што ги образуваат тие страни. Тоа е доволно да се покаже дека триаголниците се слични.

- Воочи дека може да се искаже признак за слични триаголници. Тој е наречен **втор признак** за слични триаголници.

- Ако две страни од еден триаголник се соодветно пропорционални на две страни од друг триаголник и аглите што ги образуваат тие страни се еднакви, тогаш тие триаголници се слични.

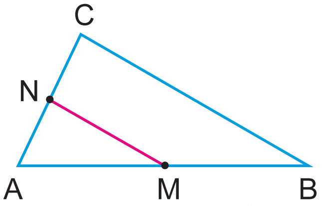
2. Провери дали се слични триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$, ако:

б) $\overline{BC} = 20$ $\overline{AC} = 22$ $\sphericalangle C = 50^\circ$; $\overline{B_1C_1} = 30$; $\overline{A_1C_1} = 33$ $\sphericalangle C_1 = 50^\circ$.

б) $\overline{BC} = 25$, $\overline{AC} = 70$ $\sphericalangle C = 70^\circ$; $\overline{B_1C_1} = 50$; $\overline{A_1C_1} = 139$, $\sphericalangle C_1 = 70^\circ$.

3. Во ΔABC, на цртежот, точката M е средина на страната AB, а N средина на AC.

- Докажи дека $\Delta ABC \sim \Delta AMN$.
- Покажи дека средната линија MN на ΔABC е половина од должината на соодветната страна BC.



4. Нацртај ΔABC со страни $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AC} = 4$ cm, а потоа $\Delta A_1B_1C_1$ со двапати помали страни од ΔABC.

- Измери ги и спореди ги аглите: $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle C_1$. Што заклучи?
- Дали $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$?

Соодветните страни на два триаголници се пропорционални. Дали е тоа доволно за да утврдиш дека тие се слични?

За два триаголници да се слични, доволно е соодветните страни да се пропорционални, бидејќи тогаш и соодветните агли се еднакви.

Воочи дека може да се искаже уште еден признак за слични триаголници. Тој е наречен **трет признак** за слични триаголници.

Ако трите страни од едниот триаголник се пропорционални со соодветните страни од другиот триаголник, тогаш тие триаголници се слични.

3. Дали се слични триаголниците со страни:
а) 3, 4, 5 и 6, 8, 10; б) 15, 9, 12 и 4, 3, 5; в) 2, 2, 3 и 6,6, 8; г) 2; 3; 4 и 3; 6; 4,5?

Треба да знаеш:

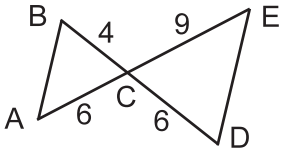
- да ги искажеш вториот и третиот признак за слични триаголници;
- да утврдиш сличност на два триаголници според вториот или третиот признак за слични триаголници;
- да одредиш непозната страна кај слични триаголници.

Задачи

1. Нацртај ΔABC и ΔPQR, а потоа запиши кои услови треба да ги исполнуваат за да биде $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ според:

а) вториот признак; б) третиот признак.

2. Покажи дека триаголниците ABC и EDC се слични и според кој признак.



Провери се!

- Страните на ΔABC се: $a = 6$ cm, $b = 4$ cm и $c = 3$ cm. Одреди го периметарот на $\Delta A_1B_1C_1$ што е сличен на ΔABC, а неговата најмала страна е 6 cm.
- Провери дали се слични ΔABC и ΔPQR, ако: $\sphericalangle A = 55^\circ$, $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\sphericalangle P = 55^\circ$, $\overline{PR} = 12$ cm, $\overline{PQ} = 18$ cm.

3. Страните на еден триаголник се 6, 5 и 4. Најголемата страна на друг триаголник, сличен со дадениот е 9. Најди го периметарот на другиот триаголник.

4. Дали се слични два триаголници, ако два агли од едниот триаголник се по 60° и 70°, а два агли од другиот триаголник се по 50° и 80°.

5. Аголот при врвот на еден рамнокрак триаголник е 70°. Аголот при основата на друг рамнокрак триаголник е 55°. Докажи дека тие триаголници се слични.

6. Образложи дали $\Delta ABC \sim \Delta MNR$, ако:

$\sphericalangle BAC = 50^{\circ}$, $\overline{AB} = 4\text{ cm}$, $\overline{AC} = 6\text{ cm}$;

$\sphericalangle NMR = 50^{\circ}$, $\overline{MN} = 30\text{ cm}$, $\overline{MR} = 45\text{ cm}$.

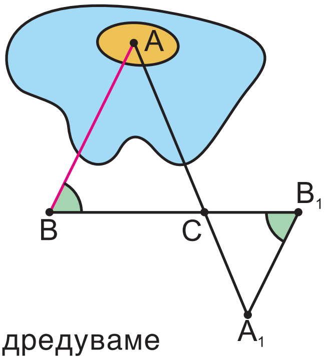
7. Провери дали триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се слични, ако нивните страни се:

а) 15, 17, 24 и 4,5; 5,1; 7,2;

б) 22; 8,2; 20 и 55; 20,5; 50.

8. Како ќе одредиш растојание од точката A до точка B, ако точката A е недостапна?

■ Воочи го цртежот.



☞ На терен, избираме точки C и B_1 на иста права со B, така што $\overline{BC} = m \cdot \overline{CB_1}$.

☞ Со инструмент одредуваме агол B_1 еднаков со $\sphericalangle B$.

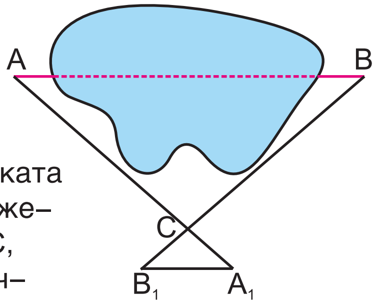
☞ На кракот од $\sphericalangle B_1$ одредуваме точка A_1, така што точките A, C и A_1 да лежат на иста права.

☞ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$. Зошто?

● Одреди го растојанието од A до B ако $\overline{BC} = 40\text{ m}$, $\overline{CB_1} = 5\text{ m}$, а $\overline{B_1A_1} = 6{,}5\text{ m}$.

9. Како ќе го пресметаш растојанието меѓу достапните точки A и B, на терен, ако меѓу точките A и B има недостапен дел.

■ Воочи го цртежот.



☞ Избрана е точката C и на продолженијата AC и BC, избрани се точките A_1 и B_1, така што $\overline{AC} = n \cdot \overline{CA_1}$ и $\overline{BC} = n \cdot \overline{CB_1}$.

☞ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$. Зошто?

● Одреди го растојанието од A до B ако $\overline{AC} = 10\text{ m}$, $\overline{CA_1} = 2\text{ m}$ и $\overline{A_1B_1} = 3{,}5\text{ m}$.

9 ОДНОС НА ПЕРИМЕТРИТЕ И ОДНОС НА ПЛОШТИНИТЕ НА ДВА СЛИЧНИ ТРИАГОЛНИЦИ

Потсети се!

● Пресметај го периметарот на триаголник со страни: $a = 15$ cm, $b = 9$ cm и $c = 8$ cm.

● Пресметај ја плоштината на триаголник со страна $a = 10$ cm и соодветна висина $h = 6$ cm.

■ Ако три и повеќе размери се еднакви, тогаш тие можат да се запишат во форма на продолжена пропорција, на пример:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}, \text{ т.е. } a : b : c = a_1 : b_1 : c_1.$$

■ За пропорцијата важи:

$$\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

A **1.** Страните на еден триаголник ABC се $a = 6$ cm, $b = 8$ cm и $c = 12$ cm. Најмалата страна на друг триаголник $A_1B_1C_1$, сличен на ΔABC е $a_1 = 3$ cm.

● Одреди го коефициентот на сличноста на триаголниците.

● Одреди ги страните b_1 и c_1 на $\Delta A_1B_1C_1$.

● Одреди ги периметрите на ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.

● Спореди го односот на периметрите на триаголниците со односот на соодветните страни. Што заклучи?

■ Спореди го твоето решение со даденото.

☞ Познати се две соодветни страни a и a_1 на сличните триаголници.

Според тоа $\frac{a}{a_1}=\frac{6}{3}=2$, т.е. $k = 2$.

☞ $\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k$;

☞ $b = kb_1$;
$8 = 2b_1$;
$b_1 = 4$ cm;

☞ $c = kc_1$;
$12 = 2c_1$;
$c_1 = 6$ cm.

■ Воочи дека периметарот L на ΔABC е: $L = 6 + 8 + 12$, т.е. $L = 26$ cm, а периметарот L_1 на $\Delta A_1B_1C_1$ е: $L_1 = 3 + 4 + 6$, т.е. $L_1 = 13$ cm.

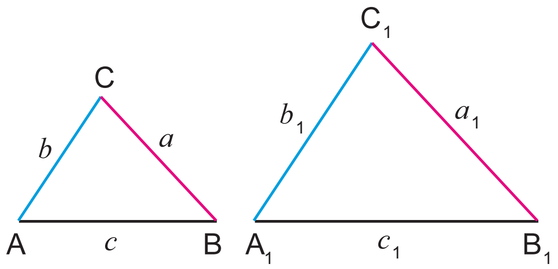
☞ $\frac{26}{13}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{12}{6}=2$. Согледа дека односот на периметрите на сличните триаголници е еднаков со односот на соодветните страни.

Важи општо!

■ Ако $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, тогаш $\frac{L}{L_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$.

☞ **Доказ.** Од сличноста на ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ следува: $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$. Според својството на продолжена пропорција следува:

$$\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}, \text{ т.е. } \frac{L}{L_1}=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}.$$



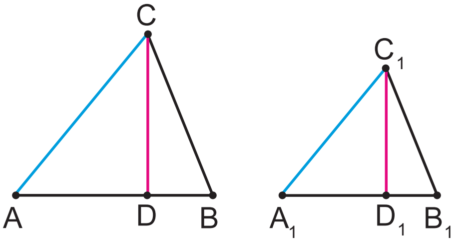
Запомни

■ Периметрите на два слични триаголници се однесуваат како нивните соодветни страни.

2. Страните на ΔABC се $a = 6$, $b = 15$ и $c = 18$, а $\Delta A_1B_1C_1$ е сличен на дадениот со коефициент на сличност $k=\frac{1}{3}$. Одреди го периметарот L_1 на $\Delta A_1B_1C_1$.

Б **3.** Триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$, на цртежот, се слични. Повлечени се соодветните висини CD и C_1D_1.

- Покажи дека $\Delta ADC \sim \Delta A_1D_1C_1$.
- Покажи дека соодветните висини CD и C_1D_1 се пропорционални со соодветните страни на триаголниците.



- Спореди го твоето решение со даденото.

☞ Воочи дека правоаголните триаголници ADC и $A_1D_1C_1$ имаат по еден остар агол еднаков, т.е. $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ (бидејќи $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$).

☞ Можеш да заклучиш дека $\Delta ADC \sim \Delta A_1D_1C_1$. Од тоа следува: $\overline{CD}:\overline{C_1D_1}=\overline{AC}:\overline{A_1C_1}=k$.

☞ Од сличноста на ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ следува: $\frac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}=k$.

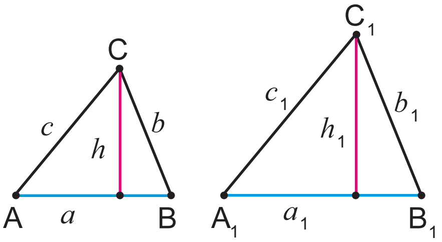
- Кај сличните триаголници соодветните висини се пропорционални со соодветните страни.

Општо

- Кај два слични триаголници соодветните висини, тежишни линии, симетрали на агли, радиуси на впишаните и опишаните кружници имаат ист однос со соодветните страни.

4. Периметрите на два слични триаголници се 16 cm и 24 cm, а една висина на првиот триаголник е 9 cm. Одреди ја соодветната висина на вториот триаголник.

5. На цртежот се дадени сличните триаголници ABC и $A_1B_1C_1$. Нивните плоштини се P и P_1.



- Запиши ги формулите за плоштините P и P_1 според дадените страни и соодветните висини на триаголниците.
- Запиши однос еднаков на односот $h : h_1$.
- Обиди се да докажеш на што е еднаков односот на плоштините на триаголниците, т.е. $P : P_1$.

- Спореди го твоето решение со даденото.

☞ $P=\frac{1}{2}a\cdot h;\ \ P_1=\frac{1}{2}a_1\cdot h_1.$

☞ $P:P_1=\frac{1}{2}ah:\frac{1}{2}a_1h_1$, т.е. $\frac{P}{P_1}=\frac{ah}{a_1h_1}=\frac{a}{a_1}\cdot\frac{h}{h_1}$.

☞ Бидејќи $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ следува дека $\frac{h}{h_1}=\frac{a}{a_1}$.

☞ Според тоа, $\frac{P}{P_1}=\frac{a}{a_1}\cdot\frac{a}{a_1};\ \frac{P}{P_1}=\frac{a^2}{a_1^{\,2}}$.

☞ На ист начин може да се покаже дека: $\frac{P}{P_1}=\frac{b^2}{b_1^{\,2}};\ \frac{P}{P_1}=\frac{c^2}{c_1^{\,2}}$.

Запомни

- Односот на плоштините на два слични триаголници е еднаков со односот на квадратите на нивните соодветни страни.

6. Плоштините на два слични триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ се 49 cm² и 36 cm², а една страна на ΔABC е $a = 7$ cm. Одреди ја соодветната страна a_1 на другиот триаголник и соодветните висини h и h_1.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

☞ $P : P_1 = a^2 : a_1^2$; $49 : 36 = 49 : a_1^2$; $a_1^2 = 36$; $a_1 = 6$ cm.

☞ $P = \frac{a \cdot h}{2}$; $h = \frac{2P}{a}$; $h = \frac{2 \cdot 49}{7} = 14$; $h = 14\,\text{cm}$.

☞ Од $\Delta A_1B_1C_1$ одреди ја висината h_1, според познатото: P_1 и a_1.

Треба да знаеш:

- да искажеш каков однос имаат периметрите, а каков однос имаат плоштините на два слични триаголници;
- да го искажеш тврдењето за односот на соодветните висини, тежишни линии и симетрали на агли на два слични триаголници;
- да ги примениш во задачи односите на периметрите и односите на плоштините на два слични триаголници.

Провери се!

▲ Страните на ΔABC се $a = 8$, $b = 6$ и $c = 4$, периметарот на сличен на него $\Delta A_1B_1C_1$ е 45. Одреди ги страните на $\Delta A_1B_1C_1$.

▲ Нива во форма на триаголник е нацртана во размер 1 : 200. Кој е односот меѓу плоштината на триаголникот од цртежот и плоштината на нивата?

Задачи

1. Периметарот на еден триаголник е три пати поголем од периметарот на сличен на него триаголник. Ако најголемата страна на првиот триаголник е 24 cm, колку е најголемата страна на другиот триаголник?

2. Страните на еден триаголник се 8 cm, 15 cm, 9 cm. Периметарот на друг триаголник што е сличен на првиот е $L_1 = 96$ cm. Одреди ги страните на другиот триаголник.

3. Периметрите на два слични триаголници се однесуваат 5 : 2, а збирот на најголемите страни им е 42 cm. Одреди ги должините на најголемите страни.

4. Страните a, b, c, на еден триаголник ABC се однесуваат како 3 : 4 : 6. Одреди ги страните a_1, b_1, c_1 на $\Delta A_1B_1C_1$ со периметар $L_1 = 52$ cm, којшто е сличен на дадениот.

5. Во ΔABC, на растојание 2 cm од страната AC е повлечена права $MN \parallel AC$. Одреди ја висината кон страната AC на ΔABC, ако $\overline{AB} : \overline{MB} = 13 : 9$.

6. Плоштините на два слични триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ се 81 и 25. Страната b на ΔABC е 9. Одреди ја страната b_1 на $\Delta A_1B_1C_1$ и висината h_1 што е повлечена кон неа.

7. Нацртај триаголник ABC и потоа конструирај сличен на него $\Delta A_1B_1C_1$ чијашто плоштина е една четвртина од плоштината на ΔABC.

8. Страната a на ΔABC е 10, а висината што ѝ припаѓа е 5. Одреди ја страната a_1 и соодветната висина h_1 на $\Delta A_1B_1C_1$ што е сличен со ΔABC и има плоштина 81.

9. Плоштините на два слични триаголници се во однос 9 : 25. Одреди го нивниот коефициент на сличност.

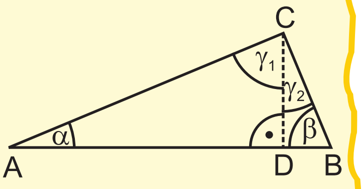
10. Нива во форма на триаголник е нацртана во размер 1 : 500. Плоштината на триаголникот на цртежот е 2,76 dm². Одреди ја плоштината на нивата во хектари.

ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

10 СЛИЧНОСТА ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

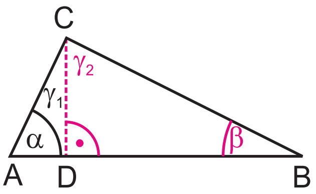
Потсети се!

- Во правоаголниот ΔABC на цртежот, спуштена е висината CD кон хипотенузата AB.
- Каква заемна положба имаат краците на аглите α и γ_2?

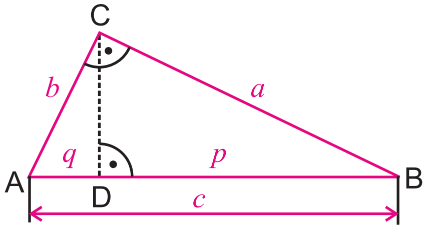


- Кои парови од означените агли имаат заемно нормални краци?
- Кои од означените агли се еднакви меѓу себе?
- Дадени се отсечките $a = 3$ cm, $c = 12$ cm.
- Пресметај ја нивната геометриска средина.

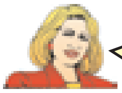
1. Правоаголниот триаголник ABC на цртежот, со висината CD спуштена кон хипотенузата AB, поделен е на два правоаголни триаголници: ΔADC и ΔCDB.



- Објасни зошто (според кој признак) се слични триаголниците:
  а) ΔABC ~ ΔCBD; б) ΔABC ~ ΔACD.
- Воочи ја отсечката AD во ΔABC на цртежот. За неа ќе велиме дека е **проекција** на катетата AC врз хипотенузата AB. Нејзината должина ќе ја означиме со q.
- Аналогно, отсечката DB се вика **проекција** на катетата BC врз хипотенузата. Нејзината должина е означена со p.



2. Воочи ги сличните правоаголни триаголници ABC и CBD на цртежот и означените должини на нивните страни.



Кои страни од ΔCBD се соодветни со страните c и a од ΔABC?

Страната c е хипотенуза во ΔABC, а страната a е хипотенуза во ΔCBD. Според тоа: c е соодветна на a; страната a од ΔABC е соодветна со p од ΔCBD.

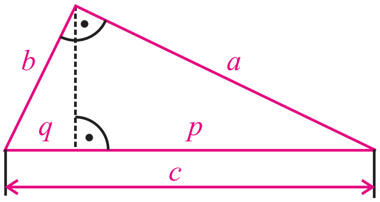
- Објасни зошто $\overline{AB}:\overline{CB}=\overline{BC}:\overline{BD}$, т.е. $c : a = a : p$.
- Од пропорцијата $c : a = a : p$ се добива $a^2 = cp$.
- Што претставува катетата a за хипотенузата c и проекцијата p?

3. На цртежот во задачата 2, воочи ги сличните правоаголни триаголници ABC и ACD.

- Запиши ги паровите соодветни страни.
- Објасни зошто $c : b = b : q$, т.е. $b^2 = cq$.
- Искажи ја со зборови врската на катетата b со хипотенузата c и проекцијата q на b врз c.

Запомни!

Теорема 1° Секоја катета во еден правоаголен триаголник е геометриска средина од хипотенузата и проекцијата на таа катета врз хипотенузата.

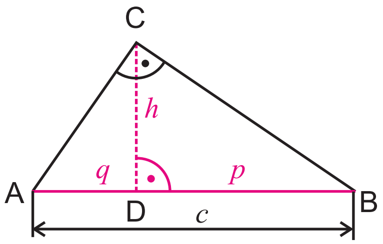


$$a^2 = cp, \qquad a = \sqrt{cp}$$

$$b^2 = cq, \qquad b = \sqrt{cq}$$

4. Во правоаголниот ΔABC со катети $a = 12$ и $b = 5$ и хипотенуза $c = 13$, одреди ги проекциите на a и b врз c.

5. Во правоаголниот ΔABC е спуштена висината CD кон хипотенузата.



- Зошто ∢CAD е еднаков со ∢BCD?
- Воочи ги ΔACD и ΔCBD на цртежот и покажи дека тие се слични.
- Кои се соодветни страни од ΔCBD на страните q и h од ΔACD?
- Објасни зошто $q : h = h : p$, т.е. $h^2 = pq$.
- Искажи ја со зборови врската на висината h со проекциите p и q (на a и b врз c).

Запомни!

Теорема 2° Висината h спуштена кон хипотенузата c во еден правоаголен триаголник е геометриска средина на проекциите p и q од катетите врз хипотенузата.

$$h^2 = pq \qquad h = \sqrt{pq}.$$

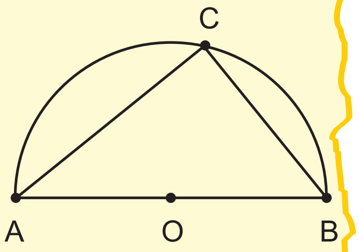
6. Најди го p, ако $q = 4$ и $h = 6$.

Тврдењата 1° и 2°, т.е. врските $a^2 = cp$, $b^2 = cq$, $h^2 = pq$,

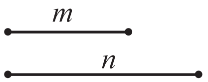
ги докажал старогрчкиот математичар Евклид (365–310 год. п.н.е.) и поради тоа тие се викаат **Евклидови теореми**.

Потсети се!

- На цртежот е дадена полукружница со дијаметар AB и избрана е точка C на полукружницата.
- Од каков вид е аголот ACB?
- Како гласи Талесовата теорема за периферински агол над дијаметар?



В **7.** Нацртај две отсечки m и n, како на цртежов.



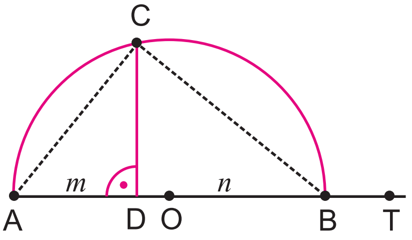
Потоа, **конструирај ја геометриската средина** на тие отсечки (т.е. отсечка x, таква што $x^2 = m \cdot n$).

- Следи ја постапката како што е покажано.

☞ Нацртај полуправа AT и нанеси ги на неа отсечките $m=\overline{AD}$ и $n=\overline{DB}$ како на цртежот.

☞ Конструирај ја средната точка O на отсечката AB и нацртај полукружница со дијаметар AB.

☞ Конструирај ја нормалата на AB низ точката D и означи го со C нејзиниот пресек со полукружницата.



- Според теоремата 2° образложи зошто добиената отсечка $x=\overline{CD}$ е геометриска средина на отсечките m и n.

8. Конструирај ја геометриската средина x на отсечките m = 2 cm и n = 3 cm.

Треба да знаеш:

- да ги искажеш Евклидовите теореми и да ги примениш во задачи;
- да конструираш геометриска средина на две отсечки.

Провери се!

- Во правоаголниот ΔABC, p и q се проекциите на катетите a и b, соодветно, врз хипотенузата c.
  а) Ако c = 12 и p = 3, колку е a?
  б) Ако b = 13, колку е cq?
  в) Ако q = 2 и p = 8, колку е h?
- Како се конструира геометриската средина на две отсечки? (Опиши ја постапката.)

Задачи

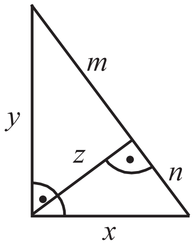
1. Врз основа на цртежот пополни ги членовите што недостасуваат во пропорцијата:

а) $\frac{m}{\square}=\frac{\square}{n}$;

б) $\frac{\square}{x}=\frac{x}{m+n}$;

в) $x \cdot y = (m + n) \cdot \square$;

г) $\frac{m+n}{}=\frac{}{\square}$.



2. Во правоаголниот ΔABC, p и q се проекциите на катетите a и b, соодветно, врз хипотенузата c. Одреди ја вредноста на непознатите величини.

а) $p = 12$, $q = 3$, $h = ?$

б) $a = 11$, $cp = ?$

в) $c = 18$, $p = 8$, $b = ?$, $a = ?$

3. Во правоаголниот ΔABC е дадена висината $h = 2,4$ спуштена кон хипотенузата и проекцијата на катетата b врз хипотенузата, $q = 1,8$.
Најди ја:

а) отсечката p;
б) хипотенузата c;
в) катетата b;
г) катетата a.

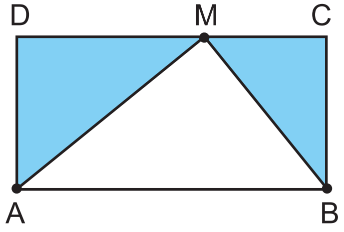
4. Конструирај ја геометриската средина на отсечките:

а) $m = 2,5$ cm и $n = 3,5$ cm;

б) $m = 1,5$ cm и $n = 3$ cm.

5. Во правоаголниот ΔABC е дадена катетата $a = 8$ и нејзината проекција $p = 6,4$. Пресметај ја хипотенузата c и другата катета b.

6. Во правоаголникот ABCD е вписан правоаголен ΔABM со прав агол во темето M (како на цртежот).



Пресметај ја плоштината на обоениот дел од правоаголникот ако $\overline{CM}=9$ cm и $\overline{DM}=16$ cm.

7. Конструирај квадрат што има еднаква плоштина со правоаголник чии димензии се $a = 4$ cm и $b = 3$ cm.

11 ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

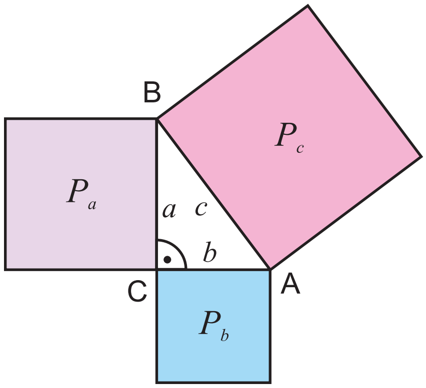
Потсети се!

- Питагоровата теорема ти е позната од минатата учебна година. Таа гласи: Во правоаголен триаголник, квадратот на хипотенузата ***c*** е еднаков со збирот од квадратите на катетите, ***a*** и ***b***, т.е.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

- Колкава е плоштината P на квадрат со страна a = 5 cm?

A **1.** На цртежот е претставен правоаголен ΔABC со должина на катетите a, b и должина на хипотенузата c. Над неговите страни се конструирани квадратите и нивните плоштини се означени со P_a, P_b и P_c, соодветно.

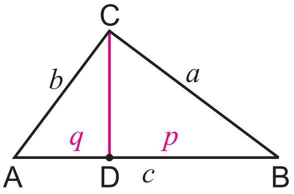


- Запиши ја врската меѓу P_a, P_b и P_c.
- Согледај дека: $P_a = a^2$, $P_b = b^2$ и $P_c = c^2$.
  Од $c^2 = a^2 + b^2$ заклучи дека $P_c = P_a + P_b$.
- Според тоа, Питагоровата теорема може да се искаже и вака:

Во кој било правоаголен триаголник плоштината на квадратот над хипотенузата е еднаква на збирот од плоштините на квадратите над катетите, т.е. $P_c = P_a + P_b$.

2. Со помош на следните упатства обиди се да ја докажеш Питагоровата теорема.

- Нацртај правоаголен ΔABC со ∢C = 90° и спушти ја висината CD кон хипотенузата.
- Запиши ја врската меѓу секоја катета со хипотенузата и соодветната проекција, т.е. врската според Евклидовите теореми.
- Одреди го збирот од левите и збирот од десните страни на равенствата.



- Спореди го твоето размислување со дадениот доказ.

Доказ

Тврдење		**Образложение**
1. CD ⊥ AB	☜	Висината во триаголник е нормална на соодветната страна.
2. $a^2 = pc$, $b^2 = qc$	☜	Катетата е геометриска средина од хипотенузата и соодветната проекција.
3. $a^2 + b^2 = pc + qc$	☜	Својство на собирање равенства.
4. $a^2 + b^2 = (p + q) \cdot c$	☜	Дистрибутивност на множењето во однос на собирањето.
5. $a^2 + b^2 = c \cdot c$, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$.	☜	Принцип на замена ($c = p + q$).

- Како можеш да ја изразиш хипотенузата c со помош на катетите a и b?
- Како ќе ја изразиш едната катета со помош на хипотенузата и другата катета?

Од $c^2 = a^2 + b^2$ следува:

$c=\sqrt{a^2+b^2}$, $a=\sqrt{c^2-b^2}$,

$b=\sqrt{c^2-a^2}$.

3. Најди ја хипотенузата c на правоаголен триаголник, ако катетите му се $a = 15$ и $b = 20$.

4. Дадена е хипотенузата $c = 29$ и катетата $a = 20$ на еден правоаголен триаголник. Најди ја другата катета.

5. Даден е ΔABC со страни $a = 6$ cm, $b = 8$ cm и $c = 10$ cm.

- Покажи дека е исполнето равенството $a^2 + b^2 = c^2$.
- Конструирај го ΔABC и со мерење, увери се дека тој е правоаголен.

Важи и општо

- Ако за еден триаголник со страни a, b, c важи равенството $a^2 + b^2 = c^2$, тогаш тој триаголник е правоаголен, со хипотенуза c.

Ова тврдење е теорема, **обратна на Питагоровата теорема**.

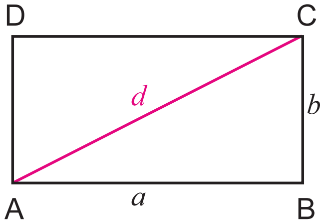
6. Страните на ΔABC се:

а) $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$; б) $c = 8$, $b = 10$, $c = 15$.

Провери дали ΔABC е правоаголен.

7. Пресметај ја должината d на дијагоналата на правоаголник со страни $a = 6$ dm и $b = 11$ cm.

Спореди го твоето решавање со даденото упатство.



☞ Нацртај правоаголник ABCD и означи ги страните и дијагоналата, како на цртежот.

☞ Согледај дека ΔABC е правоаголен; неговата хипотенуза е дијагоналата d, а катетите му се страните a и b на правоаголникот.

☞ Примени ја Питагоровата теорема во ΔABC:

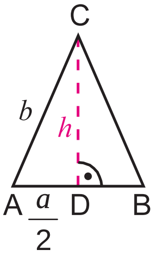
$d^2 = a^2 + b^2 = 60^2 + 11^2 = 3\,600 + 121 = 3\,721$; $d=\sqrt{3721}=61$; $d = 61$ cm.

8. Пресметај ја висината h на рамнокрак ΔABC со основа $a = 18$ и крак $b = 41$.

Разгледај ги упатствата и спореди го твоето решение со даденото.

☞ Нацртај рамнокрак ΔABC и спушти ја висината CD кон основата, како на цртежот.

☞ Согледуваш дека ΔADC е правоаголен, со хипотенуза b и катети $\frac{a}{2}$ и h.



☞ Примени ја Питагоровата теорема во ΔADC: $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$; оттука:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1\,600;\quad h=\sqrt{1600}=40;\quad h = 40 \text{ cm}.$$

9. Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник со основа 10 и висина 12.

Треба да знаеш:

- да ја искажеш и докажеш Питагоровата теорема;
- да ја пресметаш должината на една страна во правоаголен триаголник, ако се дадени другите две.

Провери се!

- Најди ја хипотенузата c на правоаголен триаголник со катети $a = 8$ и $b = 15$.
- Пресметај ја висината на рамнокрак триаголник со основа 20 cm и крак 26 cm.

Задачи

1. Најди ја непознатата страна на правоаголниот триаголник со катети a и b, и хипотенуза c, ако:

а) $a = 12$, $b = 35$, $c = ?$

б) $b = 56$, $c = 65$, $a = ?$

в) $a = 25$, $b = 31$, $c = ?$

2. Дали ΔABC е правоаголен, ако неговите страни се:

а) 14, 48, 50; б) 9, 12, 17;

в) 5,6; 3,3; 6,5; г) 100, 60, 80?

3. Најди ја дијагоналата на правоаголник со страни 0,28 dm и 0,96 dm.

4. Најди го периметарот на правоаголник со дијагонала 8,5 dm и една страна 1,3 dm.

5. Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник со основа 14 и висина 24.

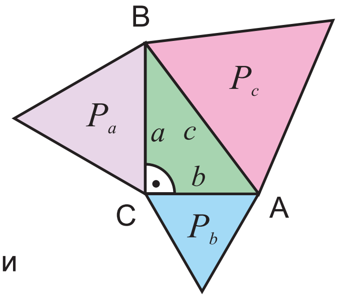
6. Пресметај ја приближно висината h на рамностран триаголник со страна $a = 12$.

7. Катетата на еден правоаголен триаголник е 35 cm. Збирот од хипотенузата и другата катета е 49. Пресметај ја хипотенузата c и другата катета b.

8. Хипотенузата на правоаголен триаголник е 35 cm. Односот на катетите е 3 : 4. Најди ги катетите.

9. Плоштините на рамностраните триаголници над катетите a, b и хипотенузата c од правоаголниот ΔABC се означени со P_a, P_b и P_c.

- Покажи дека $P_c = P_a + P_b$.
- Провери дали важи таквата врска, ако наместо правилни триаголници се конструирани правилни шестаголници.



Питагорови тројки
Ова не е задолжително!

- Интересно е прашањето за тројките природни броеви a, b, c што го задоволуваат равенството $a^2 + b^2 = c^2$.
  Такви тројки се, на пример:
  3, 4, 5; 6, 8, 10; 5, 12, 13 и др.
- Тие се викаат **Питагорови тројки**.
- Провери дека со следните изрази се добиваат Питагорови тројки.

1° $2mn,\ m^2 - n^2,\ m^2 + n^2$,
за секои $m, n \in \mathbf{N},\ m > n$.

2° $2n + 1,\ 2n^2 + 2n,\ 2n^2 + 2n + 1$;
за секој $n \in \mathbf{N}$ се добива по една Питагорова тројка.

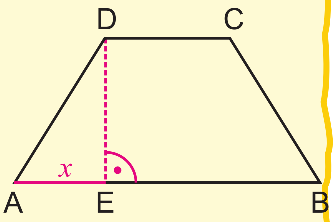
3° $n,\ \frac{n^2-1}{2},\ \frac{n^2+1}{2}$,
за секој непарен $n \in \mathbf{N},\ n \geq 3$.

4° $n,\ \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1,\ \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$,
за секој парен $n \in \mathbf{N},\ n \geq 4$.

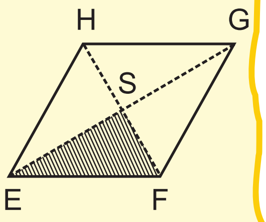
12 ЗАДАЧИ СО ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Потсети се!

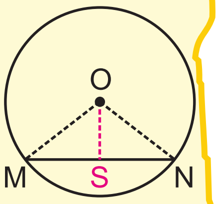
- Основите на рамнокракиот трапез ABCD на цртежот се $a = \overline{AB} = 15\,\text{cm}$ и $b = \overline{CD} = 9\text{ cm}$, а DE е висината на трапезот. Пресметај го $x = \overline{AE}$.



- Пресечната точка на дијагоналите во ромбот EFGH на цртежот е означена со S. Од кој вид е ΔEFS? Образложи го твојот одговор.

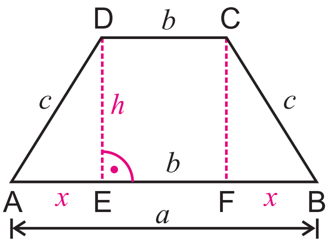


- Во кружницата со центар O, на цртежот е нацртана тетива MN, а во ΔMNO е спуштена висината OS кон страната MN. Какви се меѓу себе ΔMSO и ΔNSO? Зошто?



A **1.** Пресметај ја висината h на рамнокрак трапез со основи 16 cm и 30 cm, а крак 25 cm.

- Ако не можеш сам да ја решиш задачата, следи ги упатствата.



☞ Нацртај рамнокрак трапез ABCD и повлечи ги неговите висини DE и CF.

☞ Воочи го, потоа, правоаголниот ΔAED со хипотенуза $c = 25$ cm и катети x и h.

☞ Воочи исто така од цртежот дека

$a = b + 2x$, од каде што $x = \frac{a-b}{2}$.

☞ Примени ја Питагоровата теорема за ΔAED; ќе добиеш

$$h^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

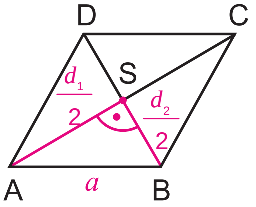
Со заменување на c, a и b, ќе добиеш:

$$h^2 = 25^2 - \left(\frac{30-16}{2}\right)^2 = 625 - 49 = 576; \quad h = \sqrt{576} = 24; \quad h = 24 \text{ cm}.$$

2. Основите на рамнокрак трапез се 30 и 20, а кракот е 13. Пресметај ја плоштината на трапезот.

3. Најди го периметарот на ромбот ABCD со дијагонали $\overline{AC} = 70$ и $\overline{BD} = 24$.

- На што е еднаков периметарот L на ромб со страна a?
- Како ќе ја пресметаш страната a на ромбот ако ги знаеш неговите дијагонали?



Во ромбот ABCD на цртежот, пресекот на дијагоналите е означен со S.

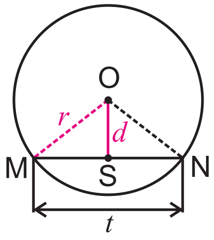
Воочи го ΔABS. Тој е правоаголен (зошто?) со хипотенуза a и катети $\frac{d_1}{2} = 35$ и $\frac{d_2}{2} = 12$.

☞ Според Питагоровата теорема:

$$\boxed{a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 35^2 + 12^2 = 1225 + 144 = 1369; \quad a = \sqrt{1369} = 37; \; a = 37; \; \text{L} = 4 \cdot 37 = 148.$$

4. Во кружница со радиус $r = 2$ dm е повлечена тетива MN со должина $t = 2{,}4$ dm. Колкаво е растојанието d на таа тетива од центарот на кружницата?

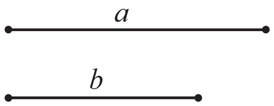
Ако ти е неопходна помош, разгледај го цртежот.



Воочи го правоаголниот ΔMSO, со хипотенуза r и катети d и $\frac{t}{2}$, а потоа, според Питагоровата теорема, ќе добиеш:

$$\boxed{d^2 = r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2} = 2^2 - 1\ 2^2 = 4 - 1\ 44 = 2\ 56; \quad d = \sqrt{2\ 56} = 1\ 6; \quad d = 1{,}6 \text{ dm}.$$

Б **5.** Дадени се отсечките a и b $(a > b)$ како на цртежот.

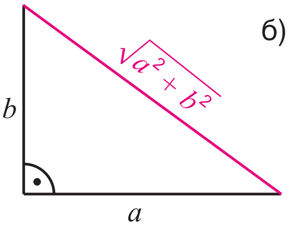


- Конструирај отсечка x, таква што:

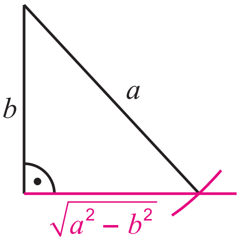
а) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; б) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

Спореди го твоето решение со даденото на цртежот:
се конструира правоаголен триаголник, за а) со катети a и b, а за б) со хипотенуза a и катета b.

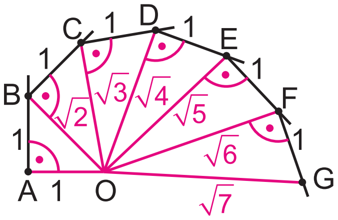
а)



б)



6. Конструирај отсечка со должина $\sqrt{n}$, каде што n = 2, 3, 4, 5, 6, 7...



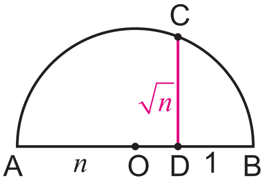
■ Конструкцијата е прикажана на цртежот.

☞ Отсечка со должина $\sqrt{2}$ е конструирана така што е конструиран рамнокракиот правоаголен ΔOAB, со катети $\overline{OA}=\overline{AB}=1$ (cm, dm,...); хипотенузата OB има должина $\sqrt{2}$. (Зошто?)

☞ Ако отсечката $\overline{OB}=\sqrt{2}$ се земе за една катета, а отсечката $\overline{BC}=1$ за другата катета на правоаголниот ΔOBC, тогаш хипотенузата на ΔOBC ќе има должина $\sqrt{3}$ (Зошто?).

● Објасни како се конструирани отсечките со должина $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ итн.

■ Конструкцијата на $x=\sqrt{n}$ може да се изведе и „директно“, со конструирање на геометриската средина на отсечките со должина n и 1, како на цртежот $\left(\sqrt{n}=\overline{CD}\right)$.



7. Конструирај отсечка со должина $x=\sqrt{a^2+ab}$.

■ Конструирај ја геометриската средина на отсечките со должина a и $a+b$.

Треба да знаеш:

◆ да ја примениш Питагоровата теорема за пресметување должини кај рамнински геометриски фиугри;

◆ да решаваш одредени конструктивни задачи со помош на Питагоровата теорема.

Провери се!

▲ Пресметај го периметарот на рамнокрак трапез со основи 30 и 14, а висина 15.

▲ Страната на еден ромб е a = 13 cm, а едната дијагонала е 10 cm. Колку е другата дијагонала?

▲ Објасни како се конструира отсечка со должина $\sqrt{3}$.

Задачи

1. Скала со должина 7,4 m е потпрена на ѕид така што долниот крај од скалата е оддалечен 2,4 m од ѕидот. До која висина достигнала скалата? (Направи скица.)

2. Пресметај ги: а) висината, б) плоштината, в) дијагоналата на рамнокрак трапез, ако се познати неговите основи a = 42 cm, b = 24 cm и кракот c = 41 cm.

3. Дијагоналите на еден ромб се $d_1 = 40$ и $d_2 = 50$. Колку (приближно) изнесува страната a на тој ромб?

4. Плоштината на еден рамнокрак трапез е P = 72 cm^2, а основите му се долги 20 cm и 4 cm. Пресметај го периметарот на трапезот.

5. Страните на еден делтоид се долги 25 cm и 52 cm, а дијагоналата што не е симетрала изнесува 40 cm. Пресметај ја плоштината на делтоидот.

6. Во кружница со радиус 3,4 cm е повлечена тетива на растојание 1,6 cm од центарот. Најди ја должината на тетивата.

7. Конструирај отсечка со должина:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{a^2+a}$; г) $\sqrt{a^2-ab}$ $a>b$,

каде што a и b се дадени отсечки.

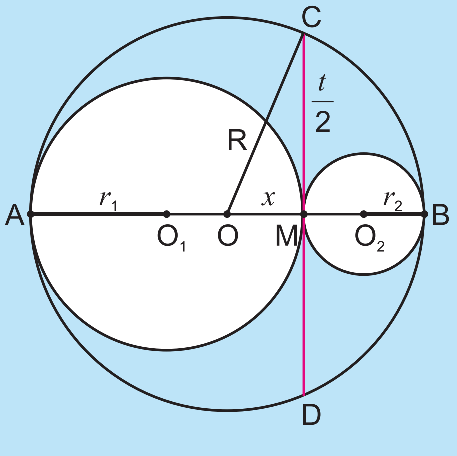
8. Конструирај квадрат чијашто плоштина е еднаква со:

а) збирот, б) разликата од плоштините на двата дадени квадрати.

9. Во кружница со радиус 17 cm е впишан правоаголник. Најди го периметарот на тој правоаголник ако односот на неговите страни е 15 : 8.

10. На дрво што е оддалечено 8 m од еден извор се качени два мајмуна – едниот на врвот, а другиот на 2 m од земјата. Кога ожеднеле, мајмунот од врвот скокнал право на изворот, а другиот слегол од дрвото и отишол по земја до изворот. Притоа, обата мајмуни извминале еднаков пат. Колку е високо дрвото?

Обиди се ...
не е задолжително!



- Две кружници се допираат однадвор и се сместени во трета, поголема од нив кружница. Секоја од трите кружници ги допира другите две, а нивните центри O, O_1, O_2 лежат на иста права, AB, како на цртежот.

- Дадена е должината t (на пример, t = 6 cm) на тетивата CD од големата кружница што е тангента на малите кружници.

- Пресметај ја плоштината P на делот од големиот круг што е надвор од малите кругови (т.е. на обоениот дел).

13 ПОПУЛАЦИЈА. ПРИМЕРОК

А **1.** Во фабриката за чоколади има вработен дегустатор. Негова задача е да проба од чоколадите и да го процени нивниот квалитет.

- Размисли и одговори, дали дегустаторот треба да ја проба секоја чоколада?

- Секако не. Дегустаторот избира одреден број чоколади кои ги пробува.
- Мноштвото од сите тие елементи, во случајов чоколади, кои се предмет на испитување е **популација**.
- Избраниот дел елементи, на кои се врши испитувањето се вика **примерок**.

2. Воочи ги примерите за популација и примерок.

Популација	Примерок
Ученици од I до VIII одделение во едно училиште	По една паралелка од I до VIII одделение во истото училиште
Фудбалски тимови	По три фудбалери од секој тим
Сите ученици што одат во приватни училишта за англиски јазик	По еден ученик од секое приватно училиште за странски јазик
Сите ученици од VII одделение во Р. Македонија што имаат оценка 5 по математика	По еден ученик од VII одделение од секое училиште во Р. Македонија што има оценка 5 по математика

- Запиши три примери на популација и примерок (дел) од таа популација.

3. Размисли и одговори. За да се провери дали учениците сакаат за време на големиот одмор да им се пушта музика, што е подобро: да се прашаат сите ученици во сите училишта или да се праша примерок од по неколку ученици од секое училиште?

- Образложи го твојот одговор.

- Најчесто не е можно да се направи некое истражување, тестирање или проверка и испитување на целата популација. Зошто?

- Може тоа да биде:
  - многу скапо;
  - да трае долго време;
  - да биде невозможно да се дојде до секој член од популацијата (на пример, бројот на рибите во Охридското Езеро).

4. Запиши по една причина зошто е подобро да се земе примерок наместо целата популација за секое од наведените истражувања.

- Најгледана телевизиска емисија во еден град од 50000 жители.
- Квалитетот на соковите во една сокара.
- Просечниот број книги што ги прочитал секој жител на Р. Македонија во претходната година.

Кога има потреба да се направи заклучок или да се изјави нешто за цела популација а се зема примерок, примерокот треба да биде *репрезентативен* (соодветен на популацијата).

5.

- Воочи го примеров. За да провери *колку учениците од неговото училиште* користат градски сообраќај, Јован застанал на една автобуска постојка и прибрал податоци со прашување на луѓето што се симнале од еден автобус.
- Податоците што ги прибирал Јован не се соодветни бидејќи примерокот не е репрезентативен.
- Ако Јован прашувал ученици од неговото училиште, дали примерокот ќе биде репрезентативен? Образложи го својот одговор.

6. Марија сакала да ја открие просечната должина на листовите на едно растение кое имало двапати повеќе мали листови од големи листови. Кој примерок од листови што таа треба да го избере е репрезентативен?

а) Само големи листови;

б) само мали листови;

в) еднаков број мали и големи листови;

г) двапати повеќе мали листови од големи листови.

- Образложи го својот одговор!

Репрезентативен примерок може да се избере по методот на **случаен избор** и **систематски**. Случаен избор значи дека секој објект или лице од популацијата има еднакви шанси да биде избран.

- За да избереме, случајно, 5 од 30 ученици во една паралелка може да ги запишеме нивните броеви од одделенската книга на ливчиња, ливчињата да ги измешаме во една кутија, и да извлечеме 5 ливчиња.
  Или, да избереме еден број (на пример 7), а потоа *систематски* да го бираме секој петти ученик:

(7 + 5 = 12 ; 12 + 5 = 17 ; 22 ; 27)

7. Илија сакал да праша примерок ученици од неговото училиште за тоа дали сакаат да се воведе задолжително носење училишна униформа.

- Образложи зошто ниту еден од следниве начини за избор на примерок не е добар:
  а) да ги праша првите 20 лица што ќе влезат во училиштето;
  б) да ги праша учениците од неговата паралелка;
  в) да ги праша учениците од математичката секција.

- Како треба Илија да го избере примерокот за да биде репрезентативен?

Воочи!

Изборот на примерокот треба да е случаен и да биде составен од ученици од сите одделенија (од I до VIII одделение) за да може да се извлече правилен заклучок.

8. Во табелата Илија ги средил податоците од истражувањата за задолжително носење училишна униформа.

- Колку вкупно ученици броел примерокот на Илија?
- Ако примерокот бил 10 % од популацијата, колку вкупно ученици имало во училиштето?
- Кој е заклучокот на Илија за носењето училишна униформа?
- Запиши уште еден заклучок што може да се добие од податоците во табелата.

Примерок	Број на одговори	
Примерок	Да	Не
Прво	12	3
Второ	10	5
Трето	10	5
Четврто	9	6
Петто	7	8
Шесто	7	8
Седмо	2	13
Осмо	0	15

Прибраните податоци од репрезентативен примерок и добиените мерки за централна тенденција овозможуваат да се извлечат заклучоци и да се направат воопштувања за цела популација.

9. Воочи го примерот:

Прибрани податоци	
Број на филмови годишно	Одговори на испитаници
0	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |
1 до 4	𝍸 𝍸 𝍸 |
5 до 8	𝍸 |
9 до 12	|||
13 и повеќе	||||

- Во една населба имало 5 000 жители постари од 15 години. Иван сакал да процени колкупати годишно тие одат на кино.
  Тој за примерок избрал 50 луѓе и по телефон ги прибрал податоците. Прибраните податоци ги претставил во табела по категории според бројот на филмовите гледани во кино.

☞ Иван ја дополнил табелата со вредности на фрекфенциите (број на одговори за секоја категорија). Потоа пресметал процент за бројот на одговорите во секоја категорија од вкупниот број испитаници во примерокот (50 луѓе).

☞

Број на филмови годишно	Одговори на испитаници	Вредност на функцијата	Процент
0	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	21	$\frac{21}{50} \cdot 100 = 42\%$
1 до 4	𝍸 𝍸 𝍸 |	16	$\frac{16}{50} \cdot 100 = 32\%$
5 до 8	𝍸 |	6	$\frac{6}{50} \cdot 100 = 12\%$
9 до 12	|||	3	$\frac{3}{50} \cdot 100 = 6\%$
13 и повеќе	||||	4	$\frac{4}{50} \cdot 100 = 8\%$

☞ На крајот процентите добиени за примерокот, Иван ги применил на целата популација.

■ 42% од 5 000 е 2 100 Ако 42% од примерокот не одат во кино, може да се предвиди дека 42% од популацијата не одат во кино, што е 2 100 луѓе.

● Направи воопштување за популацијата за останатите категории (број на гледани филмови во кино – годишно).

10. Мимоза сакала да провери колку се загадува околината со пластични отпадоци фрлени во училишниот двор за време на големиот одмор. Случајно избрала еден месец во кој прибрала податоци, како примерок од целата учебна година. Прибраните податоци ги претставила во табела.

Вид отпадок	Број
Пластични ќеси	137
Шишиња од јогурт	59
Шишиња од сок	72
Чашки од пудинг	16

а) Пресметај по колку отпадоци просечно во еден ден биле фрлени од секој вид.

б) Ако учебната година има 180 дена, употреби го одговорот под а) за да го предвидиш бројот на секој вид отпадок во текот на учебната година.

Треба да знаеш:

◆ што е популација, а што примерок;

◆ да процениш дали даден примерок е репрезентативен за дадена популација;

◆ да одредиш примерок што е соодветен за дадено истражување;

◆ да воопштиш заклучок добиен од примерок врз популација.

Провери се!

▲ Процени и одговори дали е добар изборот на примерокот: „случаен избор на 5% од популацијата од градскиот телефонски именик“ за истражувањето: „мислење за квалитетот на градскиот сообраќај во еден град“.

● Образложи го својот одговор.

Задачи

А Во следните три случаи:

- одреди ја популацијата;
- процени дали начинот на избор на примерокот е соодветен;
- предложи друг начин на избор на примерок.

1. Стефан сакал да открие колку заработуваат студентите што работат преку студентската организација.
Тој отишол во библиотеката во студентскиот дом и прашал 40 девојки.

2. За часот по географија Бојан треба да однесе во училиште 5 примероци почва од својата градина.
Тој застанал во средината на градината, фрлил паричка и од таму каде што паднала паричката зел примероци.

3. Тања сакала да провери дали е точно дека жените во Битола живеат подолго од мажите.
Таа побарала податоци од Заводот за статистика од претходната година.

Б Во следните пет случаи:

- кои од примероците се репрезентативни за популацијата и за истражувањето?
- Образложи го секој од твоите одговори.

4. Истржување: мислење за тоа дали да се изгради ново кафуле.

Примерок: случаен избор од најчестите посетители на градската библиотека.

5. Истржување: дали машината за пакување „Смоки“, секое пакетче го прави со иста грамажа.

Примерок: првите 50 пакетчиња „Смоки“ што излегуваат од машината во еден ден. Мерена е нивната маса.

6. Истржување: ефикасноста на новиот лек за главоболка.

Примерок: сите пациенти на еден лекар кои имаат чести главоболки.

7. Истражување: квалитетот на лебот од една пекарница.

Примерок: секој дваесетти купувач во една продавница каде што се продава леб од таа пекарница.

8. Во еден град има 6 000 семејства. Избрани се 100 семејства за истражувањето: кој е најомилен ден за пазарување. Податоците се дадени во табелата.

Омилен ден за пазарување		
Ден	Фрекфенција	Процент
Понеделник	8	
Вторник	10	
Среда	14	
Четврток	2	
Петок	16	
Сабота	30	
Недела	12	
Нема омилен ден	8	
Вкупно	100	

а) Одреди ги процентите за секој ден.

б) Употреби го процентот од примерокот за да го предвидиш бројот на семејствата од целата популација на кои омилен ден за пазарување им е петок.

в) Колку семејства во градот немаат омилен ден за пазарување?

УЧЕШЕ ЗА СЛИЧНОСТ
ПРОВЕРИ ГО ТВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. Дадени се два квадрати, едниот со страна $a = 12$ cm, а другиот со страна $b = 8$ cm. Најди го размерот на нивните:

а) страни; б) периметри;

в) плоштини.

Дали некои од тие размери се еднакви?

2. Отсечката AB е долга 12 cm. Најди го растојанието меѓу средната точка S на отсечката и точката M што ја дели отсечката во однос 3 : 5.

3. Најди го непознатиот член во пропорцијата:

а) $x : 4 = 5 : 2$; б) $3 : 2x = 1 : 6$;

в) $7 : 3 = 14 : (x + 2)$.

4. Најди ја должината на отсечката што е геометриска средина на отсечките со должини 8 cm и 18 cm.

5. Нацртај произволна отсечка и подели ја на:
а) 4; б) 5; в) 7 еднакви делови.

6. Даден е ΔABC и права $MN \parallel AB$ што ја сече AC во M и BC во N. Најди ја:

а) $\overline{AC}$, ако $\overline{CN} = 6$ $\overline{NB} = 3$ и $\overline{MA} = 4$.

б) $\overline{BC}$, ако $\overline{AC} : \overline{CM} = 5 : 2$ и $\overline{CN} = 14$.

7. Нацртај агол SOT. На кракот OS нанеси ги отсечките $\overline{OA} = 3$ cm и $\overline{OB} = 5$ cm, а на кракот OT – отсечките $\overline{OC} = 4\ 5$ cm и $\overline{OD} = 7\ 5$ cm. Нацртај ги правите AC и BD.

а) Провери на цртежот дали правите се паралелни.

б) Објасни зошто твојот одговор е правилен.

8. Дадена е отсечка со должина 12 cm. Констуирај триаголник со периметар 12 cm, така што страните да му се однесуваат како 3 : 5 : 6.

9. Дали се слични два триаголници, ако два агли на едниот триаголник се 40° и 60°, а на другиот се 60° и 80°? Образложи!

10. Еден електричен столб фрла сенка долга 10 m, а во исто време сенката на еден човек висок 1,5 m е долга 1,5 m. Одреди ја висината на столбот.

11. Еден пар соодветни страни на два слични триаголници се: $a = 15$ dm и $a_1 = 6$ dm, а висината кон страната a е 8 cm. Одреди ја висината кон страната a_1.

12. Две соодветни страни на два слични триаголници се 7,5 cm и 10 cm. Пресметај го периметарот и плоштината на помалиот триаголник, ако поголемиот триаголник има периметар 60 cm и плоштина 80 cm^2.

13. Во правоаголен триаголник се дадени проекциите на катетите врз хипотенузата, $p = 2$ и $q = 8$.
Најди ги: c, a, b, h.

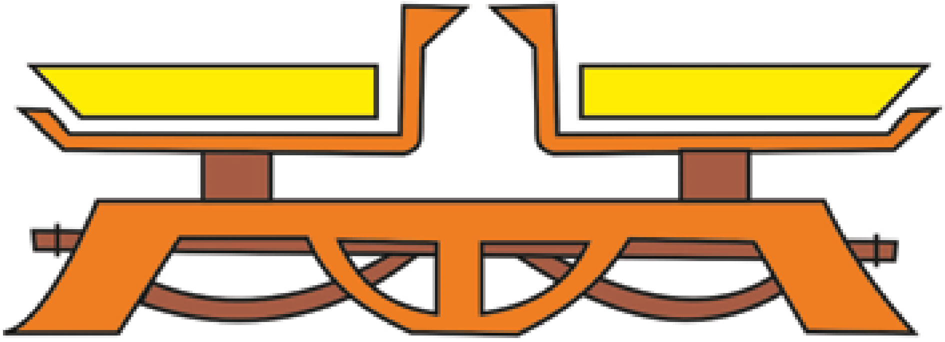
14. Најди го периметарот на правоаголник со страна 300 и дијагонала 340.

15. Дали е правоаголен триаголникот со страни:
а) 32, 24, 40; б) 20, 40, 50;
в) 0,7; 2,4; 2,5?

16. Најди го периметарот на рамнокрак триаголник со основа 28 и висина 48.

17. Пресметај ја страната на ромб чии дијагонали имаат 9 cm и 5,6 cm.

ТЕМА 2. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА, ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА И ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА



ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

1 РАВЕНСТВО, РАВЕНКА, ИДЕНТИТЕТ

Потсети се!

- Два израза сврзани со знакот „=“ (еднакво) образуваат равенство.
  Равенства се, на пример:
  $8 + 5 = 5 + 8$; $7 + 5 \cdot 2 = 7 + 10$;
  $2x - 3 = x + 1$; $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
- Запиши равенство со кое е искажано:
  а) комутативното својство на собирањето во **Q**;
  б) дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето во **Q**.
- Запиши равенство во кое $4x^2 - 4x$ е лева страна, а $x - 6$ е десна страна на равенството.

1. Дадени се равенствата:

а) $3 \cdot 2 - 11 = 2 - 7$;

б) $3x - 1 = 2x + 5$;

в) $x + 2y = 8$;

г) $15 - 6 : 2 = 4 \cdot 2 - 5$;

д) $3 \cdot 4 + 2 = 12$.

- Во кои од дадените равенства левата и десната страна се бројни изрази?
- Во кои од дадените равенства левата и десната страна или едната од нив е израз со променлива?

Согледај и запомни

☞ Во равенствата а) и г) левата и десната страна се бројни изрази.

- Равенствата во кои левата и десната страна се бројни изрази се викаат **бројни равенства**.

☞ Во равенствата б) и в) левата и десната страна или едната од нив е израз со променлива.

- Равенствата во кои левата и десната страна или барем едната од нив е израз со променлива, се викаат **равенства со променливи**.
  Променливите се менуваат во множеството **R** или во некое негово подмножество.
- За бројното равенство се вели дека е **точно**, ако вредноста на изразот од левата страна е еднаква со вредноста на изразот од десната страна.
- Кое од бројните равенства а), г) и д) е точно?

2. Запиши точно бројно равенство на кое левата страна е: а) $3 + 2 \cdot 7$; б) $5 - (9 + 2)$.

3. Одреди кои од следниве равенства се равенства со променлива.

а) $7 - 10 : 2 = 4 \cdot 3 - 10$; б) $3x + 2 - x = 8$; в) $3x - 5 = x + 3$; г) $5 \cdot 2 + 1 = 9 : 3 + 8$.

- Множеството во кое се менуваат променливите се вика **дефиниционо множество** и најчесто се означува со **D**.

- Равенство со една променлива, во општ случај ќе означуваме со A(x) = B(x), $x \in$ **D**, каде што A(x) и B(x) се изрази со променлива x, дефинирани во **D**.
Понатаму, ако не е зададено дефиниционото множество ќе подразбираме дека тоа е множеството **R** на реалните броеви.

4. Дадени се равенствата со променливи:

а) $3x - 7 = x + 1,\ x \in$ **N**; б) $x + y = 2 + 3y$;

в) $5x - 2 = x - 6,\ x \in$ **Z**; г) $x^2 - 4x = x - 5$.

- Именувај ги променливите, а потоа и дефиниционото множество во секое од тие равенства.
- Во кои од дадените равенства подразбираме дека дефиниционото множество е множеството **R**?

Запомни

- Равенствата со променливи се викаат **равенки**.
- Променливите во равенките се викаат **непознати**.

5. Кои од дадените равенства се равенки? Посочи ги непознатите во нив.
а) $4 \cdot 5 - 11 = 3 \cdot 3$; б) $x - y = 5$; в) $3x - 8 = x + 2$; г) $12 : 2 - 1 = 2 \cdot 3 - 1$.

Б **6.** Дадени се равенките: $2x - 3 = x - 1$, $x^2 + 3 = 4x$, $3(x + 2) = 3x + 6$ и $x + 4 = x - 3$ со исто дефиниционо множество D = {– 2, –1, 0, 1, 2, 3}.

- Воочи на табелата за која вредност на променливата x равенката преминува во точно бројно равенство.
- Провери дали е точно пополнета табелата за секоја равенка и за три вредности на непознатата x.

x	–2	–1	0	1	2	3
$2x - 3 = x - 1$	Н	Н	Н	Н	Т	Н
$x^2 + 3 = 4x$	Н	Н	Н	Т	Н	Т
$3(x + 2) = 3x + 6$	Т	Т	Т	Т	Т	Т
$x + 4 = x - 3$	Н	Н	Н	Н	Н	Н

Т – точно; Н – неточно

- Од табелата воочуваш дека:

☞ равенката $2x - 3 = x - 1$ преминува во точно бројно равенство за $x = 2$;

☞ равенката $x^2 + 3 = 4x$ преминува во точно бројно равенство за $x = 1$ и $x = 3$;

☞ равенката $3(x + 2) = 3x + 6$ преминува во точно бројно равенство за сите вредности на x од D;

☞ равенката $x + 4 = x - 3$ не преминува во точно бројно равенство за ниту една вредност на x од D.

Запомни!

- Равенка што преминува во точно бројно равенство за секоја вредност на $x \in$ D се вика **идентитет**.
- Равенка којашто не преминува во точно бројно равенство за ниту една вредност на променливата од дефиниционото множество се вика **невозможна** или **противречна равенка**.

7. Врз основа на кое својство можеш да тврдиш дека равенката $3(x + 2) = 3x + 6$, $x \in \mathbf{R}$ е идентитет?

8. Кои од следниве равенки се идентитети:
а) $x + 5 = 5 + x$, $x \in \mathbf{R}$; б) $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$, $x \in \mathbf{Z}$; в) $2x - 3 = x - 1$?

9. Одреди која од следниве равенки е противречна:

а) $2x - 1 = x + 2$; б) $3 - x = 5 - x$; в) $x+\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2}$.

Треба да знаеш:

- да дефинираш равенка и дефиниционо множество на равенка;
- да дефинираш идентитет;
- да дефинираш противречна равенка.

Провери се!

- Што е претставено со записот $5x - 3 = x + 2$, $x \in \mathbf{Z}$?
- Врз основа на кое својство можеш да тврдиш дека равенката $x + 8 = 8 + x$ е идентитет?

Задачи

1. Одреди кои од следниве равенства се точни:

а) $3 + 2 \cdot 4 = 20 : 5 + 7$;

б) $3x + 1 = 2x - 1$ за $x = 2$;

в) $x - 3 = 2x + 1$ за $x = -4$.

2. Одреди кои од следниве равенства се равенки:

а) $15 \cdot 1 - 4 = 8 + 3$;

б) $4x - 5 = 3x - 2$;

в) $x^2 - 3 = 4x$.

3. За која вредност на $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ равенката $2x - 3 = x - 1$ преминува во точно бројно равенство?

4. Провери дали е идентитет некоја од равенките $x^2 + 6 = 5x$ и $5(x - 1) = 5x - 5$ при исто дефиниционо множество D = $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

5. Провери кои од следниве равенки се противречни равенки:

а) $2x - 3 = 2x + 5$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$;

б) $x^2 - 1 = x^2 + 4$, $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$;

в) $3x - 4 = x + 2$, $x \in \{2, 3, 4, 5\}$.

6. Одреди ја вредноста на a, така што за $x = 3$ равенката $ax - 2 = 2x + 1$ да премине во точно бројно равенство.

2 ВИДОВИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Ти учеше што е равенка. На пример, равенки се:
  - $3x - 2 = x + 4$;
  - $x + 2y + 1 = x + y$;
  - $x + 2y - z = 4$.
- Именувај ги непознатите во секоја од нив.

А **1.** Дадени се равенките:

$3x - 2 = 2x + 1$; $3x - y = y + 2$;

$5x - 2y = 3z - 4$.

- Одреди го бројот на непознатите во секоја од дадените равенки.

Можеш да воочиш дека:
равенката $3x - 2 = 2x + 1$ има само една непозната x,
равенката $3x - y = y + 2$ има две непознати x и y,
а равенката $5x - 2y = 3z - 4$ има три непознати x, y и z.

Согледа дека некои равенки имаат една непозната, некои две непознати, некои три непознати итн.

Според бројот на непознатите, равенките можат да бидат: *равенки со една непозната*, *равенки со две непознати*, *равенки со три непознати* итн.

2. Со колку непознати е секоја од следните равенки:

- $2x - 3y = 5 - 2x$;
- $3x - 7 + 2x = 1 + x + 3x$?

3. Запиши една равенка со непознати x и y.

Потсети се!

- **Степен на полином** во нормален вид е најголемиот од степените на мономите што се членови на полиномот.
- Одреди го степенот на секој од полиномите:
  а) $x^2 - 2x + 3$; б) $x^3 + x^2y^2 - x^2$.

Б **4.** Одреди кој од мономите од левата и од десната страна на равенката има највисок степен.

а) $2x + 3 = 5x - 2$;
б) $x^2 - 2x = 5x + 8$;
в) $2x^3 - x^2 = 5 + x$.

Равенката $2x + 3 = 5x - 2$ е составена од мономите: $2x$, 3, $5x$ и -2. Тие се **членови** на равенката.

Воочи ги во табелата членовите на равенките со највисок степен.

	Равенка	Член со највисок степен	Степен на членот
1	$2x + 3 = 5x - 2$	$2x$ и $5x$	од прв степен
2	$x^2 - 2x = 5x + 8$	x^2	од втор степен
3	$2x^3 - x^2 = 5 + x$	$2x^3$	од трет степен

Воочи дека во некои равенки членовите што ја содржат непознатата се од прв степен, во други има барем еден член кој е од втор степен, во трети има барем еден член кој е од трет степен итн.

Запомни!

Според членот со највисок степен, равенките можат да бидат: *равенки од прв степен* или *линеарни равенки*, *равенки од втор степен* или *квадратни равенки*, *равенки од трет степен* или *кубни равенки* итн.

5. Одреди од кој степен е секоја од дадените равенки:

- $2x + y - 7 = 5$;
- $x^2 + 7 = 2x$;
- $x^3 - 2x^2 = 5x + 8$;
- $x^2y - 3x = 5y - 2$.

В **6.** Дадени се равенките

а) $2x - 1 = 3$; б) $3x + 5y = 4$; в) $3x^2 - 1 = 6x$; г) $8x - 3 = x + 2$.

- Одреди кои од нив се со една непозната и од прв степен.

Согледа дека равенките $2x - 1 = 3$ и $8x - 3 = x + 2$ се со една непозната и од прв степен.

Општо, равенки со една непозната од прв степен се викаат **линеарни равенки со една непозната**.

7. Која од следниве равенки е линеарна равенка со една непозната:

а) $5x^2 - 2 = 3x$; б) $2x - 3 = 5 - x$; в) $5x + y = 7$?

8. Дадени се линеарните равенки со една непозната x:

а) $8 - 2x = x + \frac{1}{2}$; б) $ax + 5 = x$; в) $ax + b = 0$; г) $x - 1 = 3x$.

- Во што се разликуваат равенките а) и г) од равенките б) и в)?

Согледа дека, не земајќи ја предвид непознатата, сите членови на равенките а) и г) содржат само дадени реални броеви, а некои членови во равенките б) и в) содржат **општи броеви**, т.е. букви коишто се замена за одредени броеви.

Општо, равенки во кои некои членови содржат општи броеви (параметри) се викаат **равенки со параметри** или **параметарски равенки**.

9. Која од следниве равенки со непозната x е равенка со параметар:

а) $ax + 2 = 5x$; б) $\frac{1}{2}x + 3 = 0$; в) $x - 6 = p$?

Треба да знаеш:

- да разликуваш и да именуваш равенки:
  - според бројот на непознатите;
  - според степенот на непознатите;
- да препознаеш линеарна равенка со една непозната со параметар или без параметар.

Провери се!

Од кој вид е равенката $5x - xy = 2x - 3$ според:

- бројот на непознатите;
- степенот?

Задачи

1. Одреди со колку непознати е секоја од равенките:

а) $x + y + z = 2x + 8$;

б) $3x - 15 = 7 - 2x$;

в) $10\,xy - 12y = 10 + x$.

2. Одреди од кој степен е секоја од равенките:

а) $x^3 + x^2 = 5 - x$;

б) $3xy - 5 = 2x + y$;

в) $x + 3 = 3x - 5$.

3. Кои од следниве равенки со променливи x или y се со параметри:

а) $ax + 2y = 5 - x$; б) $3x^2 + 1 = 2x$;

в) $ax + c = by + 3$; г) $5x - 7 = 2x - 5$?

4. Одреди која од следниве равенки е линеарна равенка.

а) $x + 2y = 7 + 2x$; б) $xy^2 + y = 3 + 5x$;

в) $3x - 1 = x + 5$.

5. Одреди која од следниве равенки е линеарна равенка со една непозната.

а) $2x - 1 + y = 5x + 3$;

б) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

в) $3x - 2 = 5 + x$;

г) $3x - 7 + 2x = 11 - x$.

3 РЕШЕНИЕ НА РАВЕНКА. ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Израз со променлива преминува во броен израз ако променливата се замени со некој број.
- Претстави го во броен израз изразот со променлива $x^2 + 2x - 1$ за $x = 2$.
- Пресметај ја бројната вредност на изразот $a^2 - 2a + 5$, за $a = -3$.

А

1. Дадена е равенката $3x - 2 = 2x + 1$, со дефиниционото множество $D = \{-3, -2, 2, 3\}$.

- Претстави ја равенката во бројно равенство за секој $x \in D$.
- За која вредност на $x \in D$ равенката преминува во точно бројно равенство?

- Спореди го твоето решение според податоците во табелата.

Равенка	x	Бројно равенство	Точно – Т Неточно – Н
$3x - 2 = 2x + 1$	–3	$3 \cdot (-3) - 2 = 2 \cdot (-3) + 1$	Н
	–2	$3 \cdot (-2) - 2 = 2 \cdot (-2) + 1$	Н
	2	$3 \cdot 2 - 2 = 2 \cdot 2 + 1$	Н
	3	$3 \cdot 3 - 2 = 2 \cdot 3 + 1$	Т

- Од табелата можеше да воочиш дека равенката $3x - 2 = 2x + 1$ преминува во точно бројно равенство, односно левата и десната страна имаа еднакви бројни вредности само за $x = 3$.

Запомни!

Секоја вредност на непознатата за која равенката преминува во точно бројно равенство се вика **решение** или **корен на равенката**.

2. Најди ги сите решенија на равенката $12 - 2x = x - 3$, $x \in \{3, 5, 7\}$.

3. Одреди ги сите решенија на равенката $x^2 + 6 = 5x$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- Во задачите 2 и 3 можеше да согледаш дека решение на равенката $12 - 2x = x - 3$ е 5, а решенија на равенката $x^2 + 6 = 5x$ се 2 и 3.

Воочи и запомни!

- **Да се реши** една **равенка** значи да се најдат сите нејзини решенија.
- Сите решенија на една равенка образуваат множество кое се вика **множество решенија** на таа равенка.
- Множеството решенија на една равенка најчесто се означува со M.

На пример, множеството решенија на равенката $12 - 2x = x - 3$, $x \in \{3, 5, 7\}$ е $M = \{5\}$, а на равенката $x^2 + 6 = 5x$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ е $M = \{2, 3\}$.

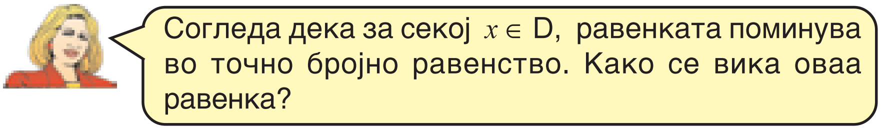
4. Одреди го множеството решенија на равенката, за $x \in \{0, 1, 2, 3\}$:

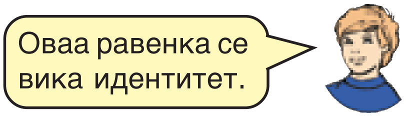
а) $4x - 1 = x + 5$; б) $x^2 + 3 = 4x$.

5. Одреди го множеството решенија на равенката $3(x - 2) = 3x - 6$, ако $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- Воочи го од табелата множеството решенија на равенката $3(x - 2) = 3x - 6$.

x	–2	–1	0	1	2
Бројно равенство	$3(-2-2)=3\cdot(-2)-6$	$3(-1-2)=3\cdot(-1)-6$	$3(0-2)=3\cdot(0)-6$	$3(1-2)=3\cdot1-6$	$3(2-2)=3\cdot2-6$
Точно – Т Неточно – Н	Т	Т	Т	Т	Т





- Општо, идентитет е равенка за која секој број од дефиниционото множество D е нејзино решение, т.е. M = D.

6. Провери дали равенката $2x - 2 = 2(x - 1)$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ е идентитет.

7. Дадена е равенката $x + 5 = x - 4$ и $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- За која вредност на $x \in D$ оваа равенка преминува во точно бројно равенство?
- Што заклучуваш?

- Спореди го твоето решение со податоците од табелата.

x	–2	–1	0	1	2
Бројно равенство	$-2 + 5 = -2 - 4$	$-1 + 5 = -1 - 4$	$0 + 5 = 0 - 4$	$1 + 5 = 1 - 4$	$2 + 5 = 2 - 4$
Точно – Т Неточно – Н	Н	Н	Н	Н	Н

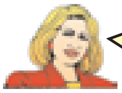
Значи не постои број $x \in D$ којшто е решение на равенката $x + 5 = x - 4$, т.е. $M = \varnothing$.

Општо, равенка чиешто множество решенија е празното множество е **невозможна**, т.е. **противречна равенка**.

8. Кои од следниве равенки со $D = \{1, 2, 3, 4\}$ се невозможни:

а) $x + 3 = 7 + x$; б) $2x + 1 = 7$; в) $3 + 2x = 2x - 5$; г) $3x - 1 = 2x + 1$?

9. Провери дали равенката $x + 7 = 4$ има решение во множеството а) **N**; б) **Q**.



Има ли во множеството **N** број кој собран со 7 дава збир 4? Дали има таков број во множеството **Q**?

Во множеството **N** не постои број кој собран со 7 дава збир 4, т.е. равенката $x + 7 = 4$ нема решение во **N**.
Во множеството **Q** решение на равенката $x + 7 = 4$ е $x = -3$, бидејќи $-3 + 7 = 4$ е точно равенство.

Запомни

Постојат равенки кои во едно множество имаат решение, а во друго немаат решение, т.е. се невозможни.

В **10.** Одреди го множеството решенија на секоја од равенките: $2x - 1 = x + 1$, $x^2 + 2 = 3x$ и $4x - 3 = 2x + 1$, ако дефиниционото множество на секоја од нив е $D = \{0, 1, 2, 3\}$.

Спореди го твоето решение со податоците во табелата. Воочи кои вредности на x се решенија на равенките.

x Равенка	0	1	2	3
$2x - 1 = x + 1$	$2 \cdot 0 - 1 \neq 0 + 1$	$2 \cdot 1 - 1 \neq 1 + 1$	$2 \cdot 2 - 1 = 2 + 1$	$2 \cdot 3 - 1 \neq 3 + 1$
$x^2 - 2 = 3x$	$0^2 + 2 \neq 3 \cdot 0$	$1^2 + 2 = 3 \cdot 1$	$2^2 + 2 = 3 \cdot 2$	$3^2 + 2 \neq 3 \cdot 3$
$4x - 3 = 2x + 1$	$4 \cdot 0 - 3 \neq 2 \cdot 0 + 1$	$4 \cdot 1 - 3 \neq 2 \cdot 1 + 1$	$4 \cdot 2 - 3 = 2 \cdot 2 + 1$	$4 \cdot 3 - 3 \neq 2 \cdot 3 + 1$

Кои од дадените равенки имаат еднакви множества решенија?

Множеството решенија на равенката $2x - 1 = x + 1$ е $\{2\}$, на равенката $x^2 + 2 = 3x$ е $\{1, 2\}$ и на равенката $4x - 3 = 2x + 1$ е $\{2\}$.
Равенките: $2x - 1 = x + 1$ и $4x - 3 = 2x + 1$ имаат еднакви множества решенија.

Две равенки со исто дефиниционо множество што имаат еднакви множества решенија се викаат **еквивалентни равенки**.

11. Одреди кои од равенките дефинирани во множеството А = {0, 1, 2, 3} се еквивалентни:

а) $3x - 1 = x + 1$; б) $x^2 - 2 = x$; в) $(x - 1)(x - 2) = 0$; г) $4x - 2 = x + 1$.

Треба да знаеш:

- да провериш дали даден број е решение на дадена равенка;
- да дефинираш кои равенки се еквивалентни.

Провери се!

- Дадени се равенките: $2x + 1 = 3x - 1$ и $x + 5 = 3x + 1$.
- Провери дали некоја од овие равенки е еквивалентна со равенката $3x + 2 = 4x$, во множеството А = {1, 2, 3, 4}.

Задачи

1. Одреди кое од следниве тврдења е точно.

а) Бројот –2 е решение на равенката $3x - 1 = x + 2$.

б) Бројот 4 е решение на равенката $2y - 1 = y + 3$.

в) Бројот 0 е решение на равенката $2x - 3 = x - 3$.

2. За која вредност на параметарот a, бројот 3 е решение на равенката $2x - 1 = a$?

3. Одреди го множеството решенија на секоја од дадените равенки, ако дефиниционото множество им е А = {2, 3, 4}.

а) $4x - 1 = 3x + 1$; б) $x + 3 = 2x$;

в) $2x - 3 = x + 1$.

4. Множеството решенија на равенката $(x - 1)(x - 2) = 0$, $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, е {1, 2}. Која од следните равенки:

а) $3x - 2 = 2x - 1$; б) $x^2 + 1 = 3x - 1$;

в) $2x + 1 = 3x - 1$

е еквивалентна со дадената?

5. Одреди која од следниве равенки е невозможна во множеството **Z**.

а) $2x + 7 = 3$; б) $x + 5 = x - 2$;

в) $x - 4 = -x$.

6. Која од следниве равенки е невозможна во множеството **N**, а има решение во **Z**:
а) $x + 5 = 2$; б) $2x - 1 = 3$; в) $8 - x = 9$?

4 ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ – 1

Потсети се!

- Две равенки се еквивалентни ако множествата решенија им се еднакви.
- Провери дали се еквивалентни равенките, во дефиниционото множество D $\in$ {1, 2, 3, 4}:

  $2x - 1 = x + 2$ и $x + 4 = 2x + 1$.

1. Дадена е равенката $3x - 1 = x + 5$, $x \in \{1, 2, 3, 4\} = D$, чиешто решение е бројот 3 и $M = \{3\}$.

- На левата и на десната страна на равенката додај: а) 4; б) –2; в) $2x$.
- Провери дали добиените равенки се еквивалентни со дадената.

Спореди го твоето решение со даденото.

	Равенка	Бројно равенство за $x = 3$	Решение на равенката
▼	$3x - 1 = x + 5$	$3 \cdot 3 - 1 = 3 + 5$; $8 = 8$	Бројот 3
☞ а)	$3x - 1 + 4 = x + 5 + 4$	$3 \cdot 3 - 1 + 4 = 3 + 5 + 4$; $12 = 12$	Бројот 3
☞ б)	$3x - 1 - 2 = x + 5 - 2$	$3 \cdot 3 - 1 - 2 = 3 + 5 - 2$; $6 = 6$	Бројот 3
☞ в)	$3x - 1 + 2x = x + 5 + 2x$	$3 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 3 = 3 + 5 + 2 \cdot 3$; $14 = 14$	Бројот 3

☞ Провери дека равенките а), б) и в) немаат друго решение во множеството D, освен бројот 3.

☞ Од табелата воочи дека со додавање ист број (4 или –2) или израз со променливата ($2x$) на двете страни на равенката $3x - 1 = x + 5$ се добива равенка еквивалентна со дадената.

Тоа важи општо за равенките. Може да се искаже со следната *теорема за додавање ист број или израз* на двете страни од равенката.

Теорема 1

☞ Ако кон левата и десната страна на равенката $A(x) = B(x)$ се додаде ист број $c \in \mathbf{R}$ или израз $C(x)$ со променлива x, којшто е определен за секој x од дефиниционото множество на равенката, се добива равенка еквивалентна со дадената. Запишуваме:

$$A(x) = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x) + C(x) = B(x) + C(x).$$

Знакот $\Leftrightarrow$ го читаме „е еквивалентна со“.

Не е задолжително...

Разгледај го доказот на теоремата.
Дадена е равенката $A(x) = B(x)$ со дефиниционо множество D и изразот $C(x)$ определен за секој $x \in D$. Треба да се докаже: $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$.

За да ја докажеш теоремата треба да покажеш дека $A(x) = B(x)$ и $A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$ имаат еднакви множества решенија, т.е.
а) секое решение на $A(x) = B(x)$ е решение на $A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$ и
б) секое решение на $A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$ е решение на $A(x) = B(x)$.

а) Нека $x_o \in D$ е решение на равенката $A(x) = B(x)$, т.е. $A(x_o) = B(x_o)$ е точно бројно равенство. Бидејќи $C(x_o)$ е реален број следува дека равенството $A(x_o) + C(x_o) = B(x_o) + C(x_o)$ е точно бројно равенство. (Зошто?)
Според тоа, x_o е решение на равенката $A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$, т.е. секое решение на равенката $A(x) = B(x)$ е решение на равенката $A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$.

б) Нека $x_1 \in D$ е решение на равенката $A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$, т.е. $A(x_1) + C(x_1) = B(x_1) + C(x_1)$ е точно бројно равенство. Ако на двете страни од ова равенство додадеме спротивен број на $C(x_1)$, ќе добиеме точно бројно равенство $A(x_1) = B(x_1)$. Според тоа, x_1 е решение на равенката $A(x) = B(x)$, т.е. секое решение на равенката $A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$ е решение на равенката $A(x) = B(x)$.

2. Според T_1 провери кои од следниве равенки се еквивалентни:

а) $3x + 1 = 5x - 3$ и $3x + 1 + 7 = 5x - 3 + 7$;

б) $5y - 2 = 3y + 4$ и $5y - 2 - 5 = 3y + 4 + 5$;

в) $4x - 1 = 3x - 2$ и $4x + 5x - 1 = 3x + 5x - 2$.

Со примена на теоремата 1 можеш да вршиш *еквивалентни трансформации* на равенките. Една равенка можеш да ја трансформираш во поедноставна равенка, еквивалентна на неа.

3. Дадена е равенката $3x - 5 = 2x + 1$.

- Додај го изразот $5 - 2x$ на двете страни од равенката.
- Доведи ги во нормален вид изразите на двете страни од равенката.
- Воочи што се случило со $2x$ и -5 во добиената равенка.

На што е еднаков збирот на спротивни броеви, односно на спротивни мономи?

Збирот на спротивни броеви, а исто така, и на спротивни мономи е нула.

Спореди го твоето решение со даденото.
$3x - 5 = 2x + 1 \Leftrightarrow 3x - 5 + 5 - 2x = 2x + 1 + 5 - 2x \Leftrightarrow 3x - 2x = 1 + 5 \Leftrightarrow x = 6.$

- Согледа дека со трансформации според $\mathbf{T_1}$, од дадената равенка $3x - 5 = 2x + 1$ доби равенка $x = 6$, еквивалентна на неа. Од равенката $x = 6$ може да се прочита решението, т.е. бројот 6 е решение на дадената равенка.
- Равенката $x = a$ $(a \in \mathbf{R})$, од којашто може да се прочита решението, се вика **равенка во решена форма**.
- Воочуваш дека во равенката $3x - 2x = 1 + 5$ мономот $2x$ е пренесен од десната на левата страна на равенката, но со спротивен знак $(-2x)$, а бројот -5 од левата страна е пренесен на десната страна на равенката, но со спротивен знак $(+5)$.
- Тоа што го согледа за еквивалентните равенки $3x - 5 = 2x + 1$ и $3x - 2x = 1 + 5$ важи општо за равенките и е познато како *последица* 1 од $\mathbf{T_1}$. Таа гласи:

> ☞ **П**$_1$ Секој член на равенката може да се пренесе од една страна на равенката на друга, но со спротивен знак.

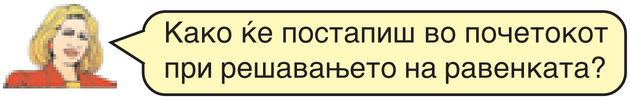
4. Во равенката $4x - 1 + x = 7 + 3x - 2$ членовите што ја содржат непознатата пренеси ги на левата страна на равенката, а оние што не ја содржат – на десната страна од равенката.

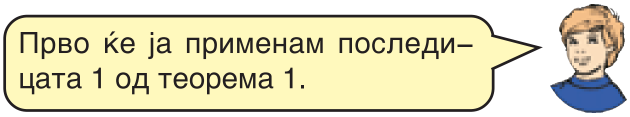
5. Кои од равенките се еквивалентни:

а) $x + 3 = 2x - 1$ и $x - 2x = -1 - 3$; б) $2x + 5 = 4x + 1$ и $2x - 4x = 1 - 5$;

в) $3x + 1 = 2x + 3$ и $3x + 2x = 3 + 1$?

6. Реши ја равенката $4x - 8 = 3x - 10$, а потоа провери го решението.





- Спореди го твоето решение со даденото.

$$4x - 8 = 3x - 10 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 3x = -10 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2;\ \text{M} = \{-2\}.$$

Проверка: $4 \cdot (-2) - 8 = 3 \cdot (-2) - 10$; $-8 - 8 = -6 - 10$; $-16 = -16$.

7. Реши ја равенката:

а) $5x - 7 = 4x + 2$; б) $3x - 4 = 2 + 2x$; в) $\frac{1}{2}x - 1 = 2 - \frac{1}{2}x$.

В **8.** Дадена е равенката $4x - 1 + 2x - 2 = 2x - 1 + 3x - 5$.

- Воочи дали има еднакви членови на левата и десната страни на равенката.
- Изостави ги еднаквите членови од двете страни на равенката и провери дали добиената равенка е еквивалентна со дадената.

- Спореди го твоето решение со даденото.

Дадената равенка

$4x - 1 + 2x - 2 = 2x - 1 + 3x - 5$

$\Leftrightarrow 4x + 2x - 2x - 3x = 1 - 1 + 2 - 5$

$\Leftrightarrow 4x - 3x = 2 - 5$

$\Leftrightarrow x = -3$

$M = \{-3\}$

Добиената равенка

$4x - 2 = 3x - 5$

$\Leftrightarrow 4x - 3x = 2 - 5$

$\Leftrightarrow x = -3$

$M = \{-3\}$

- Воочуваш дека ако од равенката ги изоставиш еднаквите членови ($2x$, односно -1), што се наоѓаат на спротивни страни на равенката, се добива равенка еквивалентна со дадената.
- Тоа што го согледа важи општо за равенките и е познато како последица 2 на теоремата 1. Таа гласи:

> **$П_2$** Ако на двете страни на равенката има еднакви членови, тогаш тие може да се изостават (да се поништат).

9. Во равенката $3x - 2 + 4x + 3 = 3 + 2x + 4x$ изостави ги членовите за кои тоа е можно, за да добиеш равенка еквивалентна со дадената, а потоа реши ја добиената равенка.

Треба да знаеш:

- да ја искажеш теоремата 1 за еквивалентни равенки;
- да ја искажеш и да ја примениш во задачи последицата 1 од теоремата 1;
- да ја искажеш и да ја примениш последицата 2 од теоремата 1.

Провери се!

- Во равенката $7x - 3 + 5x = 5 + 2x - 3$ групирај ги членовите што содржат непозната на левата страна, а останатите членови на десната страна од равенката.
- Покажи со еквивалентни трансформации дека: $3x - 2 + x = 4 + x - 2 + x \Leftrightarrow 2x = 4$.

Задачи

1. Дадена е равенката $2x - 3 = x + 1$. Додај $3x$ на двете страни на равенката.

- Провери дали добиената равенка е еквивалентна со дадената.

2. Објасни ја еквиваленцијата:
$7x - 3 = 5x + 1 \Leftrightarrow 7x - 3 + 2x = 5x + 1 + 2x$.

3. Во равенката $2x - 5 - 3x - 4 = 4 - 3x - 5$ изостави ги членовите за кои тоа е можно, за да добиеш равенка еквивалентна со дадената.

4. Со еквивалентни трансформации покажи дека: $3x - 2 + x = 5 + 2x - 3 \Leftrightarrow 2x = 4$.

5. Одреди го m, така што да биде точна еквиваленцијата:
$3x - 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow 3x - 1 + 5x = 2x - 3 + m$.

6. Утврди дали се еквивалентни следниве две равенки:

а) $2x - 1 = x + 3$ и $2x - 1 + 5 = x + 3 + 5$;

б) $4x - 1 = 2x + 5$ и $4x - 2x = 5 + 1$;

в) $3x - 2 = 2x + 1$ и $3x + 2x = 1 - 2$.

Образложи го одговорот.

7. Реши ја равенката:
а) $3 - 7x = 2 - 8x$;

б) $\frac{3}{4}x + 1 + 2x = 5 + 2x - \frac{1}{4}x$.

5 ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ – 2

Потсети се!

- Во даден производ, непознатиот множител се одредува, ако производот се подели со познатиот множител.
- Реши ги равенките:

а) $2x = 4$; б) $\frac{1}{2}x = 3$; в) $\frac{3}{4}x = 3x$.

- Одреди го НЗС(4, 5, 10).
- Пресметај:

$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

A **1.** Дадена е равенката $2x - 3 = x - 1$.

- Реши ја дадената равенка.
- Помножи ги двете страни на дадената равенка со: а) 2; б) –4.
- Провери дали добиените равенки се еквивалентни со дадената.

Како ќе провериш дали дадената равенка е еквивалентна со добиената?

Ќе ги решам равенките со помош на последицата 1 од теоремата T_1, а потоа ќе ги споредам нивните множества решенија.

- Спореди го твоето решение со даденото

Дадената равенка

$2x - 3 = x - 1$

$\Leftrightarrow 2x - x = -1 + 3$

$\Leftrightarrow x = 2$

M = {2}

Добиена равенка а)

$2x - 3 = x - 1 \;/ \cdot (2)$

$\Leftrightarrow 2x \cdot 2 - 3 \cdot 2 = x \cdot 2 - 1 \cdot 2$

$\Leftrightarrow 4x - 2x = -2 + 6$

$\Leftrightarrow 2x = 4$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 2$

M = {2}

Добиена равенка б)

$2x - 3 = x - 1 \;/ \cdot (-4)$

$\Leftrightarrow 2x \cdot (-4) - 3 \cdot (-4) = x \cdot (-4) - 1 \cdot (-4)$

$\Leftrightarrow -8x + 12 = -4x + 4$

$\Leftrightarrow 12 - 4 = -4x + 8x$

$\Leftrightarrow 8 = 4x$

$\Leftrightarrow x = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x = 2$

M = {2}

- Воочи дека дадената равенка и добиените имаат исто множество решенија.

Какви трансформации изврши во равенката $2x - 3 = x - 1$ и какви равенки доби?

Двете страни на равенката ги помножив со 2, односно со –4 и добив равенки еквивалентни со дадената.

- Тоа важи општо за равенките. Можеме да искажеме *теорема за множење, односно делење равенки со ненулти број*.

Теорема 2

☞ Ако двете страни на равенката $A(x) = B(x)$ се помножат или се поделат со еден ист број $a \neq 0$, се добива равенка еквивалентна со дадената.

☞ $$A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot a = B(x) \cdot a.$$

2. Утврди со помош на T_2 дали се еквивалентни следниве равенки:

а) $5x + 3 = 2x + 9$ и $10x + 6 = 4x + 18$;

б) $8x - 12 = 4 + 4x$ и $2x - 3 = 1 + x$;

в) $2x - 3 = x - 1$ и $2x - 3 = 5x - 5$;

г) $3x - 1 = 2x + 1$ и $-6x + 2 = -4x - 2$.

3. Реши ги равенките:

а) $3 - 12x = -3x - 15$;   б) $-8x + 4 = 12 - 4x$.

Воочи ја постапката а).

$3 - 12x = -3x - 15 \Leftrightarrow -12x + 3x = -15 - 3$ ☜ Според $П_1$ од T_1.

$\Leftrightarrow -9x = -18$ / :(–9) ☜ Според T_2.

$\Leftrightarrow x = 2$; М = {2}.

Б **4.** Дадена е равенката $5x - 2 = 3x + 4$.

- Реши ја равенката.
- Помножи ги двете страни на равенката со –1.
- Зошто добиената равенка е еквивалентна со дадената?
- Покажи дека добиената равенка е еквивалентна со равенката $x = 3$.

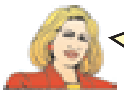
Воочи ги дадената и добиената равенка.

$5x - 2 = 3x + 4$ ☜ Дадената равенка

$5x - 2 = 3x + 4$ / ·(–1)

$\Leftrightarrow 5x \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = 3x \cdot (-1) + 4 \cdot (-1)$ ☜ Според T_2.

$\Leftrightarrow -5x + 2 = -3x - 4$ ☜ Добиената равенка



Двете страни на равенката $5x - 2 = 3x + 4$ ги помножи со –1. Што забележуваш кај добиената равенка $-5x + 2 = -3x - 4$?

- Добиената равенка е еквивалентна со дадената, според T_2.
- Членовите на дадената и добиената равенка се со спротивни знаци.

■ Тоа важи општо за равенките. Можеме да ја искажеме следнава последица од T_2.

☞ **$П_1$** Ако сите членови на равенката се помножат со –1, тогаш се добива равенка еквивалентна на дадената, т.е. ако сите членови на равенката се заменат со нивните спротивни, се добива равенка еквивалентна на дадената.

5. Реши ги равенките: а) $2x - 1 = 3x - 5$; б) $4x + 2 = 5x - 1$;

■ Спореди го твоето решение а).
$2x - 1 = 3x - 5 \;\Leftrightarrow\; 2x - 3x = -5 + 1 \;\Leftrightarrow\; -x = -4 \,/\cdot(-1) \;\Leftrightarrow\; x = 4$; $M = \{4\}$.

6. Равенката $\frac{x-1}{2}+\frac{3x-1}{4}=\frac{x-9}{3}$ трансформирај ја во равенка без именители.

■ Колку е НЗС(2, 4, 3)?

■ Како ќе се ослободиш од именителите во равенката?

НЗС(2, 4, 3) = 12. Двете страни на равенката ќе ги помножам со 12 и ќе добијам равенка без именители.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

$\frac{x-1}{2}+\frac{3x+1}{4}=\frac{x-9}{3}$	☞ НЗС (2, 3, 4) = 2 · 2 · 3 = 12.
$\Leftrightarrow\; 12\cdot\frac{x-1}{2}+12\cdot\frac{3x+1}{4}=12\cdot\frac{x-9}{3}$	☞ Двете страни на равенката се помножени со НЗС (2, 3, 4), т.е. со 12.
$\Leftrightarrow\; 6(x-1) + 3(3x+1) = 4(x-9)$	☞ Скратување на именителите со 12.
$\Leftrightarrow\; 6x - 6 + 9x + 3 = 4x - 36$	☞ Ослободување од заградите.

● Покажи дека равенката $6x - 6 + 9x + 3 = 4x - 36$ е еквивалентна со равенката $x = -3$.

■ Воочуваш дека со множењето на членовите на равенката $\frac{x-1}{2}+\frac{3x+1}{4}=\frac{x-9}{3}$ со најмалиот заеднички содржател на именителите се добива равенка без именители $6x - 6 + 9x + 3 = 4x - 36$, еквивалентна на дадената.

■ Тоа што го воочи за равенката $\frac{x-1}{2}+\frac{3x+1}{4}=\frac{x-9}{3}$ важи општо за равенките. Можеме да ја искажеме следнава последица од теоремата 2.

☞ **$П_2$** Ако некои членови на равенката имаат именители, тогаш од именителите можеме да се ослободиме со множење на двете страни од равенката со нивниот најмал заеднички содржател.

7. Ослободи се од именителите во равенката $\frac{2x-1}{5}=\frac{x+1}{4}$, а потоа реши ја.

Треба да знаеш:

- да ја искажеш теоремата 2 за еквивалентни равенки;
- да ги искажеш последиците од теоремата 2;
- да ги примениш последиците од теоремата 2 во решавање задачи.

Провери се!

- Реши ја равенката:
  а) $5x - 3 = 3x - 1$; б) $6x - 1 = 7x$.
- Ослободи се од именителите во равенката $\frac{3x-1}{4}-\frac{x+2}{3}=\frac{x+2}{6}$ и покажи дека таа е еквивалентна на равенката $x = 5$.

Задачи

1. Во равенката $3 - x = 7 - 3x$ двете страни помножи ги со –2.

- Покажи, според решенијата, дека добиената равенка е еквивалентна со дадената.

2. Во равенката $12x - 9 + 3x = 9x + 3$ двете страни подели ги со 3 и покажи дека добиената равенка е еквивалентна со дадената. (Спореди ги нивните решенија.)

3. Дали се еквивалентни дадените две равенки? Образложи го твојот одговор.

а) $3x - 1 = x + 3$ и $6x + 2 = 2x + 6$;

б) $-2x + 3 = -3x + 5$ и $2x - 3 = 3x - 5$;

в) $4x - 1 = 3x + 2$ и $4x + 1 = 3x + 2$.

4. Во равенката $2x - 3 = 3x - 5$ замени ги сите членови со нивните спротивни и провери според решенијата дека добиената равенка е еквивалентна со дадената.

5. Ослободи се од именителите во равенките и реши ги.

а) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{5}=\frac{x+3}{10}$;

б) $\frac{2x-3}{3}-\frac{x+3}{6}=\frac{x-3}{2}$.

6. Со користење на теоремите за еквивалентни равенки и последиците од нив, покажи дека: $\frac{x-1}{2}+\frac{x+1}{4}=\frac{2x}{3}\Leftrightarrow x=3$.

Обиди се ...

- Шише со тапа чини 11 денари, а само шишето (без тапа) е 10 денари поскапо од тапата. Колку чини шишето, а колку тапата?

6 ОПШТ ВИД НА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Потсети се!

- Во изразот $ax + b$ со променлива x, a и b се коефициенти.
- Одреди ги коефициентите во изразот со променлива x: а) $2x - 5$; б) $ax+\frac{1}{2}$.
- Според $П_1$ од $Т_1$ за еквивалентни равенки, секој член од равенката може да се пренесе од една на друга страна на равенката, но со спротивен знак.
- Дали се еквивалентни равенките:

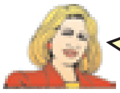
  а) $4x - 3 = 2x + 1$ и $4x - 2x = 1 + 3$;

  б) $4x - 3 = 2x + 1$ и $4x + 2x = 1 - 3$?

  Образложи го одговорот.

А **1.** Дадена е равенката $4x - 5 = 2x - 1$.

- Сите членови на равенката пренеси ги на десната страна и потоа изврши ги операциите.
- Дали добиената равенка е еквивалентна со дадената? Зошто?



Која последица од теоремите за еквивалентни равенки можеш да ја примениш при решавањето на оваа задача?

Според последицата 1 од теоремата 1 за еквивалентни равенки, членовите од левата страна на равенката ќе ги пренесам на десната, но со спротивниот знак.

- Спореди го твоето решение со даденото. $4x - 5 = 2x - 1 \Leftrightarrow 4x - 5 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$. Равенката $2x - 4 = 0$ е еквивалентна со равенката $4x - 5 = 2x - 1$.
- За равенката $2x - 4 = 0$ се вели дека е *нормален вид* на равенката $4x - 5 = 2x - 1$.

Запомни!

- Равенката $ax + b = 0$ се вика **општ** или **нормален вид** на линеарна равенка со една непозната, каде што x е непозната, a е **коефициент** пред непознатата и b **слободен член**.

2. Запиши ја во нормален вид равенката $2x - 3 = x - 1$.

Потсети се!

- Кој од следниве изрази нема вредност:

  а) $\frac{5 \cdot 2 - 10}{7 - 3}$; б) $\frac{7-3}{5 \cdot 2 - 10}$?

  Образложи го одговорот.
- За која вредност на a изразот $\frac{5}{a-3}$ нема вредност?
- Одреди го решението на равенката $2x - 6 = 0$.

Б **3.** Дадена е равенката $ax + b = 0$, со непозната x и коефициенти a и b, при што $a \neq 0$.
Одреди го решението на таа равенка.

- Спореди го твоето решавање со даденото

☞ $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, т.е. $-\frac{b}{a}$ е решение на равенката $ax + b = 0$, за $a \neq 0$.

- Количникот $-\dfrac{b}{a}$, за $a \neq 0$, е секогаш еднозначно определен, па според тоа равенката $ax + b = 0$ има само едно решение $x = -\dfrac{b}{a}$, т.е. $\text{M} = \{-\dfrac{b}{a}\}$.

4. Одреди го решението на секоја од следниве равенки:

а) $3x - 6 = 0$; б) $x + 3 = 0$; в) $3x + 1 = 0$.

5. Во равенката $ax + b = 0$, нека $a = 0$ и $b = 4$ $(b \neq 0)$. Одреди го решението на таа равенка.

Согледај со кој број треба да ја делиш равенката.

Бидејќи $a = 0$ и $b = 4$, равенката добива вид $0 \cdot x + 4 = 0$, од каде што $0 \cdot x = -4$. Со нула не се дели. Изразот $-\dfrac{4}{0}$ нема вредност и равенката нема решение.

Воочи

- Во случај кога во равенката $ax + b = 0$, е дадено $a = 0$ и $b \neq 0$, **равенката нема решение**, односно $\text{M} = \varnothing$. За таква равенка се вели дека е **невозможна** или **противречна**.

6. Која од следниве равенки е противречна: а) $3x + 1 = 0$; б) $0 \cdot x - 2 = 0$; в) $3x = 0$?

7. Нека во равенката $ax + b = 0$, $a = 0$ и $b = 0$.

- Запиши ја таа равенка.
- Трансформирај ја добиената равенка во облик $ax = -b$.
- Провери дали -2; 5; $\dfrac{1}{2}$; $x = 3{,}5$ се решенија на трансформираната равенка $0 \cdot x = 0$.

- Воочи дека -2; 5; $\dfrac{1}{2}$ и $3{,}5$ се решенија на равенката $0 \cdot x = 0$.
- Одреди друго решение на оваа равенка.
- На што е еднаков производот од нула и кој било реален број?
- Зошто секој реален број е решение на равенката $0 \cdot x = 0$?

Воочи дека

- Равенката $ax + b = 0$, за $a = 0$ и $b = 0$ има бесконечно многу решенија, и $\text{M} = \mathbf{R}$.

Запомни!

Линеарната равенка $ax + b = 0$:

☞ а) за $a \neq 0$ има единствено решение $x = -\frac{b}{a}$ и $M = \{-\frac{b}{a}\}$.

☞ б) за $a = 0$ и $b \neq 0$ нема решение, т.е. $M = \varnothing$.

☞ в) за $a = 0$ и $b = 0$ има бесконечно многу решенија, при што $M = \mathbf{R}$.

8. Запиши вредности за a и b така што равенката $ax + b = 0$ да:

а) има само едно решение; б) нема решение; в) има бесконечно многу решенија.

9. Реши ја равенката $5x - 7 + x = 1 + 2x$.

Како ќе постапиш при решавањето на дадената равенка?

Прво ќе ги пренесам сите членови што ја содржат непознатата на левата страна на равенката, а оние што не ја содржат – на десната страна. Потоа равенката ќе ја доведам во вид $ax = -b$ и ќе го одредам решението.

Спореди го твоето решавање со даденото.

$5x - 7 + x = 1 + 2x$

$\Leftrightarrow \quad 5x + x - 2x = 1 + 7$ ☞ Примена на $П_1$ од $Т_1$.

$\Leftrightarrow \quad 4x = 8$ ☞ Сведување на изразите од двете страни на равенката.

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{4}$ ☞ Примена на $Т_2$; двете страни на равенката се поделени со 4.

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

Значи, решение на равенката $5x - 7 + x = 1 + 2x$ е 2, т.е. $M = \{2\}$.

10. Реши ја равенката $5x - 1 - x = x + 4 - 2x$.

11. Реши ја равенката $3(x - 1) + x = 2x - 2 - (x - 5)$.

☞ Ослободи се од заградите.

☞ Постапи како во задачата 9.

12. Реши ја равенката $\frac{2x-3}{5} - \frac{3x-4}{3} = \frac{1-14x}{15}$.

Како ќе ја доведеш дадената равенка во равенка без именител, еквивалентна на неа?

Двете страни на равенката ќе ги помножам со НЗС(5, 3, 15) = 15, а потоа ќе продолжам како во претходните задачи!

Спореди го твоето решение со даденото.

$$\frac{2x-3}{5}-\frac{3x-4}{3}=\frac{1-14x}{15}\ /\cdot 15$$

$\Leftrightarrow\ 3(2x-3)-5(3x-4)=1-14x$ ☞ Според $П_2$ од $Т_2$.

$\Leftrightarrow\ 6x-9-15x+20=1-14x$ ☞ Извршено ослободување од загради.

$\Leftrightarrow\ 6x-15x+14x=1+9-20$ ☞ Според $П_1$ од $Т_1$.

$\Leftrightarrow\ 5x=-10$ ☞ Сведување на двете страни на равенката.

$\Leftrightarrow\ x=-\frac{10}{5}$ ☞ Според $Т_2$.

$\Leftrightarrow\ x=-2.$

Значи, решение на дадената равенка е -2, т.е. М={–2}.

Треба да знаеш:

- да доведеш линеарна равенка во општ (нормален) вид;
- да решаваш линеарни равенки со една непозната;
- да одредиш решение на равенката $ax+b=0$ за:
  а) $a\neq 0$; б) $a=0,\ b\neq 0$;
  в) $a=0,\ b=0$.

Провери се!

- Доведи ја во нормален вид равенката $3x+1=2x-2-x$.
- Реши ја равенката $\frac{3x-1}{4}-\frac{x}{3}=\frac{x+6}{6}$

Задачи

1. Доведи ги во нормален вид следниве равенки:

а) $3x+1=x+5$; б) $3x-5=x+1$.

2. Која од следниве равенки е невозможна:

а) $3x=0$; б) $5x=-1$; в) $0\cdot x=4$?

3. Реши ги равенките:

а) $3x-5+2x=7+x-4$;

б) $1{,}4x+2{,}8=0{,}7x+4{,}2$;

в) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x.$

4. За која вредност на променливата x изразите: $2x-8$ и $1-x$ имаат иста бројна вредност?

5. Реши ги равенките:

а) $5(x + 3) = 2(x + 3)$;

б) $2(x + 1) - 3(x - 1) = 4(x + 1) + 1$;

в) $5(x - 1) - 2(x + 1) = 3(x - 2) - (x - 5)$.

6. Реши ги равенките:

а) $\frac{4+x}{6}+\frac{x-4}{2}=\frac{x-1}{3}$;

б) $\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{6}=\frac{x-5}{2}-\frac{x-4}{3}$.

7. Реши ги равенките:

а) $(x - 1)^2 - 2 = x(x - 3) + 2$;

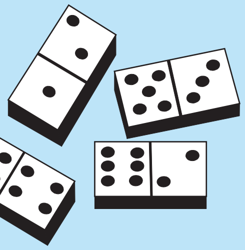
б) $(x - 3)(x + 4) - 2(3x - 2) = (x - 4)^2$;

в) $(x - 2)(x + 2) + 2x = x^2 + 2$.

8. За која вредност на параметарот a равенката $8x - 3a - 5 = 2a + 5x - 16$ има решение $x = 3$?

Трик со домино...

- Покани го твојот другар да избере (или да нацрта) едно домино, а ти да не знаеш кое е. Потоа, задавај му по ред да ги изврши следниве операции:



- Едниот од броевите помножи го со 2.
- Додај 6.
- Помножи го со 5.
- Додај го другиот број од доминото.
- Одземи 30.
- Кажи го бројот што го доби.
- Ти погаѓаш: цифрите на добиениот резултат се броевите на избраното домино!
- Објасни го трикот математички.

7 ПРИМЕНА НА ЛИНЕАРНИТЕ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Потсети се!

- Во изучувањето на математиката често се сретнуваш со задачи во кои зависностите меѓу величините се опишани со зборови, на „говорен” јазик. “Преведувањето” на тие зависности на математички јазик многу често се врши преку равенка.
- Согледај го тоа во следната задача:
- Мајката и синот имаат заедно 32 години. Мајката е за 20 години постара од синот. Колку години има мајката, а колку синот?

А **1.** Мајката сега е трипати постара од ќерката. По 10 години мајката ќе биде двапати постара од ќерката. Колку години сега има мајката, а колку ќерката?

Воочи кои величини и односи меѓу нив се познати, а кои непознати.

Познато е дека мајката е сега трипати постара од ќерката, а по 10 години мајката ќе биде двапати постара од ќерката. Не е познато колку години има ќерката, а колку мајката.

Ако бројот на годините на ќерката го означиш со x, тогаш како ќе го означиш бројот на годините на мајката? Колку години ќе има секоја од нив по 10 години?

Ако бројот на годините на ќерката е x, тогаш мајката сега има $3x$ години. По 10 години ќерката ќе има $(x + 10)$ години, а мајката $(3x + 10)$ години.

- Согледај во табелата кои се зависностите помеѓу величините и како е составена равенката.

	колку години има сега	колку години ќе има по 10 г.	равенка
ќерката	x	$x + 10$	$3x + 10 = 2(x + 10)$
мајката	$3x$	$3x + 10$	

- Реши ја равенката $3x + 10 = 2(x + 10)$.
- Колку години има ќерката?
- Колку години има мајката?
- Решението на равенката е 10.

2. Мајката сега има 36 години, а нејзината ќерка 10 години. По колку години мајката ќе биде трипати постара од ќерката?

- Задачи со текст успешно се решаваат ако се работи според одреден план. Согледај го тоа на следнава задача.

3. На контролна писмена работа наставникот им задал на учениците 15 задачи. За секоја точно решена задача ученикот добивал по 5 поени, а за погрешно решена или нерешавана задача ученикот губел по 2 поени.
Колку задачи решил точно ученик кој на крајот имал 54 поени?

1. Разбирање на задачата

Што е познато во задачата, а што е непознато?

Познато е дека ученикот решавал 15 задачи; за секоја точно решена задача тој добивал по 5 поени, а за нерешена губел 2 поени. На крајот ученикот освоил 54 поени. Не е познато колку задачи ученикот решил точно.

2. Означување на непознатите величини

Означи го бројот на точно решените задачи со x. Како ќе го означиш бројот на нерешените задачи?

Ако бројот на точно решените задачи е x, тогаш бројот на нерешените задачи е $15 - x$.

3. Воочување на врските помеѓу величините

Колку добил ученикот, а колку изгубил?

Ученикот добил $5x$ поени (x задачи по 5 поени), а изгубил $2(15 - x)$ поени ($15 - x$ задачи по 2 поени) и освоил вкупно 54 поени.

4. Составување на равенката

Која равенка од воочените врски помеѓу величините се добива?

Од врската помеѓу величините следува равенката
$5x - 2(15 - x) = 54$.

■ Воочи ги претходните постапки во табелата.

Задачи	Број на задачи	Број на поени по задачи	Равенка
Вкупно	15		$5x - 2(15 - x) = 54$
Точно решени	x	$5x$	
Неточно решени	$15 - x$	$2(15 - x)$	

5. Решавање на равенката

■ Воочи го решавањето на равенката: $5x - 2(15 - x) = 54$.

$5x - 2(15 - x) = 54 \Leftrightarrow 5x - 30 + 2x = 54 \Leftrightarrow 5x + 2x = 54 + 30 \Leftrightarrow 7x = 84 \Leftrightarrow x = \frac{84}{7}$, т.е.

$x = 12$.

6. Одговор на поставеното прашање и проверка

Што покажува решението на равенката?

Ако $x = 12$, тоа значи дека ученикот точно решил 12 задачи, а не решил $15 - 12 = 3$ задачи.

Направи проверка на решението.

12 задачи по 5 поени е 60 поени. 3 задачи по 2 поени е 6 поени. $60 - 6 = 54$ поени.
Значи, решението на задачата е точно.

4. Во една продавница за возила има 22 автомобили и мотоцикли. Тие вкупно имаат 74 тркала. Колку од возилата се автомобили, а колку мотоцикли?

5. Во рамнокрак триаголник кракот е за 2 cm подолг од основата, а неговиот периметар е 25 cm. Определи ги основата и кракот на тој триаголник.

- Воочи го краткиот запис на планот за решавање на оваа задача.

1. Кракот b е за 2 cm подолг од основата a, а периметарот е 25 cm.
2. Ако основата $a = x$, тогаш $b = x + 2$.
3. $a + 2b = \mathrm{L}$.
4. $x + 2(x + 2) = 25$.
5. $x + 2(x + 2) = 25 \Leftrightarrow x + 2x + 4 = 25 \Leftrightarrow x + 2x = 25 - 4 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = \frac{21}{3} \Leftrightarrow x = 7$.

   Значи, основата $a = 7$ cm, а кракот $b = 7 + 2 = 9$ cm.
6. Проверка: $\mathrm{L} = a + 2b$; $\mathrm{L} = 7 + 2 \cdot 9$; $\mathrm{L} = 25$ cm.

- Согледај ја зависноста помеѓу величините во оваа задача во табелава.

Величини	Ознака на величините	Равенка
Основа	$a = x$	$x + 2(x + 2) = 25$
Крак	$b = a + 2$; $b = x + 2$;	
Периметар	L = 25 cm; $\mathrm{L} = 2a + b$; $\mathrm{L} = x + 2(x + 2)$	

6. Должината a на еден правоаголник е за 3 cm поголема од неговата ширина b, а периметарот му изнесува 34 cm. Определи ги должината и ширината на тој правоаголник.

7. Од местото A кон местото B тргнуваат истовремено двајца велосипедисти. Првиот се движел со брзина 16 km/h, а вториот со брзина 12 km/h.
Определи го растојанието меѓу местата A и B, ако првиот велосипедист стигнал 1 час порано од вториот.

- Воочи ја зависноста помеѓу величините во оваа задача во табелава.

	Брзина	Време	Пат	Равенка
Првиот велосипедист	16 km/час	x часа	$\overline{AB} = 16 \cdot x$	$16x = 12(x + 1)$
Вториот велосипедист	12 km/час	$x + 1$часа	$\overline{AB} = 12 \cdot (x + 1)$	

- Реши ја равенката и определи го растојанието меѓу местата A и B.
- Направи проверка на решението на задачата.

Треба да знаеш:

- да ги примениш равенките при решавање текстуални задачи;
- да извршиш проверка на добиеното решение.

Провери се!

- Во еден триаголник една од страните е за 2 cm поголема од другата, а за 1 cm помала од третата.
- Одреди ги страните на триаголникот, ако неговиот периметар е 43 cm.

Задачи

1. Ако кон некој број се додаде 12 и добиениот збир се помножи со 5, се добива 200. Кој е тој број?

2. Збирот на два броја е 180. Првиот е за 36 помал од вториот. Кои се тие броеви?

3. Разликата на два броја е 46. Кога поголемиот број ќе се подели со помалиот се добива количник 4 и остаток 7.
Кои се тие броеви?

4. Во рамнокрак триаголник основата е за 2 cm помала од кракот. Одреди ги основата и кракот на тој триаголник ако неговиот периметар е 43 cm.

5. Милан има 25 монети од 2 и од 5 денари или вкупно 80 денари. Колку монети се од 2 денари, а колку од 5 денари?

6. Стара кинеска задача. Во еден кафез има питоми зајаци и фазани. Тие заедно имаат 35 глави и 94 нозе. Колку се питоми зајаци, а колку фазани?

7. Еден курир го поминува растојанието меѓу местата A и B за одредено време. Ако се движи со брзина 35 km/час, ќе задоцни 2 часа, а ако се движи со брзина 50 km/час, ќе пристигне еден час порано. Одреди го растојанието помеѓу местата A и B.

8. Еден работник сам може да заврши една работа за 6 часа, а друг за 12 часа. За колку часа двајцата ќе ја завршат истата работа?

9. Еден базен се полни од две цевки. Од првата цевка базенот се полни за 4 часа, а од втората за 6 часа. За колку часа ќе се наполни празниот базен, ако во него истовремено се отворат двете цевки?

10. Две цевки можат заедно да наполнат еден базен за 12 часа. Едната цевка сама може да го наполни базенот за 20 часа. За колку часа втората цевка сама ќе го наполни празниот базен?

Обиди се ...
Епитафот на Диофант

На надгробната плоча на старогрчкиот математичар е запишано:
„Патниче, овде се погребани посмртните останки на Диофант. Броевите ќе речат, о чуда, колку бил долг неговиот живот. Прекрасното детство му одзеде шестина од животот, а кога помина уште една дванаесеттина од животот, неговото лице го покри брада. Откако помина уште една седмина од животот, Диофант стапи во среќен брак. Кога поминаа 5 години од бракот, среќен го направи раѓањето на неговиот син првенец, на кого судбината му подари само половина од годините на животот на татко му. Во длабока болка старецот го дочека крајот на земниот живот преживувајќи уште 4 години по изгубувањето на синот“.
Колку години живеел Диофант?

ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

8 ПОИМ ЗА НЕРАВЕНСТВО И НЕРАВЕНКА

Потсети се!

- Бројни изрази се: $5 + 8$, $9 : 3 - 2$, $4{,}6 \cdot 3{,}5 - 1$, $8 : 0{,}2$ и сл.
- Откако ќе се извршат сите операции во изразот се добива број кој се вика *бројна вредност* на изразот.
- Пресметај ја бројната вредност на изразот $15 - 2^2 \cdot 3 - 6{,}4 : 0{,}4$.
- При споредувањето на рационалните броеви си ги користел знаците: =, < и >.
- Кој од знаците: > или < треба да биде во кружчето за да биде точно споредувањето на броевите:
  - 5 ○ −12;
  - 0 ○ 3,5;
  - −1 ○ −5;
  - −4 ○ 0?
- Кои од следниве неравенства се точни:

  а) $7 > 5$; б) $-5 > -4$; в) $-3{,}2 < -2{,}3$?

1. Кој знак треба да биде во кружчето, за да биде точно споредувањето на бројните вредности на изразите:

а) $3 \cdot (5 - 2)$ ○ $8 - 4 \cdot 3$;

б) $8 \cdot 2{,}5 - 10{,}8$ ○ $(-4)^2 + 1$?

Што треба претходно да направиш за да ги спoредиш бројните изрази?

Прво треба да ги пресметам бројните вредности на дадените изрази, а потоа да одредам кој знак треба да биде во кружчето.

- Спореди го твоето решение со даденото.

а) $3 \cdot (5 - 2) = 3 \cdot 3 = 9$; $8 - 4 \cdot 3 = 8 - 12 = -4$;
$9 > -4$, па $3 \cdot (5 - 2) > 8 - 4 \cdot 3$.

б) $8 \cdot 2{,}5 - 10{,}8 = 20 - 10{,}8 = 9{,}2$;
$(-4)^2 + 1 = 16 + 1 = 17$; $9{,}2 < 17$ па
$8 \cdot 2{,}5 - 10{,}8 < (-4)^2 + 1$.

☞ Со решавањето на задачата 1 двата бројни изрази:

$$3 \cdot (5 - 2) \text{ и } 8 - 4 \cdot 3, \text{ односно } 8 \cdot 2{,}5 - 10{,}8 \text{ и } (-4)^2 + 1$$

ги сврза со еден од знаците > или < и доби:

$$3 \cdot (5 - 2) > 8 - 4 \cdot 3, \text{ односно } 8 \cdot 2{,}5 - 10{,}8 < (-4)^2 + 1.$$

☞ $3 \cdot (5 - 2) > 8 - 4 \cdot 3$ и $8 \cdot 2{,}5 - 10{,}8 > (-4)^2 + 1$ се **бројни неравенства**.

2. Формирај точно бројно неравенство од изразите: $8 \cdot 5 - 6^2$ и $3 \cdot 4 + 5$.

3. Одреди кои од следните бројни неравенства се точни:

$28 - 8 \cdot 3 > -9 \cdot 2 + 20$; $7 < 3 \cdot 12 - 5^2$; $-9 + 6 > 8 \cdot 3 - 35$.

Потсети се!

- Изрази со променливи се: $x - 1$; $2y - 3$, $x^2 - 2x + 1$ и сл.
- Каков израз ќе добиеш ако во изразот $2y - 3$ променливата y ја замениш со 2?
- Пресметај ја бројната вредност на изразот $x^2 - 2x + 1$ за $x = 3$.

Б **4.** Кој од знаците: > или < треба да стои во крукчето за да биде точно споредувањето на изразите со променлива:

- $x^2 - 2x + 1$ ○ $2x + 3$, за $x = -2$?

- Какви изрази ќе добиеш ако во дадените изрази со променлива, x го замениш со -2?
- Што треба потоа да направиш?

Со заменување на променливата x со -2, ќе добијам бројни изрази, кои можам да ги споредам и да го поставам потребниот знак во крукчето.

- Спореди го твоето решавање со даденото.

☞ $x^2 - 2x + 1 = (-2)^2 - 2(-2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$; $2x + 3 = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$.
Бидејќи $9 > -1$, следува дека $x^2 - 2x + 1 > 2x + 3$ за $x = -2$.

- Неравенството $x^2 - 2x + 1 > 2x + 3$ е *неравенство со променлива*.
- Неравенство во кое левата и десната страна или барем едната од нив е израз со променлива се вика **неравенство со променлива** или **неравенка**.

5. Одреди кои од следниве неравенства се неравенки:

а) $5 > -2 \cdot 3$;
б) $2x + 3 > 0$, $x \in \mathbf{R}$;
в) $x^2 + 1 < x^2 - 2x + 3$, $x \in \mathbf{Z}$;
г) $8 \cdot 3 - 2^2 < 5 \cdot 6 + 3$.

Запомни!

- Променливите во неравенките најчесто се означуваат со $x, y, z, \ldots$ и тие се менуваат во множеството **R** или во некое негово подмножество.
- Со задавањето на неравенката се задава и множеството во кое се менуваат променливите, т.е. *дефиниционото множество*.
- Ако не е зададено дефиниционото множество ќе сметаме дека тоа е множеството **R**.
- Неравенка со една променлива, во општ случај запишуваме: $f(x) < g(x)$, $x \in$ D, каде што $f(x)$ и $g(x)$ се изрази од променливата x, дефинирани во множеството D.

Потсети се!

- Кои видови равенки имаме според бројот на непознатите?

- Според степенот на непознатите равенките можат да бидат: линеарна (од прв степен), квадратна (од втор степен), кубна (од трет степен) итн.

- Од кој степен е равенката: $2x - 3 = x + 1$; $x^2 - 3x = 2$?

В **6.** Дадени се неравенките:

- $2x - 1 < 3x + 1$;
- $2x - y > 5 - x$;
- $x^2 - 1 > 2x$;
- $x^2y - 2 < 3x$.

- Со колку непознати е секоја од неравенките?

- Како ќе ги именуваш неравенките $2x - 1 < 3x + 1$ и $x^2 - 1 > 2x$ според бројот на непознатите, а како неравенките $2x - y > 5 - x$ и $x^2y - 2 < 3x$?

Кои неравенки се со една непозната, а кои со две непознати?

Неравенките: $2x - 1 < 3x + 1$ и $x^2 - 1 > 2x$ се со една непозната, а неравенките: $2x - y > 5 - x$ и $x^2y - 2 < 3x$ со две непознати.

Запомни!

- Според бројот на непознатите, неравенките можат да бидат: **неравенки со една непозната**, **неравенки со две непознати**, **неравенки со три непознати** итн.

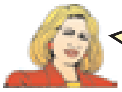
7. Одреди со колку непознати е секоја од следниве неравенки.

а) $2x - 1 < x + 2$; б) $x + y < 7 - z$; в) $x + 2y < x - y + 1$; г) $2x > x + 2$.

8. Дадени се неравенките:

а) $x^2 + 2 > 2x$; б) $x^2y - 2 > 3x$; в) $x - 2 < 2x + 3$; г) $x - y < y + 3$.

- Одреди го највисокиот степен на непознатите во секоја од неравенките.
- Според степенот на непознатите, од кој вид се неравенките?



Одреди го видот на неравенките според степенот на непознатите на начин како кај равенките.

Неравенките $x - 2 < 2x + 3$ и $x - y < y + 3$ се од прв степен; неравенката $x^2 + 2 > 2x$ е од втор степен, а неравенката $x^2y - 2 > 3x$ е од трет степен.

Запомни!

- Неравенките $f(x) < g(x)$ или $f(x) > g(x)$, во кои левата и десната страна се цели рационални изрази, според членот со највисок степен можат да бидат: неравенки од прв степен (**линеарни неравенки**), неравенки од втор степен (**квадратни неравенки**), неравенки од трет степен (**кубни неравенки**) итн.

9. Одреди од кој степен е секоја од следниве неравенки:

а) $5x - 2 < x + 4$; б) $x^2 - 2x < 6$; в) $x^2y - 5 > 2x$; г) $2x + y < 7$.

Треба да знаеш:

- дека два израза поврзани со знакот $<$ или $>$ образуваат неравенство;
- да го дефинираш поимот неравенка;
- да го одредиш видот на неравенката според бројот на непознатите и според степенот на непознатата.

Провери се!

- Одреди кои од следниве неравенства се неравенки:

  а) $5 \cdot 8 - 3 > 17 - 2^2$; б) $x^2 - 1 < 5x$;

  в) $3x + y < y + 2$; г) $5 - 2 \cdot 3 > 3 - 4 \cdot 2$.

- Одреди кои од наведените неравенки се линеарни неравенки со една непозната:

  а) $x^2 + 6 > 5x$; б) $x + 2y < 5x + 1$;

  в) $y - 2 < 3y$; г) $x + 2 > 2x - 5$.

Задачи

1. Одреди кои од следниве неравенства се точни:

а) $12 - 2 \cdot 5 > 3 \cdot 2 - 8$;

б) $5^2 - 3 \cdot 4 > 12 : 4$;

в) $17 - 3 \cdot 5 > 7^2 - 5 \cdot 6$.

2. За која вредност на $x \in \{-2, 0, 2\}$ е точно неравенството: $x^2 - 2x < x + 5$?

3. Одреди го видот на секоја од неравенките според бројот на непознатите:

а) $x - 3 < 2x + 5$; в) $3x + 1 - x > x + 5$;

б) $x - 2y + 3 > 2x$; г) $x - 5 < y + 3$.

4. Одреди го видот на секоја од следниве неравенки според степенот на непознатата:

а) $x^2 - 3 < 2x - 1$; в) $x + 2 > 6 - x$;

б) $x - 2 - 3x < 5$; г) $x^2y - 3x > 2y - 1$.

9 РЕШЕНИЕ НА НЕРАВЕНКА. ИНТЕРВАЛИ

Потсети се!

- Вредноста на непознатата за која равенката преминува во точно бројно равенство се вика решение (корен) на равенката.
- Провери дали бројот 2 е решение на равенката:
  а) $2x - 1 = x + 1$; б) $3x - 5 = x + 3$.
- Одреди го решението на равенката:
  а) $3x - 1 = 2x + 3$; б) $2x + 1 = 2x + 5$.

А **1.** Одреди за кои вредности на $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} = D$ секоја од дадените неравенки преминува во точно бројно неравенство:

а) $3x + 1 > x - 1$;

б) $2x - 2 < x + 4$;

в) $2x - 3 > x + 2$.

Како од неравенките ќе добиеш бројни неравенства?
Обиди се решението на задачата да го прикажеш со табела.

Со замена на непознатата x со вредностите од дефиниционото множество D неравенката ќе ја претворам во бројно неравенство и ќе утврдам дали тоа е точно (Т) или неточно (⊥).

- Спореди го твоето решение со даденото.

Вредност на x / Неравенка	–2	–1	0	1	2
$3x + 1 > x - 1$	$-5 > -3$ ⊥	$-2 > -2$ ⊥	$1 > -1$ Т	$4 > 0$ Т	$7 > 1$ Т
$2x - 2 < x + 4$	$-6 < 2$ Т	$-4 < 3$ Т	$-2 < 4$ Т	$0 < 5$ Т	$2 < 6$ Т
$2x - 3 > x + 2$	$-7 > 0$ ⊥	$-5 > 1$ ⊥	$-3 > 2$ ⊥	$-1 > 3$ ⊥	$1 > 4$ ⊥

- Од табелата воочи дека:

☞ неравенката $3x + 1 > x - 1$ преминува во точно бројно неравенство за $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$;

☞ неравенката $2x - 1 < x + 4$ преминува во точно бројно неравенство за секоја вредност x од дефиниционото множество D;

☞ неравенката $2x - 3 > x + 2$ не преминува во точно бројно неравенство за ниту една вредност на x од D.

- Секоја вредност на непознатата за која неравенката преминува во точно бројно неравенство се вика **решение на неравенката**.
- Сите решенија на една неравенка $f(x) < g(x)$ образуваат едно множество, кое се вика **множество решенија** на неравенката и обично се означува со $R(f(x) < g(x))$.
  За неравенката $3x + 1 > x - 1$ од претходната задача $R(3x + 1 > x - 2) = \{0, 1, 2\}$.

2. Запиши ги множествата решенија на неравенките $2x - 2 < x + 4$ и $2x - 3 > x + 2$ од задачата 1.

3. Одреди го множеството решенија на неравенката $2x - 3 < 3x - 2$, ако $x \in \{-3, -1, 1, 2, 3\}$.

- Секако одреди дека множеството решенија е $R(2x - 3 < 3x - 2) = \{1, 2, 3\}$. Со тоа ја реши неравенката $2x - 3 < 3x - 2$.

Запомни!

- **Да се реши една неравенка** значи да се определи множеството решенија на таа неравенка.

Потсети се!

- За две равенки се вели дека се еквивалентни ако имаат еднакви множества решенија.
- Провери дали се еквивалентни равенките: $3x - 4 = 2x - 1$ и $2x - 5 = x - 2$.

Б **4.** Дадени се неравенките:
$3x + 2 > 2x + 1$ и $2x - 3 > x - 4$
со дефиниционо множество
$D = \{-1, 0, 1, 2\}$.

- Одреди ги множествата решенија на двете неравенки.
- Спореди ги решенијата на двете неравенки. Што воочуваш?

- Спореди го твоето решение според податоците во табелата.

x Неравенка	-1	0	1	2
$3x + 2 > 2x + 1$	$3 \cdot (-1) + 2 > 2 \cdot (-1) + 1$ $\perp$	$3 \cdot 0 + 2 > 2 \cdot 0 + 1$ T	$3 \cdot 1 + 2 > 2 \cdot 1 + 1$ T	$3 \cdot 2 + 2 > 2 \cdot 2 + 1$ T
$2x - 3 > x - 4$	$2 \cdot (-1) - 3 > -1 - 4$ $\perp$	$2 \cdot 0 - 3 > 0 - 4$ T	$2 \cdot 1 - 3 > 1 - 4$ T	$2 \cdot 2 - 3 > 2 - 4$ T

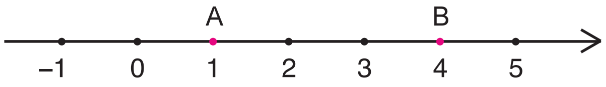
- Воочи дека $R(3x + 2 > 2x + 1) = \{0, 1, 2\}$, $R(2x - 3 > x - 4) = \{0, 1, 2\}$, т.е. $R(3x + 2 > 2x + 1) = R(2x - 3 > x - 4)$. За такви неравенки се вели дека се еквивалентни во дефиниционото множество D и запишуваме $3x + 2 > 2x + 1 \Leftrightarrow 2x - 3 > x - 4$, $x \in D$.

Запомни!

- Две неравенки со исто дефиниционо множество се **еквивалентни** ако нивните множества решенија се еднакви.

5. Провери дали неравенките: $3x - 1 > 2x + 1$ и $2x + 3 < 3x + 1$, се еквивалентни во множеството $D = \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Дадена е бројна права и на неа се означени точките A и B. На точките A и B се придружени броевите 1 и 4 соодветно.



- Бидејќи точката A е лево од B, тогаш за нивните соодветни броеви важи: $1 < 4$.
- Кои природни броеви се меѓу 1 и 4?
- Кој од броевите $\frac{3}{2}$; -3; $\sqrt{3}$; 2,8; $\frac{16}{3}$ е меѓу 1 и 4?

Зошто $\sqrt{2}$ е меѓу 1 и 4?

Бидејќи $\sqrt{2} \approx 1,41$, тој е десно од 1, а лево од 4.

- Сите реални броеви што се меѓу 1 и 4 образуваат едно множество, наречено *интервал со краеви* 1 и 4.

Општо

- Ако a и b се дадени реални броеви и $a < b$, тогаш множеството од сите реални броеви меѓу a и b се вика **интервал**, а дадените броеви a и b – **краеви** на тој интервал.
- Ако краевите a и b не му припаѓаат на интервалот, тогаш тој се вика **отворен интервал**.

☞ Се означува $(a; b)$

☞ Се претставува на бројна права:

- Ако краевите a и b му припаѓаат на интервалот, тогаш тој се вика **затворен интервал**.

☞ Се означува $[a; b]$

☞ Се претставува на бројна права:

7. Запиши интервал со краеви 3 и 5 и претстави го на бројна права:

а) затворен интервал; б) отворен интервал;

в) интервал кој не го содржи само левиот крај; г) интервал кој не го содржи само десниот крај.

- Спореди го твоето решение в) и г).

в) $(3; 5]$

г) $[3; 5)$

- Интервал претставува и множеството од сите реални броеви што се:

☞ поголеми од a; $(a; +\infty)$

☞ помали од a; $(-\infty; a)$

☞ поголеми или еднакви на a; $[a; +\infty)$

☞ помали или еднакви на a; $(-\infty; a]$

- Воочи дека на едниот крај од интервалите е знакот $+\infty$ или $-\infty$.

☞ Интервалот $(a; +\infty)$ се чита: „a, плус бесконечност“.

☞ Интервалот $(-\infty; a)$ се чита: „минус бесконечност, a“.

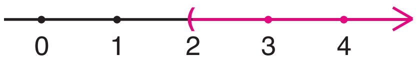
- Множеството **R** може да се запише како интервал: $(-\infty; +\infty)$.
- Воочи дека немаат смисла ознаките: $(3; -\infty)$; $[1; +\infty]$; $(+\infty; 4)$.

8. Запиши го како интервал, а потоа претстави го на бројна права множеството од сите реални броеви:

а) поголеми од 2; б) помали или еднакви на 1.

- Спореди го твоето решение со даденото.

а) $(2, +\infty)$

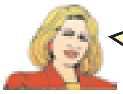


б) $(-\infty, 1]$

9. Дадени се неравенките:

а) $x > -1$; $x \in \mathbf{R}$; б) $x < 2$; $x \in \mathbf{R}$.

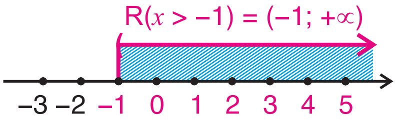
- Одреди го множеството решенија на секоја од дадените неравенки.
- Претстави го секое од тие множества на бројна права.

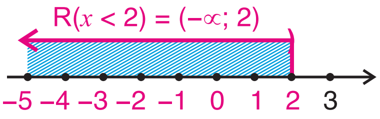


Со кои броеви треба да се замени x во неравенката $x > -1$, а со кои во неравенката $x < 2$, за да се добијат точни бројни неравенства?

Променливата x во неравенката $x > -1$ треба да се замени со кој било реален број, поголем од -1, а во неравенката $x < 2$, со кој било реален број што е помал од 2, за да се добијат точни бројни неравенства.

- Согледа дека множеството решенија на неравенката $x > -1$ се состои од сите реални броеви од -1 до $+\infty$, а тоа е интервалот $(-1, +\infty)$.
- Воочи ги множествата решенија на дадените неравенки, на бројна права.



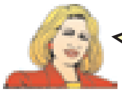


- Неравенките $x > -1$ и $x < 2$ имаат таканаречена *решена форма*; за таквите неравенки множеството решенија може да се прочита веднаш, директно.

Запомни!

- Неравенките: $x > a$, $x < a$ и $0 \cdot x < a$, каде што a е даден реален број се запишани во **решена форма** и се викаат **основни неравенки**.

10. Реши ја неравенката $0 \cdot x < -5$.



Дали постои реален број кој помножен со 0 дава производ помал од –5?

Бидејќи кој било број помножен со 0 е 0, а 0 не е помало од –5, неравенката $0 \cdot x < -5$ нема решение.

11. Реши ја неравенката $0 \cdot x < 5$.

▪ Воочи ги решенијата на неравенката $0 \cdot x < a$:

$$R(0 \cdot x < a, \text{ за } a < 0) = \varnothing \quad \text{и} \quad R(0 \cdot x < a, \text{ за } a > 0) = \mathbf{R}.$$

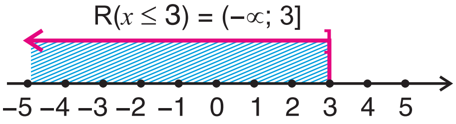
12. Запиши го множеството решенија на неравенката: $x > -5$; $x < 4$; $0 \cdot x < -1$; $0 \cdot x < 3$, со помош на интервал.

▪ Решенијата на неравенките од видот $x \geq a$ се интервалите $[a; +\infty)$, а на неравенките $x \leq a$ се интервалите $(-\infty; a]$.

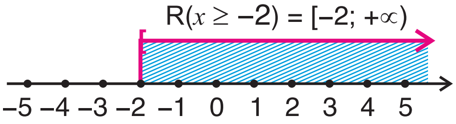
13. Претстави го со интервал и на бројна права множеството решенија на неравенката:
а) $x \leq 3$; б) $x \geq -2$.

▪ Согледај како се решава задача од овој вид.

☞ а) Ако $x \leq 3$, тогаш $x \in (-\infty; 3]$.



☞ б) Ако $x \geq -2$, тогаш $x \in [-2; +\infty)$.



14. Запиши го множеството решенија на неравенката $x \leq -1$ со помош на интервал.

Треба да знаеш:

- да провериш кои вредности се решенија на дадена неравенка;
- да утврдиш дали две неравенки се еквивалентни;
- да објасниш кога две неравенки се еквивалентни;
- да го претставиш со интервал и на бројна права множеството решенија на дадена неравенка.

Провери се!

- Провери дали $R(2x - 1 > x + 1) = \{2, 3, 4\}$ ако $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Утврди дали неравенката $3x - 1 > x + 1$ е еквивалентна со неравенката $4x - 1 > 3x$, ако $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\} = D$.
- Претстави го со интервал решението на неравенката $x < -3$.

Задачи

1. Во множеството D = {–1, 0, 1, 2, 3} се дадени неравенките:

а) $3x + 1 > 2x + 1$; б) $2x + 3 > x + 3$.

Одреди го множеството решенија на секоја од дадените неравенки.

2. Одреди кои од следниве неравенки се еквивалентни во множеството D = {–2, –1, 0, 1, 2}:

а) $3x - 2 > 2x - 3$; в) $2x + 5 > x + 4$.

б) $2x - 1 > x - 2$;

3. Претстави го со интервал множеството решенија на неравенката:

а) $x > -2$; б) $x < 0$; в) $x \leq 1$; г) $x \geq -3$.

4. Претстави го со интервал и на бројна права множеството решенија на неравенките:

а) $x > -3$; б) $x < 2$.

5. Претстави го со интервал и на бројна права множеството решенија на неравенките:

а) $x \leq -2$; б) $x \geq 1$.

6. Која од следниве неравенки нема решение?
Образложи го одговорот.

а) $x > 0$; в) $0 \cdot x > -2$;

б) $0 \cdot x < -1$; г) $x < -5$.

10 ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНИ НЕРАВЕНКИ

Потсети се!

- За кои две равенки се вели дека се еквивалентни?
- Провери дали неравенките:
  $3x - 1 > x + 3$ и $2x - 1 > x + 1$
  се еквивалентни во множеството D = {1, 2, 3, 4}.
- Како гласи теоремата 1 за еквивалентни равенки?

1. Во множеството
D = {–2, –1, 0, 1, 2}
е дадена неравенката
$$3x - 2 > 2x - 3.$$

- Одреди го множеството решенија на дадената неравенка.
- Додај го на двете страни на неравенката изразот $x - 1$ и провери дали добиената неравенка е еквивалентна со дадената.

Како ќе утврдиш дали дадената неравенка е еквивалентна со добиената?

Ќе ги одредам множествата решенија на двете неравенки и ќе ги споредам.

- Спореди го твоето решавање со даденото.

Вредност за x	Дадена неравенка $3x-2>2x-3$	Точно неточно	Добиена неравенка $3x-2+x-1>2x-3+x-1$	Точно неточно
-2	$3\cdot(-2)-2>2\cdot(-2)-3$	⊥	$3\cdot(-2)-2-2-1>2\cdot(-2)-3-2-1$	⊥
-1	$3\cdot(-1)-2>2\cdot(-1)-3$	⊥	$3\cdot(-1)-2-1-1>2\cdot(-1)-3-1-1$	⊥
0	$3\cdot0-2>2\cdot0-3$	Т	$3\cdot0-2+0-1>2\cdot0-3-0-1$	Т
1	$3\cdot1-2>2\cdot1-3$	Т	$3\cdot1-2+1-1>2\cdot1-3+1-1$	Т
2	$3\cdot2-2>2\cdot2-3$	Т	$3\cdot2-2+2-1>2\cdot2-3+2-1$	Т

- Од табелата воочи дека:
$R(3x-2>2x-3)=\{0, 1, 2\}$ и $R(3x-2+x-1>2x-3+x-1)=\{0, 1, 2\}$,
односно со додавањето на изразот $x-1$ на двете страни на неравенката $3x-2>2x-3$ добивме неравенка $3x-2+x-1>2x-3+x-1$, еквивалентна со дадената.

- Тоа важи општо за неравенките. Според тоа можеме да ја искажеме следнава теорема за *додавање број или израз* на двете страни од неравенката.

Теорема 1

☞ Ако кон двете страни на неравенката $f(x)>g(x)$ се додаде ист број или рационален израз $h(x)$, кој е определен за секој x од дефиниционото множество, се добива неравенка еквивалентна на дадената, т.е.

$$f(x)>g(x)\quad\Leftrightarrow\quad f(x)+h(x)>g(x)+h(x).$$

2. Дали се еквивалентни следниве две неравенки:

а) $5x+1>4x+3$ и $5x+1+3x>4x+3+3x$;

б) $2x-5>x-2$ и $2x-5+5x-1>x-2+5x-1$;

в) $3x-1<x+2$ и $3x-1-4x<x+2-4x$?

Образложи го одговорот.

Б **3.** Неравенката $4x-1<3x+2$ сведи ја на неравенка во решена форма.

Спореди го твоето решение со даденото.

Според теоремата 1 имаме:

$$4x - 1 < 3x + 2 \;\Leftrightarrow\; 4x - 1 - 3x + 1 < 3x + 2 - 3x + 1 \;\Leftrightarrow\; 4x - 3x < 2 + 1 \;\Leftrightarrow\; x < 3.$$

Од $4x - 1 < 3x + 2 \Leftrightarrow 4x - 3x < 2 + 1$ можеш да воочиш дека: членот $3x$ е префрлен од десната на левата страна, но со спротивниот знак, а членот 1 е префрлен од левата на десната страна, исто така со спротивниот знак.

Тоа важи општо за неравенките. Според тоа, можеме да ја искажеме следнава *последица 1* од *теоремата 1*:

> П_1 Секој член од неравенката може да се префрли од едната страна на другата, при што неговиот знак се менува во спротивниот.

Со примена на теоремата 1 можеш да вршиш еквивалентни трансформации на неравенките, со што ќе ги доведеш до поедноставни неравенки, еквивалентни со нив. Воочи го тоа во следнава задача.

4. Трансформирај ја во неравенка во решена форма неравенката $4x - 1 > 3x + 2$.

- Претстави го решението на неравенката со интервал.

Примени ја последицата 1 и групирај ги непознатите на левата страна, а познатите на десната.

Според последицата 1 важи: $4x - 1 > 3x + 2 \Leftrightarrow 4x - 3x > 2 + 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 3$, а $R(4x - 1 > 3x + 2) =$ $= (3; +\infty)$.

5. Дадена е неравенката $3x - 5 > x - 3$. Трансформирај ја неравенката во решена форма. Претстави го решението на неравенката со интервал.

6. Провери дали неравенките $3x - 2 + 4x < x + 1 + 4x$ и $3x - 2 < x + 1$, дефинирани во множеството $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ се еквивалентни.

Одреди ги множествата решенија на двете неравенки и провери дали тие се еднакви.

$R(3x - 2 + 4x < x + 1 + 4x) = \{0, 1, 2\}$;
$R(3x - 2 < x + 1) = \{0, 1, 2\}$,
па дадените неравенки се еквивалентни.

Воочуваш дека на двете страни на првата неравенка има ист член $4x$. Со изоставање на $4x$ од двете страни е добиена неравенката $3x - 2 < x + 1$, еквивалентна на првата.

- Образложи како ќе ја примениш теоремата 1 за да покажеш дека членот $4x$ кој се наоѓа на двете страни на неравенката можеш да го изоставиш и да добиеш еквивалентна неравенка на дадената.

- Тоа важи општо за неравенките. Според тоа можеме да искажеме уште една *последица* од теоремата 1:

> $П_2$ Ако на различни страни на неравенката има еднакви членови, тогаш тие можат да се изоставаат.

7. Трансформирај ја во решена форма неравенката $4x - 2 - 5x < 3x - 1 - 5x$.

8. Дадена е неравенката $3x - 1 > 2x + 1$ со $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Помножи ги двете страни на неравенката со 2.
- Провери дали добиената неравенка е еквивалентна со дадената.

- Воочи го во табелава решението на задачата.

Вредност на x / Неравенка	1	2	3	4	5
$3x - 1 > 2x + 1$	$2 > 3$ $\perp$	$5 > 5$ $\perp$	$8 > 7$ T	$11 > 9$ T	$14 > 11$ T
$6x - 2 > 4x + 2$	$4 > 6$ $\perp$	$10 > 10$ $\perp$	$16 > 14$ T	$22 > 18$ T	$28 > 22$ T

- Од табелата можеш да воочиш дека $R(3x - 1 > 2x + 1) = \{3, 4, 5\}$ и $R(6x - 2 > 4x + 2) = \{3, 4, 5\}$, т.е. $3x - 1 > 2x + 1 \Leftrightarrow 6x - 2 > 4x + 2$.

- Тоа важи општо за неравенките, само ако бројот со кој се множат двете страни на неравенката е позитивен. Според тоа, можеме да ја искажеме следнава *теорема за множење на неравенка со позитивен број*:

Теорема 2

> Ако двете страни на една неравенка $f(x) > g(x)$ се помножат со еден ист број $a > 0$, тогаш се добива неравенка еквивалентна со дадената, т.е.
>
> $$f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot f(x) > a \cdot g(x) \quad \text{за} \quad a > 0.$$

9. Образложи зошто следниве неравенки се еквивалентни: $3x - 2 < 2x - 3$ и $9x - 6 < 6x - 9$.

10. Дадена е неравенката $4x - 8 < 12 - 8x$, на која се извршени следниве еквивалентни трансформации:

$$4x\cdot\frac{1}{4}-8\cdot\frac{1}{4}<12\cdot\frac{1}{4}-8x\cdot\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 < 3 - 2x;$$

$$4x : 4 - 8 : 4 < 12 : 4 - 8x : 4 \Leftrightarrow x - 2 < 3 - 2x.$$

- Образложи кои трансформации се направени на неравенката $4x - 8 < 12 - 8x$.
- Спореди ги добиените неравенки. Што забележуваш?

■ Воочи дека: ако двете страни на неравенката $4x - 8 < 12 - 8x$ се помножат со $\frac{1}{4}$, тогаш е извршена истата трансформација како двете страни на таа неравенка да се поделени со 4. Може да се искаже следнава последица 1 од теоремата 2:

☞ **П$_1$** Ако двете страни на една неравенка имаат заеднички позитивен множител, со него можат да се поделат двете страни на неравенката, при што се добива нова неравенка еквивалентна на дадената.

11. Дадена е неравенката $10x - 25 < 5x + 15$. Трансформирај ја оваа неравенка во поедноставна со примена на последицата 1.

12. Дадена е неравенката $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} > \frac{5}{8}x - \frac{1}{4}$. Со кој број можеш да ги помножиш двете страни на неравенката, за да добиеш неравенка без именители?

■ Спореди го твоето решавање со даденото.

☞ НЗС(4, 2, 8) = 8; $8 \cdot \frac{3}{4}x + 8 \cdot \frac{1}{2} > 8 \cdot \frac{5}{8}x - 8 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow 6x + 4 > 5x - 2$.

■ Трансформацијата на неравенката $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} > \frac{5}{8}x - \frac{1}{4}$ е извршена врз основа на теоремата 2. Воочи дека може да се искаже следната последица од T_2.

☞ **П$_2$** Неравенка со дробни нумерички коефициенти може да се трансформира во еквивалентна неравенка со цели нумерички коефициенти, ако двете страни на неравенката се помножат со позитивен заеднички содржател на именителите (обично со нивниот најмал заеднички содржател).

13. Трансформирај ја во неравенка со цели нумерички коефициенти неравенката $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} > \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$.

14. Дадени се точните бројни неравенства: $7 > 4$, $-5 < -3$ и $1 > -4$.

- Помножи ги двете страни на секое од дадените неравенства со –2.
- Провери дали добиените бројни неравенства се точни. Што воочуваш?

■ Спореди го твоето решавање со даденото.

☞ $7 > 4$; $-2 \cdot 7 > -2 \cdot 4$, $-14 > -8$ ☜ неточно бројно неравенство.
$-5 < -3$, $-2 \cdot (-5) < -2 \cdot (-3)$, $10 < 6$ ☜ неточно бројно неравенство.
$1 > -4$, $-2 \cdot 1 > -2 \cdot (-4)$, $-2 > 8$ ☜ неточно бројно неравенство.

- За да се добие точно бројно неравенство, потребно е да се промени знакот на неравенството, т.е. $-14 > -8$ да се замени со $-14 < -8$, $10 < 6$ да се замени со $10 > 6$ и $-2 > 8$ да се замени со $-2 < 8$.
- Тоа важи за кои било реални броеви a, b и c.

Ако $a > b$ и $c < 0$, тогаш $a \cdot c < b \cdot c$, а ако $a < b$ и $c < 0$, тогаш $a \cdot c > b \cdot c$.

- Воочи го доказот на тврдењето.

Дадено е: $a > b$ и $c < 0$.

Треба да се докаже: $a \cdot c < b \cdot c$.

☞ $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c$; бидејќи $c < 0$ и $a - b > 0$ (зашто $a > b$), следува дека производот $(a - b) \cdot c$ е негативен, т.е. $a \cdot c - b \cdot c < 0$, па $a \cdot c < b \cdot c$.

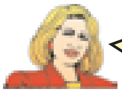
- За знаците во неравенствата $3 < 5$ и $2 > -1$ велиме дека имаат **спротивни насоки**.
- Според тоа, за неравенките можеме да ја искажеме следнава *теорема за множење неравенка со негативен број*:

Теорема 3

☞ Ако двете страни на една неравенка $f(x) > g(x)$ се помножат или поделат со еден ист негативен број c и притоа се промени знакот на неравенката во спротивен, ќе се добие неравенка еквивалентна со дадената, т.е. за $c < 0$:

$$f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot f(x) < c \cdot g(x).$$

15. Трансформирај ја во решена форма неравенката $2x - 7 > 5x - 1$.



Примени ги последицата 1 од теоремата 1, последицата 1 од теоремата 2 и теоремата 3.

$2x - 7 > 5x - 1 \Leftrightarrow 2x - 5x > -1 + 7 \Leftrightarrow -3x > 6 \Leftrightarrow -x > 2 \Leftrightarrow x < -2$, т.е. $R(2x - 7 > 5x - 1) = (-\infty, -2)$.

Треба да знаеш:

- да ги искажеш теоремите и нивните последици за еквивалентни неравенки;
- да ги примениш теоремите и последиците за еквивалентни линеарни неравенки во задачи.

Провери се!

Образложи зошто се еквивалентни неравенките:

- $2x - 5 < x - 3$ и $2x - 5 - x < x - 3 - x$;
- $\frac{2}{3}x - 1 < \frac{1}{2}x + 2$ и $4x - 6 < 3x + 12$;
- $-5x + 3 < -3x - 1$ и $5x - 3 > 3x + 1$.

Задачи

1. Следниве неравенки сведи ги на неравенки во решена форма.

а) $3x - 1 < 2x + 1$; б) $4x - 3 > 3x - 1$.

2. Во неравенката $2x - 3 - 5x < x - 1 - 5x$ изостави два члена така што да добиеш неравенка еквивалентна на дадената.

3. Следнава неравенка трансформирај ја во еквивалентна неравенка без именители:

а) $\frac{x+1}{2} < \frac{x}{4} + 1$; б) $\frac{3x+2}{6} > \frac{x-1}{3} - 1$.

4. Неравенката $\frac{x}{2} - 1 < \frac{x}{3} + 1$, сведи ја на неравенка во решена форма.

5. Неравенката $3x - 5 < 4x - 3$ трансформирај ја во неравенка во решена форма.

- Претстави го решението на неравенката со интервал.

6. Образложи ги следниве еквиваленции:

а) $-5x + 1 > 2x - 3 \Leftrightarrow 5x - 1 < -2x + 3$;

б) $4x - 2 < 3x + 1 \Leftrightarrow -4x + 2 > -3x - 1$.

11 РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Потсети се!

- Одреди кои од следниве неравенки се линеарни неравенки со една непозната:
- $x^2 + 6 > 4x$;
- $3x - 1 < 2x + 3$;
- $x + 5 > 3x - 1$;
- $x + 2y < 3 - x$.
- Трансформирај ја во решена форма неравенката $5x - 3 > 3x + 1$.

A **1.** Реши ја неравенката $4x - 3 > 2x + 1$. Претстави го решението со интервал на бројна права.

Како ќе ја доведеш дадената неравенка во решена форма?

Ќе ги применам последицата 1 од теоремата 1 и последицата 1 од теоремата 2.

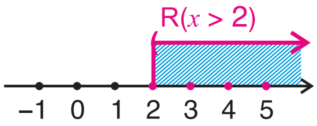
Спореди го твоето решение со даденото.

☞ $4x - 3 > 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 2x > 1 + 3$ ☜ (според П$_1$ од Т$_1$)

$4x - 2x > 1 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 4$ ☜ (сведување на двете страни на неравенката)

$2x > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$ ☜ (делење на неравенката според П$_1$ од Т$_2$)

$R(4x - 3 > 2x + 1) = R(x > 2) = (2; +\infty)$.



2. Реши ги следниве неравенки: а) $x - 4 > 8 - 3x$; б) $3x - 5 < -x + 3$.

Неравенки се и: $f(x) \leq g(x)$; $f(x) \geq g(x)$;

3. Дадено е решавањето на неравенката $3(2x - 1) \leq -(9 - 8x)$. Објасни ја секоја еквивалентна трансформација применета во текот на решавањето.

$3(2x - 1) \leq -(9 - 8x) \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 3 \leq -9 + 8x \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 8x \leq -9 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \leq -6 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq -3$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 3$; $R(3(2x - 1) \leq -(9 - 8x)) = R(x \geq 3) = [3, +\infty)$.

4. Реши ја неравенката $2x - (3 - x) \geq 5x - 1$.

5. Реши ја неравенката $\frac{2x-1}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{6}$.

Спореди го твоето решение со даденото.

☞ $\frac{2x-1}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{6} \Leftrightarrow 2(2x - 1) - 3 \cdot 1 < x + 1 \Leftrightarrow 4x - 2 - 3 < x + 1 \Leftrightarrow 4x - x < 1 + 2 + 3$

$\Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow x < 2$.

$R(\frac{2x-1}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{6}) = R(x < 2) = (-\infty; 2)$, т.е. $x \in (-\infty; 2)$.

6. Реши ја неравенката $\frac{x-1}{3} - \frac{1}{6} > \frac{2x-3}{4}$.

Треба да знаеш:

- да решаваш линеарни неравенки со една непозната;
- да провериш дали даден интервал е решение на дадена неравенка;
- да составиш неравенка за дадена задача опишана со зборови.

Задачи

1. Реши ги следниве неравенки:

а) $5x - 2 > 3x + 4$; б) $2x - 7 < 5x + 2$.

2. Реши ги следниве неравенки:

а) $2x - 3(x - 1) \leq -(5 - x)$;

б) $3x - 2(x + 3) \geq -3(4 - x)$;

3. Провери дали интервалот $(-3; +\infty)$ е решение на неравенката: $\frac{5x+4}{4} < \frac{x-4}{2}$.

Провери се!

- Реши ја следнава неравенка: $2(x - 3) \leq -(9 - 5x)$.
- За кои вредности на x изразот $2x - 4$ е позитивен?
- Реши ја неравенката: $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+1}{3} < \frac{3x-1}{6}$.

4. Реши ги следниве неравенки:

а) $\frac{3x-5}{2} - \frac{2x+1}{3} < 0$;

б) $\frac{x-3}{3} - 1 < \frac{x+1}{2} - 2$.

5. Одреди за кои вредности на x изразот $\frac{9-x}{2} - \frac{x+3}{4}$ има позитивна вредност.

6. Должината на еден правоаголник е за 3 cm поголема од ширината. Колкава треба да биде должината на правоаголникот за да биде периметарот помал од 54 cm?

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

12 РЕШАВАЊЕ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

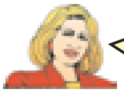
Потсети се!

- Секоја вредност на непознатата за која неравенката преминува во точно бројно неравенство се вика *решение на неравенката*.
- Провери дали $x = 3$ е решение на неравенката $3x - 1 > 2x - 3$.
- Сите решенија на една неравенка образуваат множество што се вика *множество решенија* на таа неравенка.
- Одреди го множеството решенија на неравенката $5x - 2 < 3x + 4$.

А **1.** Дадени се неравенките:

$3x + 1 > 2x - 1$ и $4x - 1 < 3x + 2$.

- Реши ги дадените неравенки.
- Претстави го множеството решенија на секоја од неравенките со интервал и на иста бројна права.
- Утврди дали дадените неравенки имаат заеднички решенија.



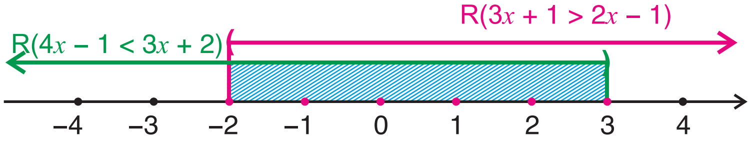
Како ќе утврдиш дали дадените неравенки имаат заеднички решенија?

Дадените неравенки ќе ги доведам до решена форма, потоа решенијата ќе ги претставам со интервал и на иста бројна права, од каде што ќе го согледам пресекот на нивните множества решенија.

- Спореди го твоето решение со даденото.

$$3x + 1 > 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow\ 3x - 2x > -1 - 1$$
$$\Leftrightarrow\ x > -2$$
$$R(3x + 1 > 2x - 1) = (-2; +\infty)$$

$$4x - 1 < 3x + 2$$
$$\Leftrightarrow\ 4x - 3x < 2 + 1$$
$$\Leftrightarrow\ x < 3$$
$$R(4x - 1 < 3x + 2) = (-\infty; 3)$$



$$\boxed{R(3x + 1 > 2x - 1) \cap R(4x - 1 < 3x + 2)}$$

- Од бројната права можеш да воочиш дека броевите што припаѓаат на интервалот (–2, 3) се решенија и на едната и на другата неравенка. За дадените две неравенки велиме дека образуваат *систем од две линеарни неравенки со една непозната*.

Запомни!

- За две или повеќе линеарни неравенки со една иста непозната, за кои се бараат заеднички решенија, се вели дека образуваат **систем линеарни неравенки со една непозната**.

- Секој систем од две линеарни неравенки со една непозната може да се сведе во нормален вид, како на пример:

$$\begin{cases} ax > b \\ a_1x > b_1 \end{cases} \qquad (a,\ b,\ a_1,\ b_1 \in \mathbf{R}).$$

2. Даден е системот неравенки $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 3 \\ 5x - 3 > 2x + 9. \end{cases}$

- Доведи го дадениот систем во нормален вид.
- Одреди ги заедничките решенија на неравенките од системот на бројна права.

- Сите вредности на непознатата x што се заеднички решенија на неравенките од системот, односно пресекот од множествата решенија на неравенките од системот, се вика **множество решенија на системот неравенки** и се означува со R_s, т.е.

$$R_s = R(ax > b) \cap R(a_1x > b_1).$$

- Запиши го со интервал множеството решенија на дадениот систем.

- Два система дефинирани во исто множество се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија.

Б **3.** Даден е системот линеарни неравенки $\begin{cases} ax > b \\ a_1x > b_1 \end{cases}$ и неравенката $a_2x > b_2$ којашто е еквивалентна со $ax > b$.

- Докажи дека системот неравенки $\begin{cases} ax > b \\ a_1x > b_1 \end{cases}$ е еквивалентен со системот $\begin{cases} a_2x > b_2 \\ a_1x > b_1. \end{cases}$

- Воочи ги постапките при докажувањето.

1 Решение на системот неравенки $\begin{cases} ax > b \\ a_1x > b_1 \end{cases}$ е $R_s = R(ax > b) \cap R(a_1x > b_1)$.

2 Од $ax > b \Leftrightarrow a_2x > b_2$ следува $R(ax > b) = R(a_2x > b_2)$.

3 Решение на системот $\begin{cases} a_2x > b_2 \\ a_1x > b_1 \end{cases}$ е $R_s = R(a_2x > b_2) \cap R(a_1x > b_1)$.

4 Од $R(ax > b) = R(a_2x > b_2)$ следува дека $R(a_2x > b_2) \cap R(a_1x > b_1) = R(ax > b) \cap R(a_1x > b_1)$,

$$\text{т.е.} \quad \begin{cases} ax > b \\ a_1x > b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2x > b_2 \\ a_1x > b_1. \end{cases}$$

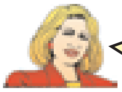
Со тоа докажавме дека важи следнава:

Теорема 1

☞ Ако во даден систем неравенки се замени која било неравенка со неравенка еквивалентна на неа, се добива систем неравенки еквивалентен на дадениот.

4. Реши го системот неравенки $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}-3<0 \\ \dfrac{x+1}{4}<1-\dfrac{x}{2}. \end{cases}$

- Решението на системот претстави го со интервал и на бројна права.



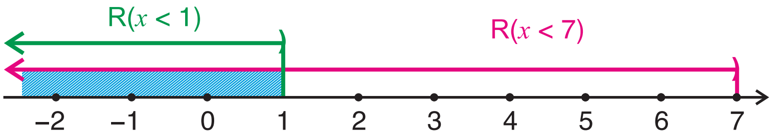
Во каков вид треба да ги доведеш неравенките од системот и како ќе го одредиш неговото решение?

Прво, неравенките од системот ќе ги трансформирам во решена форма, а потоа ќе го одредам пресекот од множествата решенија на двете неравенки.

Спореди го твоето решение со даденото.

☞ $$\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}-3<0 \\ \dfrac{x+1}{4}<1-\dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2-9<0 \\ x+1<4-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2+9 \\ x+2x<4-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ 3x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ x<1\,. \end{cases}$$

$$R_s = (-\infty; 7) \cap (-\infty; 1) = (-\infty; 1)$$



$$\boxed{R_s = R(x < 7) \cap R(x < 1) = (-\infty; 1)}$$

5. Реши го системот неравенки $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3}-1>\dfrac{x-1}{6} \\ \dfrac{3x-1}{4}+1<\dfrac{x}{2} \end{cases}$

- Решението на системот претстави го со интервал и на бројна права.

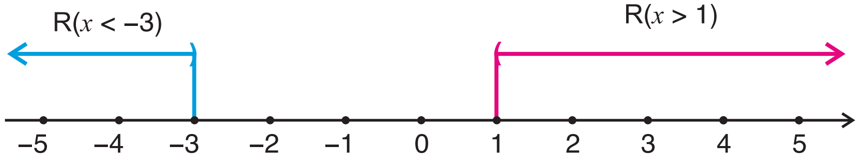
Кога систем од две линеарни неравенки со една непозната може да нема решение?

Системот ќе нема решение ако пресекот од множествата решенија на двете неравенки е празно множество.

- Спореди го твоето решавање со даденото.

☞ $$\begin{cases}\frac{2x+1}{3}-1>\frac{x-1}{6}\\ \frac{3x-1}{4}+1<\frac{x}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+2-6>x-1\\ 3x-1+4<2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-x>-1-2+6\\ 3x-2x<1-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x>3\\ x<-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\ x<-3\end{cases}.$$

$R(x > 1) = (1; +\infty)$, $R(x < -3) = (-\infty; -3)$; $R_s = R(x > 1) \cap R(x < -3) = \varnothing$.



Запомни!

- Ако пресекот на множествата решенија на двете неравенки е празно множество, тогаш се вели дека **системот нема решение** или **системот е противречен**.

6. Реши го системот неравенки: $\begin{cases}\frac{x-1}{2}<\frac{x-5}{4}\\ \frac{2x-1}{2}<\frac{x+2}{3}\end{cases}$

Треба да знаеш:

- да решиш систем линеарни неравенки со една непозната;
- да го претставиш множеството решенија на систем линеарни неравенки со една непозната на бројна права и со интервал.

Провери се!

- Реши го системот линеарни неравенки со една непозната: $\begin{cases}\frac{x+2}{3}-1<0\\ \frac{x}{2}+\frac{x+1}{4}>1.\end{cases}$
- Што е решение на системот линеарни неравенки: $\begin{cases}ax>b\\ a_1x>b_1\end{cases}$ ако $R(ax > b) = (-\infty, -1)$ и $R(a_1x > b_1) = (0, +\infty)$?

Задачи

1. Реши го системот:

а) $\begin{cases}6-3x>-2x\\9+6x>3x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-2>2x-5\\2+x>2x+3.\end{cases}$

2. Реши го системот:

а) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}<x+7\\\frac{2x+3}{4}-1>\frac{x-2}{3};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\frac{x-2}{3}-\frac{x+1}{2}<\frac{1}{6}-\frac{x}{2}\\\frac{x}{2}-\frac{1}{6}>\frac{x-2}{3}.\end{cases}$

3. Реши го системот:

а) $\begin{cases}3\ x-2\ \geq 2\ x+3\ -2x\\2\ 2x-5\ -1\leq 3\ x-1\end{cases}$

б) $\begin{cases}5-\ x-2\ >2x-\ 1+x\\2\ x-1\ \geq -\ 5-x\ .\end{cases}$

4. Реши го системот:

а) $\begin{cases}x+2\ ^{2}-3>x\ x+2\\2x\ x+1\ -x\ 2x-1\ <4;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x-1\ ^{2}+\ x-2\ ^{2}>2\ x-3\ ^{2}-1\\\frac{1}{2}+\frac{x-1}{3}>\frac{2x-1}{3}+\frac{x-9}{6}.\end{cases}$

ЛИНЕАРНИ ФУНКЦИИ

13 ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Правата и обратната пропорционалност се функции. Тие обично се задаваат со формули.
- Која пропорционалност е искажана со формулата $y = 2x$?
- Која пропорционалност е искажана со формулата $=\frac{1}{x}$?

1. Во еден сад што собира 35 ℓ има 5 ℓ вода. Една цевка го полни садот со 3 ℓ вода во минута.

- Колку литри вода ќе има во садот по: 1 минута; 2 минути; 2,5 минути; 5 минути; 10 минути?
- Колку литри вода (y) ќе има во садот по изминати (x) минути?
- Направи табела со дадените пода–тоци.

Како ќе пресметаш колку вода ќе има во садот за $x = 1$ минута, а како за $x = 2$ минути?

За $x = 1$ минута, $y = 3 \cdot 1 + 5 = 8$ ℓ;
за $x = 2$ минути, $y = 3 \cdot 2 + 5 = 11$ ℓ.

- Воочи дека по x минути во садот ќе има $3x + 5$ литри вода, т.е. $y = 3x + 5$.

- Согледај дека процесот на полнење на садот со вода може да се опише како функција f дадена со формулата $f(x) = 3x + 5$.
- Според формулата може да составиш табела и за други вредности на x (време), покрај дадените.

x	1	1,5	2	2,5	3	5	9	10
$f(x) = 3x + 5$	8	9,5	11	12,5	14	20	32	35

- По колку минути садот ќе се наполни со вода?

- Воочи дека, според природата на проблемот, времето x може да се менува од 0 до 10 минути.
- Ако ја разгледаш само формулата $f(x) = 3x + 5$, тогаш x може да биде кој било реален број.
- На секој реален број x се придружува одреден број y, таков што $y = f(x)$.
- Со формулата $f(x) = 3x + 5$ е дадена функцијата f во множеството **R** и претставува **пример за линеарна функција**.

Воочи и запомни!

- Функцијата f што е зададена со формулата $f(x) = kx + n$, каде што k и n се кои било дадени реални броеви, се вика **линеарна функција**.
- Бројот k се вика **коефициент** пред **аргументот** x, а n **слободен член**.

- Ако линеарната функција е зададена со формула и ако ништо не е речено за доменот, тогаш ќе сметаме дека домен на таа функција е **R**.

2. Запиши ја линеарната функција во која:

а) $k = 3$ и $n = 5$;　　в) $k = -2$ и $n = -1$;

б) $k = 2$ и $n = -3$;　　г) $k = 5$ и $n = 0$.

Каков облик има функцијата во која $k = 5$ и $n = 0$ од задачата 2? Каква пропорционалност претставува функцијата?

Ако $k = 5$ и $n = 0$, тогаш функцијата добива облик $f(x) = 5x$. Тоа е права пропорционалност.

3. Запиши ја линеарната функција во која:

- коефициентот пред аргументот е 4, а слободниот член 2;
- коефициентот пред аргументот е –3, а слободниот член 1;
- коефициентот пред аргументот е –2, а слободниот член 0.

4. Дадена е линеарната функција $f(x) = x - 2$. Одреди:

- $f(-2)$;
- $f(0)$;
- $f(2)$.

За која вредност на аргументот x, вредноста $f(x)$ на функцијата е нула?

За $x = 2$ се добива $f(x) = 2 - 2$, т.е. $f(x) = 0$, за $x = 2$.

Запомни!

- Вредноста на аргументот x за која вредноста на функцијата y е нула, се вика **нула на функцијата**.

5. Провери дали бројот –3 е нула на функцијата $f(x) = x + 3$.

6. Одреди ја нулата на функцијата: а) $y = -3x + 6$; б) $y = 2x - 1$.

- Воочи дека, во дадените функции, наместо $f(x)$ стои y. Вака ќе ги запишуваме линеарните функции и натаму.

Како ќе го одредиш x во функцијата $y = kx + n$ за да е $y = 0$?

За да е $y = 0$, треба $kx + n = 0$. Оттука $kx = -n$, а $x = -\frac{n}{k}$, за $k \neq 0$.

- Спореди го твоето решение за функцијата а).

☞ а) Вредноста на функцијата $y = -3x + 6$ е нула ако: $-3x + 6 = 0$; $-3x = -6$; $3x = 6$; $x = 2$, т.е. бројот 2 е нула на функцијата $y = -3x + 6$.

7. Одреди ја нулата на секоја од функциите:

а) $y = x - 5$; б) $y = 5x - 3$; в) $y = -3x$; г) $= \frac{1}{2}x - 2$.

Треба да знаеш:

- да дефинираш линеарна функција;
- да посочиш коефициент и слободен член на линеарна функција;
- да одредиш нула на линеарна функција.

Провери се!

- Која од следниве функции е линеарна функција?

  а) $y = 6x$; б) $= \frac{6}{x}$; в) $y = 2x^2 - 1$;

  г) $y = -2x + 1$; д) $y = x + 3$.

- Одреди ја нулата на функцијата $y = -2x - 6$.

Задачи

1. Одреди која од следниве функции е линеарна:

а) $=\frac{12}{x}$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = 3x$;

г) $y = -2x + 3$; д) $=\frac{1}{2}x+2$.

2. Запиши ја линеарната функција во која:

а) $k = -2,\ n = 3$; б) $k = -1,\ n = 2$;

в) $k = -2,\ n = 0$; г) $k=\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4}$.

3. Одреди го коефициентот пред аргументот и слободниот член во функциите:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = 2x$;

в) $=-\frac{1}{3}x+3$; г) $=-\frac{1}{2}x$.

4. Одреди ја нулата на функцијата:

а) $y = 3x - 6$; б) $=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$;

в) $y = 2x - 5$; г) $y = 2x$.

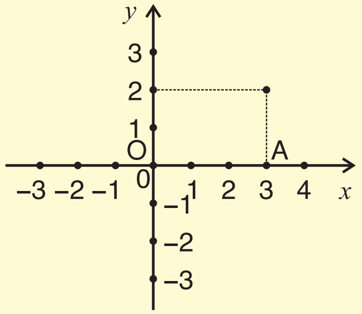
5. Нула на функцијата $y = kx + n$ е $x = 2$, а $n = -3$. Одреди го коефициентот пред аргументот.

6. За функцијата $y = kx + n$, $x = -2$ е нула на функцијата, а слободниот член е за 3 поголем од коефициентот пред аргументот. Одреди ги k и n.

14 ГРАФИЧКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

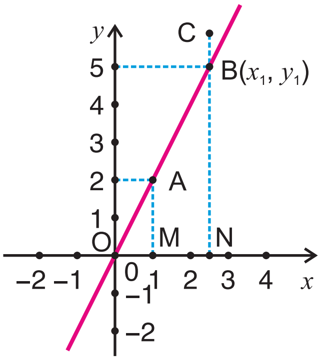
- На цртежот е даден правоаголен координатен систем Oxy.



- Како се вика оската x, а како оската y?
- Како се вика точката O?
- Одреди ги координатите на точката A.
- Колку прави минуваат низ две точки?

А **1.** Низ точките O и A на цртежот е повлечена права.

- Покажи дека таа права е график на функцијата $y = 2x$.



- Провери дали точките O(0, 0) и A(1, 2) му припаѓаат на графикот на функцијата $y = 2x$.
- Покажи дека точката (2, 4) му припаѓа на графикот на функцијата $y = 2x$.

Како ќе покажеш дека точките O(0, 0) и A(1, 2) му припаѓаат на графикот на функцијата?

За $x = 0,\ y = 2 \cdot 0,\ y = 0$.
За $x = 1,\ y = 2 \cdot 1,\ y = 2$.
Следствено точките O и A му припаѓаат на графикот на функцијата.

- Воочи, на цртежот, дека е повлечена права низ точките O и A, коишто му припаѓаат на графикот на функцијата $y = 2x$.

- Согледај го образложението дека секоја точка на правата OA го задоволува условот $y = 2x$, а точка што не припаѓа на OA не го задоволува тој услов.

☞ Да избереме произволна точка $B(x_1, y_1)$ што лежи на правата OA (види го цртежот).

☞ Воочи дека $\Delta ONB \sim \Delta OMA$. Од сличноста на тие триаголници следува дека $\overline{NB}:\overline{ON}=\overline{MA}:\overline{OM}$, т.е. $y_1 : x_1 = 2 : 1$; $y_1 = 2x_1$. Значи точката $B(x_1, y_1)$ му припаѓа на графикот на функцијата $y = 2x$.

☞ Да избереме точка C што не припаѓа на правата OA, а има иста апсциса со точката B (види го цртежот).

☞ Бидејќи $y_1 = 2x_1$, следува дека $\overline{NB}=2\overline{ON}$. Воочи дека $\overline{NC}\neq 2\overline{ON}$, т.е. точката C не го задоволува условот $y = 2x$. Значи точката C не му припаѓа на графикот на функцијата.

- Можеме да кажеме дека графикот на линеарната функција $y = 2x$ е права што минува низ координатниот почеток.

- Важи општо, т.е. важи следнава

Теорема 1

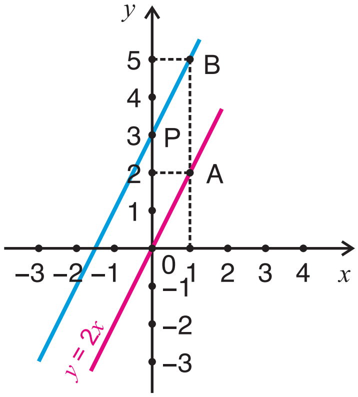
☞ Графикот на линеарната функција $y = kx$, за кој било $k \in \mathbf{R}$ е права што минува низ координатниот почеток.

2. Дадена е функцијата $y = -3x$.

- Провери дали точките: $A(1, -3)$ и $B(-1, 3)$ му припаѓаат на графикот на функцијата.
- Претстави ја графички функцијата.

Б **3.** На цртежот е даден графикот на функцијата $y = 2x$ и низ точките P и B е повлечена права.

- Покажи дека правата PB е график на функцијата $y = 2x + 3$.
- Одреди ги координатите на точката P во која графикот на функцијата $y = 2x + 3$ ја сече y – оската.
- Според цртежот, одреди ги координатите на точката B којашто му припаѓа на графикот на функцијата $y = 2x + 3$.
- Одреди ги $\overline{OP}$ и $\overline{AB}$.



- Спореди го твоето решение со даденото.

За $x = 0$, $y = 2 \cdot 0 + 3$; $y = 3$. Графикот на функцијата $y = 2x + 3$, ја сече y оската во точката P со координати P(0, 3).

За $x = 1$, $y = 2 \cdot 1 + 3$; $y = 5$. Точката B(1, 5) му припаѓа на графикот на функцијата $y = 2x + 3$.

Ако на аргументот x му дадеш вредност a, тогаш функцијата $y = 2x$ добива вредност $2a$, а функцијата $y = 2x + 3$ има вредност $2a + 3$.

Воочи дека ординатата на секоја точка од графикот на функцијата $y = 2x + 3$ е за 3 (слободниот член) поголема од ординатата со иста апциса на функцијата $y = 2x$.

Отсечките OP и AB се паралелни и $\overline{OP} = \overline{AB}$. Според тоа четириаголникот OABP е паралелограм, а од тоа следува дека правите OA и PB се паралелни.

- Воочи дека графикот на линеарната функција $y = 2x + 3$ е права паралелна со графикот на функцијата $y = 2x$, а ординатната оска ја сече во точката (0, 3).
- Важи општо, т.е. важи следнава

Теорема 2

Графикот на функцијата $y = kx + n$ е права паралелна со графикот на функцијата $y = kx$, а ординатната оска ја сече во точката $(0, n)$.

4. Одреди ги координатите на точката во која графикот на функцијата $y = 2x - 3$ ја сече y – оската.

В **5.** Претстави ја графички функцијата $y = 3x - 2$.

Со колку точки е определена една права? Можеш ли тоа да го искористиш во оваа задача?

Права е определена со две точки што ѝ припаѓаат. Значи, треба да ги одредам координатите на две точки што припаѓаат на графикот на функцијата.

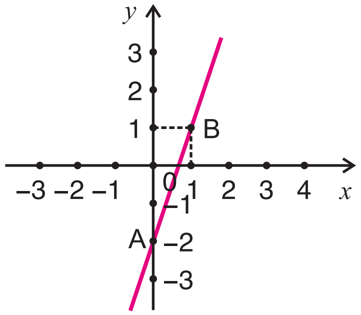
- Спореди го твоето решение со даденото.

$y = 3x - 2$

x	0	1
y	−2	1

$y = 3 \cdot 0 - 2$, $y = -2$, A(0, −2)

$y = 3 \cdot 1 - 2$, $y = 1$, B(1, 1)



Воочи и запомни!

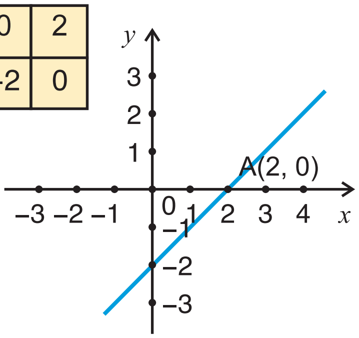
- Линеарна функција графички се претставува на тој начин што прво ќе се одредат координатите на две точки од нејзиниот график, потоа тие точки се претставуваат во координатната рамнина и низ нив се повлекува права. Таа права го претставува графикот на дадената функција.

6. Претстави ја графички функцијата $y = -2x + 1$.

7. На цртежот графички е претставена функцијата $y = x - 2$.

- Одреди ги координатите на пресечната точка А на графикот со апсцисната оска.
- Одреди ја нулата на функцијата.
- Спореди ја нулата на функцијата со апсцисата на пресечната точка. Што воочуваш?

x	0	2
y	−2	0



- Спореди го твоето решение со даденото.

☞ Ако $y = 0$, тогаш $0 = x - 2$, $x = 2$, т.е. А(2, 0); нула на функцијата е 2.

Запомни!

- Апсцисата на пресечната точка на графикот на линеарната функција и x–оската е нулата на функцијата.

Треба да знаеш:

- да одредиш дали дадена точка му припаѓа на графикот на дадена функција;
- да ги одредиш координатите на точката во која графикот на функцијата ја сече ординатната оска;
- графички да претставиш линеарна функција;
- од графикот на функцијата да ја одредиш нулата на функцијата.

Провери се!

- Која од точките: А(0, 0), В(2, 6) и С(−1, 3) му припаѓа на графикот на функцијата $y = -3x$?
- Претстави ја графички функцијата $y = 2x - 1$.
- Од графикот одреди ја нулата на функцијата, а потоа изврши проверка.

Задачи

1. Која од точките: А(−2, −5), В(−1, −2), С(0, 3) и D(2, −1) припаѓа на графикот на функцијата $y = x - 3$?

2. За која вредност на x точката А(x, 2) му припаѓа на графикот на функцијата $y = 3x - 1$?

3. Претстави ги графички функциите:
$y = 3x$; $y = 3x + 2$; $y = 3x - 2$.

4. Одреди ги координатите на точката во која функцијата $y = 2x - 4$ ја сече апсцисната оска.

5. Во функцијата $y = -2x + n$ одреди го n така што точката P(1, 3) да припаѓа на нејзиниот график.

6. Во функцијата $y = kx - 2$ одреди го k така што точката A(1, 0) да припаѓа на нејзиниот график.

15 ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ГРАФИЦИТЕ НА НЕКОИ ЛИНЕАРНИ ФУНКЦИИ

Потсети се!

- Графикот на функцијата $y = kx$ минува низ координатниот почеток.
- На која од функциите: $y = 3x$, $y = x - 3$, $=-\frac{1}{2}x$, графикот ѝ минува низ координатниот почеток?
- Кои од функциите:

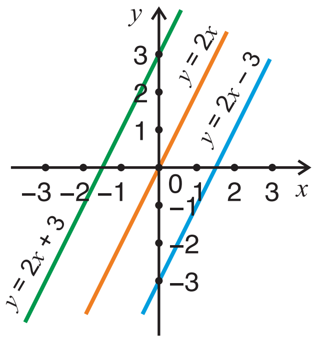
● $=\frac{1}{2}x+1$; ● $y = 2x + 1$; ● $=\frac{1}{2}x-1$;

имаат ист коефициент пред аргументот?

A **1.** Претстави ги графички, во ист координатен систем, функциите:

● $y = 2x$; ● $y = 2x - 3$; ● $y = 2x + 3$;

- Воочи што имаат заедничко дадените функции.
- Во каква заемна положба се графиците на функциите $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 3$ со графикот на функцијата $y = 2x$?



На цртежот се претставени графиците на функциите. Какви се нивните коефициенти и каква е заемната положба на нивните графици?

Дадените функции имаат ист коефициент пред аргументот, а нивните графици се паралелни прави.

- Тоа важи општо за функциите со ист коефициент пред аргументот.

Запомни!

- Графиците на линеарните функции со ист коефициент пред аргументот се паралелни прави.

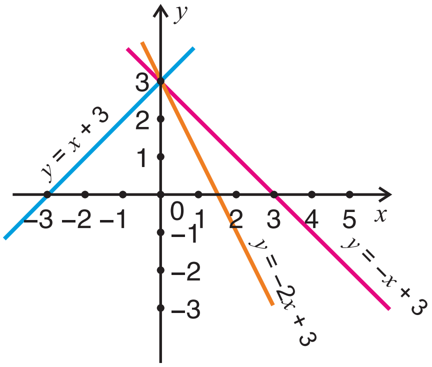
2. Дадена е функцијата $=\frac{1}{2}x-2$. На која од функциите: $=-\frac{1}{2}x+2$; $=2x-\frac{1}{2}$; $=\frac{1}{2}x+5$ графикот е права паралелна со графикот на дадената функција?

3. Во функцијата $y = kx - 3$ одреди го k така што нејзиниот график да биде права паралелна со графикот на функцијата $y = 5x - 2$.

Б **4.** Претстави ги графички, во ист координатен систем, функциите:

- $y = -2x + 3$; $y = x + 3$; $y = -x + 3$.

- Одреди ги координатите на точката во која графикот на секоја од функциите ја сече y – оската;
- Воочи што имаат заедничко дадените функции.



Воочи ги слободните членови на функциите. Какви се тие меѓу себе?

Дадените функции имаат ист слободен член +3 и различни коефициенти пред аргументот. Тие ја сечат ординатната оска во точка со координати (0, 3).

Тоа важи општо за функциите со ист слободен член n.

Запомни!

Графиците на линеарните функции со ист слободен член се прави кои ординатната оска ја сечат во точка со координати $(0, n)$.

5. Дадени се функциите: $y = 3x - 2$; $= \frac{1}{2}x - 2$; и $y = -2x + 3$.

- Кои од графиците на тие функции се сечат во точка на y – оската?
- Одреди ги координатите на таа точка.

6. Одреди ги координатите на точката во која графикот на функцијата $= -\frac{1}{2}x + 2$ ја сече ординатната оска.

В **7.**
- Запиши ги функциите во кои: а) $k = 0$, $n = 3$; б) $k = 0$, $n = 1$; и в) $k = 0$, $n = -2$.
- Претстави ги добиените функции графички.

Спореди го твоето решение со даденото.

а) $k = 0$, $n = 3$
$y = 0 \cdot x + 3$
$y = 3$

б) $k = 0$, $n = 1$
$y = 0 \cdot x + 1$
$y = 1$

в) $k = 0$, $n = -2$
$y = 0 \cdot x - 2$
$y = -2$

$y = 0 \cdot x + 3$

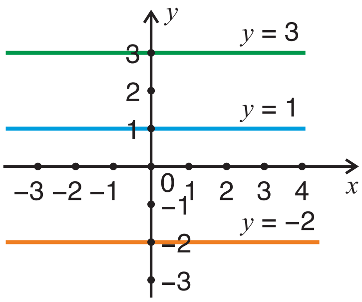
x	1	2
y	3	3

$y = 0 \cdot x + 1$

x	1	2
y	1	1

$y = 0 \cdot x - 2$

x	1	2
y	–2	–2



- Воочуваш дека коефициентот пред аргументот во дадените функции е 0, а нивните графици се прави паралелни со апсцисната оска.
- Во функцијата $y = 0 \cdot x + n$ е $y = n$, т.е. за секоја вредност на x, вредноста на y е n. Функцијата $y = n$ се вика **константна функција**.

Воочи и запомни!

- Графикот на константната функција $y = n$ е права пареленна со x–оската. Нејзиниот график ја сече y–оската во точката $(0, n)$.

Треба да знаеш:

- да објасниш кога графиците на линеарни функции се паралелни прави;
- да објасниш кога графиците на функции се сечат во иста точка на y–оската;
- графички да претставиш константна функција.

Провери се!

▲ Дадена е функцијата $y = 2x - 3$.
На која од следниве функции $y = -2x + 3$, $y = 2x - 1$ и $=\frac{1}{2}x-3$ графикот е права која што:

а) е паралелна со графикот на дадената функција;

б) ја сече ординатната оска во иста точка со графикот на дадената права?

Задачи

1. Која од функциите:

$y = 3x - 2$; $y = -3x + 2$; $=\frac{1}{3}x-2$

има график права паралелна со графикот на функцијата $y = 3x$?

2. Одреди го k така што графикот на функцијата $y = kx + 2$ да биде права паралелна со графикот на функцијата

$=-3x+\frac{1}{2}$.

3. Одреди ги k и n така што графикот на функцијата $y = kx + n$ да биде паралелен со графикот на функцијата $y = 2x - 1$ и да ја сече ординатната оска во точката M(0, –3).

4. Во функцијата $y = 2x + n$ одреди го n така што точката M(0, –1) да му припаѓа на графикот на функцијата.

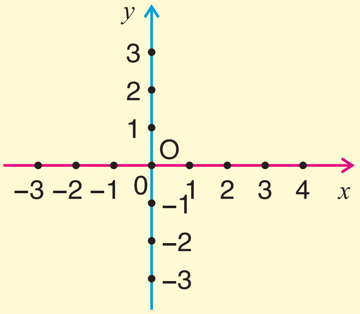
5. Одреди ги k и n така што графикот на функцијата $y = kx + n$ да биде паралелен со графикот на функцијата $y = -2x + 1$ и точката P(–2, 6) да припаѓа на графикот на таа функција.

6. Претстави ги графички, во ист координатен систем функциите: $y = -3$; $y = 2$ и $y = 4$.

16 РАСТЕЊЕ И ОПАЃАЊЕ НА ЛИНЕАРНАТА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- На цртежот е претставен координатен систем Оxy.



- Како се менува големината на броевите што се претставени на x–оската, одлево надесно?
- Како се менува големината на броевите што се претставени на y–оската, одозгора надолу?

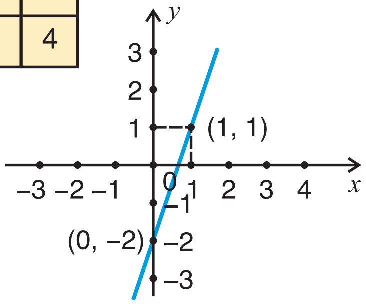
А **1.** Дадена е линеарната функција $y = 3x - 2$.

- Претстави ја функцијата со табела за $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
- Претстави ја функцијата графички.
- Како се менува вредноста на функцијата ако аргументот x се зголемува?

- Спореди го твоето решавање со даденото.

$y = 3x - 2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−5	−2	1	4



☞ Од табелата можеш да воочиш дека:
ако се зголемува вредноста на аргументот, тогаш се зголемува и вредноста на функцијата.

- Поради тоа за функцијата $y = 3x - 2$ се вели дека е *растечка*.

Општо

- За линеарната функција $y = kx + n$ се вели дека е **растечка**, ако со зголемувањето на вредноста на аргументот x се зголемува и вредноста y на функцијата.

2. Дадена е функцијата $y = 4x - 1$.

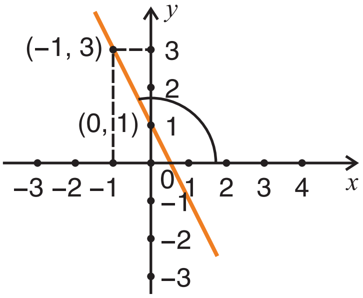
- Претстави ја функцијата со табела за $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- Утврди дали функцијата е растечка.

Б **3.** Дадена е функцијата $y = -2x + 1$.

- Претстави ја функцијата со табела за $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и графички.
- Како се менува вредноста на функцијата, ако вредноста на аргументот се зголемува?

- Спореди го твоето решение со даденото.

x	−2	−1	0	1	2
y	5	3	1	−1	−3



☞ Од табелата можеш да воочиш дека:
ако се зголемува вредноста на аргументот x,
тогаш вредноста на функцијата y се намалува.

- Поради тоа за функцијата $y = -2x + 1$ се вели дека е *опаднувачка*.

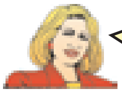
Општо

- За линеарната функција $y = kx + n$ се вели дека е **опаднувачка**, ако со зголемување на вредноста на аргументот x вредноста на функцијата се намалува.

4. Дадена е функцијата $y = -3x + 2$.

- Претстави ја функцијата со табела за $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- Утврди дали функцијата е опаднувачка.

5.
- Каков број (позитивен или негативен) е коефициентот пред аргументот во функциите: $y = 3x - 2$ и $y = 4x - 1$ од задачите 1 и 2?
- Каков број е коефициентот пред аргументот во функциите: $y = -2x + 1$ и $y = -3x + 2$ од задачите 3 и 4?
- Кои од функциите се растечки, а кои опаднувачки?



Што заклучи за дадените функции: кога тие се растечки, а кога опаднувачки?

Во функциите: $y = 3x - 2$ и $y = 4x - 1$ коефициентот пред аргументот е позитивен број и тие се растечки.
Во функциите: $y = -2x + 1$ и $y = -3x + 2$ коефициентот пред аргументот е негативен број и тие се опаднувачки.

- Тоа што го воочи за функциите: $y = 3x - 2$ и $y = 4x - 1$, односно за $y = -2x + 1$ и $y = -3x + 2$ и за константните функции $y = 3$, $y = 1$, $y = -2$ важи општо за линеарните функции.

Запомни!

- Ако во функцијата $y = kx + n$, коефициентот k е позитивен, тогаш функцијата е растечка, а ако $k < 0$, функцијата е опаднувачка.
Ако $k = 0$, тогаш функцијата $y = n$ ни расте ни опаѓа.

6. Одреди која од следниве функции е растечка, а која опаднувачка:

а) $=\frac{1}{2}x+3$; б) $y = x - 5$; в) $y = -5x + 2$; г) $=-\frac{1}{2}x-1$; г) $y = -1$.

Треба да знаеш:

- да утврдиш дали една линеарна функција е растечка или опаднувачка;
- да ја објасниш постапката за утврдување дали една линеарна функција е растечка или опаднувачка.

Провери се!

Одреди од табелата дали функцијата е растечка или опаднувачка.

а) $y = 3x - 5$;

x	0	1	2	3
y	−5	−2	1	4

б) $=-\frac{1}{2}x+2$.

x	0	2	4	6
y	2	1	0	−1

Одреди дали функцијата $y = kx + n$ е растечка или опаднувачка ако:

а) $k=\frac{1}{2}$; б) $k = -3$; в) $k=-\frac{2}{3}$; г) $k = 0$.

Задачи

1. Одреди која од дадениве функции е растечка:

а) $=\frac{2}{5}x-2$; в) $y = -x - 3$;

б) $y = -2x + 5$; г) $y = x - 2$.

2. Одреди која од дадениве функции е опаднувачка:

а) $=\frac{1}{3}x+2$; в) $y = 3x - 5$;

б) $y = -3x + 1$; г) $=-\frac{1}{2}x+2$.

3. За која вредност на $k \in \{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3\}$ функцијата $y = kx + n$ е

а) растечка; б) опаднувачка?

4. Претстави ја графички функцијата $y = 2px - 1$ и утврди дали таа е растечка или опаднувачка, ако:

а) $p = 2$; б) $p = -1$.

5. Претстави ја графички функцијата $y = (a - 3)x + 1$ и утврди дали таа е растечка или опаднувачка, ако:

а) $a = 0$; б) $a = 5$.

6. Графикот на функцијата $y = kx + n$ ја сече y – оската во точка P(0, 2) и минува низ точката A(1, −1).
Одреди дали функцијата е растечка или опаднувачка.

17 ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Потсети се!

■ Нула на функцијата е вредноста на аргументот за која вредноста на функцијата е еднаква на нула.

● Одреди ја нулата на функцијата $y = 2x - 4$.

● Одреди ги координатите на точката во која графикот на функцијата $y = 2x - 4$ ја сече x–оската.

1. Дадена е функцијата $y = 3x - 6$.

● Претстави ја графички функцијата.

● Од графикот одреди ја нулата на функцијата.

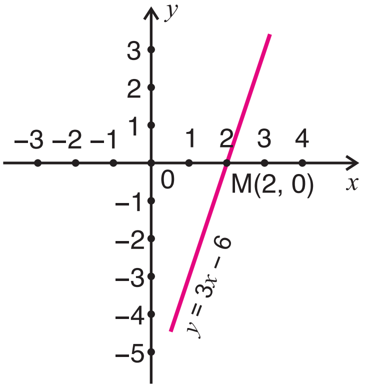
● Одреди го решението на равенката $3x - 6 = 0$.

● Спореди ја нулата на функцијата $y = 3x - 6$ со решението на равенката $3x - 6 = 0$.

Како ќе го одредиш решението на равенката $3x - 6 = 0$ со помош на графикот на функцијата $y = 3x - 6$?

Функцијата $y = 3x - 6$ ќе ја претставам графички и ќе ги одредам координатите на пресечната точка на графикот со x–оската. Со тоа ќе ја одредам и нулата на функцијата, а тој број е решение на равенката $3x - 6 = 0$.

■ Спореди го твоето решение со даденото.



☞ Пресечната точка на графикот и x–оската е M(2, 0).

☞ Нулата на функцијата $y = 3x - 6$ е $x = 2$.

☞ Решението на равенката $3x - 6 = 0$ е

$$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3}, \quad x = 2.$$

☞ Решение на равенката $3x - 6 = 0$ е апсцисата на пресечната точка на графикот на функцијата $y = 3x - 6$ и x – оската, т.е. $x = 2$.

■ Тоа важи општо за линеарните равенки.

Воочи и запомни!

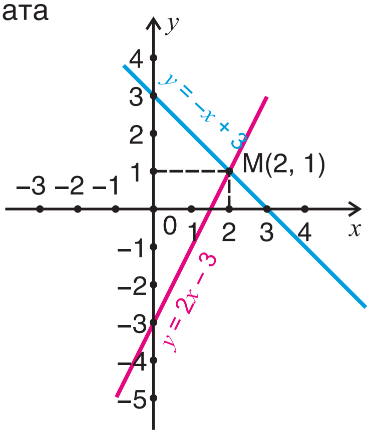
■ Решение на равенката $ax + b = 0$, за $a \neq 0$ е апсцисата на пресечната точка на графикот на функцијата $y = ax + b$ со x–оската.

2. Реши ја графички равенката $x + 2 = 0$.

3. Реши ја графички равенката $2x - 3 = -x + 3$.

- Воочи дека равенката $2x - 3 = -x + 3$ можеш да ја решиш графички ако претходно ја трансформираш во општа форма $ax + b = 0$.
- Постапи според барањата и согледај друг начин на графичко решавање на равенката.

- Реши ја равенката $2x - 3 = -x + 3$.
- Од изразите на левата и десната страна на равенката запиши ги функциите $y = 2x - 3$ и $y = -x + 3$, а потоа претстави ги графички.
- Спореди го решението на равенката со апсцисата на пресечната точка на графиците на функциите.



- Спореди го твоето решение со даденото.

$y = 2x - 3$

x	0	1
y	−3	−1

$y = -x + 3$

x	0	1
y	3	2

☞ Воочуваш дека графиците на двете функции се сечат во точката M(2, 1).

☞ Апсцисата на точката M е $x = 2$, а тоа е и решение на равенката $2x - 3 = -x + 3$.

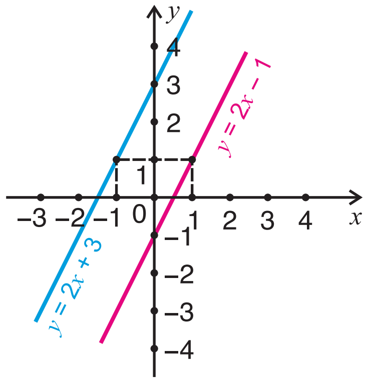
☞ Коефициентите пред аргументот на двете функции се различни ($2 \neq -1$), графиците имаат една заедничка точка и равенката има единствено решение.

4. Реши ја графички равенката $2x - 3 = x + 1$.

5. Реши ја графички равенката $2x - 1 = 2x + 3$.

Спореди ги коефициентите пред аргументот на функциите што ќе ги добиеш. Што воочуваш? Во каква заемна положба ќе бидат графиците?

Двете функции $y = 2x - 1$ и $y = 2x + 3$ имаат ист коефициент пред аргументот, а слободните членови им се различни. Графиците на овие функции се паралелни прави, т.е. немаат заедничка точка.



- Спореди го твоето решение со даденото.

$y = 2x - 1$

x	0	1
y	−1	1

$y = 2x + 3$

x	0	−1
y	3	1

- Графиците на функциите $y = 2x - 1$ и $y = 2x + 3$ се паралелни прави. Тие немаат заедничка точка, па равенката нема решение.

6. Која од дадените равенки нема решение?

а) $2x - 3 = 3x - 2$; б) $4x - 1 = 4x + 2$; в) $2x - 5 = -2x + 3$.

7. Реши ја графички равенката $2x + 1 = 2x + 1$.

Спореди ги коефициентите и слободните членови на функциите што ги добиваш со изразите на левата и десната страна на равенката. Што заклучуваш?

Коефициентите пред аргументот и слободните членови на функциите: $y = 2x + 1$ и $y = 2x + 1$ се еднакви, а графиците на функциите се совпаѓаат.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

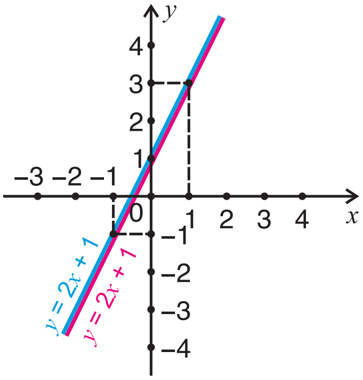
☞ Воочи дека равенката $2x + 1 = 2x + 1$ е идентитет.

$y = 2x + 1$

x	0	1
y	1	3

$y = 2x + 1$

x	0	−1
y	1	−1



■ Графиците на функциите се прави што се совпаѓаат и равенката има бесконечно многу решенија.

8. Одреди која од следниве равенки:

$3x - 1 = 2x + 1$; $3x - 2 = 3x + 1$; $5x - 1 = 5x - 1$.

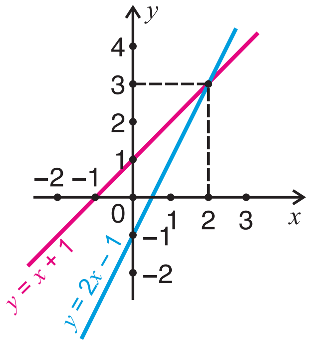
а) има само едно решение; б) нема решение; в) има бесконечно многу решенија.

Треба да знаеш:

- графички да решиш линеарна равенка со една непозната;
- од графикот да заклучиш дали равенката има едно решение, дали нема решение или има бесконечно многу решенија.

Провери се!

- Според цртежот одреди го решението на равенката $2x - 1 = x + 1$.
- Одреди колку решенија има секоја од дадените равенки:
  - $2x - 1 = 2x + 3$;
  - $3x - 2 = 2x - 3$.



Задачи

1. Реши ја графички равенката:

а) $x - 2 = 0$; б) $2x - 6 = 0$.

2. Реши ја графички равенката:
а) $x + 1 = 2x - 1$; б) $3x - 1 = -x + 3$.

3. Во равенката $2x - 3 = kx + 1$, одреди го k така што равенката да нема решение.

4. Одреди ги k и n во функцијата $y = kx + n$ така што равенката $kx + n = 2x + 3$ да има бесконечно многу решенија.

Обиди се ...
Толстоевите косачи

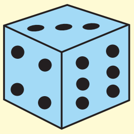
- Една група косачи требало да окоси 2 ливади, од кои едната е двапати поголема од другата. Половина ден сите косачи коселе на големата ливада, а потоа се поделиле на две еднакви групи. Првата група останала да коси на големата ливада и ја докосила до крајот на денот, а втората група косела на малата ливада и на крајот на денот ѝ останал еден дел од ливадата. Тој дел го окосил еден косач, косејќи целиот нареден ден. Колку косачи биле во групата?

РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

18 СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ. ВЕРОЈАТНОСТ НА НАСТАН

Потсети се!

- Еден фудбалски тим игра натпревар. Можни исходи од натпреварот во врска со резултатот се: победа, нерешено, пораз.
- Во една кутија има бели, црни и црвени топчиња. Се извлекува едно топче. Кои се можните исходи од извлекувањето?
- Една коцка за играње се фрла на маса и по нејзиното застанување, една нејзина страна е одозгора. Кои исходи се можни во врска со бројот на точките на таа страна?



А **1.** Бојан фрла монета во воздух. По нејзиното паѓање на земја можно е на нејзината горна страна да се појави „глава“ или „број“.

- Колку можни исходи има?
- Бојан сака да се појави „број“, т.е. **поволен исход** за Бојан е „број“.

Какви се шансите да падне „број“ во однос на „глава“?

- Колку пати може да се повтори фрлањето монета во воздух?

- Фрлањето монета во воздух е **експеримент**. Извлекување карта од шпил со 52 карти е друг пример на експеримент.
- Секој резултат (исход) во врска со даден експеримент Е се вика **настан** (или **последица**) што е во врска со тој експеримент.

- При експериментот фрлање монета во воздух шансата да се појави „број“ или „глава“ е еднаква. За овие настани велиме дека се **еднакво можни**.
- Експериментот Е „фрлање монета во воздух“ може да се повтори, под исти услови, колку што сакаме пати, т.е. може да се направи **серија** од n такви експерименти.

- Во секој од тие експерименти да го набљудуваме настанот A: „падна глава“. Со p(A) да го означиме бројот од експериментите во кои се појавил настанот A во една серија од n експерименти.
  Конкретно! Во следната табела е запишано набљудувањето на настанот A: „падна глава“ во пет серии од по 100 експерименти. Воочи го количникот $\frac{p(A)}{n}$, т.е. $\frac{p(A)}{100}$ за секоја серија.

Серија	p(A)	$\frac{p(A)}{n}$
1	52	0,52
2	49	0,49
3	53	0,53
4	51	0,51
5	48	0,48

- Воочи дека броевите во колоната $\frac{p(A)}{n}$ се блиску до бројот 0,5. Ако бројот на експериментите во серијата се зголемува, тогаш бројот од тој количник ќе биде сѐ поблиску до 0,5. Овој број претставува статистичка вредност за настанот A.

- Бројот до кој се приближуваат количниците $\frac{p(A)}{n}$ од изведените серии се вика **статистичка веројатност на настанот** A. Се означува со V(A).

- Ако разгледаме серија од n експерименти, тогаш бројот p(A) на појавување на настанот A може да биде најмалку 0, а најмногу n, т.е. $0 \leq p(A) \leq n$. Ако поделиме со n, ќе добиеме $\frac{0}{n} \leq \frac{p(A)}{n} \leq \frac{n}{n}$, т.е. $0 \leq \frac{p(A)}{n} \leq 1$.

- Воочи дека бројот $\frac{p(A)}{n}$ за секоја серија од n експерименти е помеѓу 0 и 1. Според тоа и статистичката веројатност на настанот A е помеѓу 0 и 1, т.е. $0 \leq V(A) \leq 1$.

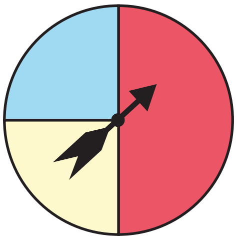
- Настанот A: „падна глава“ во експериментот „фрлање монета во воздух“ се нарекува случаен настан.

Општо

- За еден настан A во врска со експериментот E се вели дека е **случаен настан**, ако важат следните два услови:

1. ☞ Експериментот E може да се повтори при исти услови колку што сакаме пати.
2. ☞ Од повеќе извршени серии на експериментот E, приближно се еднакви количниците $\frac{p(A)}{n}$ на тие серии.

2. Маја има играчка, што се вика вртелешка. Ако ја заврти стрелката можни се три настани: стрелката да застане на црвено поле, на жолто поле или на сино поле.



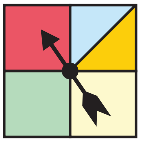
- Воочи ја големината на секое поле. Дали секој од настаните е еднакво можен?
- Ако не, кој настан е со најголема можност?

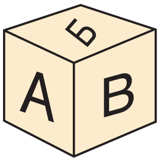
- Настаните не се еднакво можни бидејќи трите обоени полиња не се со иста големина.
- Шансите стрелката да застане на црвено поле се најголеми бидејќи црвеното поле има најголема плоштина.

- Значи, стрелката да застане на црвено поле е најможен или најверојатен настан.

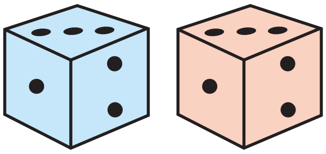
3. Разгледај ги цртежите од експериментите. За секој експеримент запиши:

- можни настани;
- дали тие настани се еднакво можни;
- ако настаните не се еднакво можни, кој настан е најверојатен.

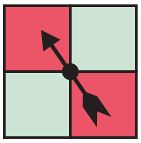

Вртење стрелка на вртелешка



Фрлање коцка со страни означени со А, Б, В, Г, Д, Ѓ


Фрлање сина и црвена коцка во исто време (настаните се подредени парови)


Фрлање топка во кош

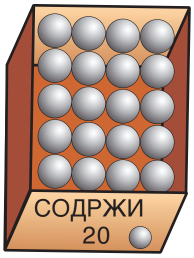
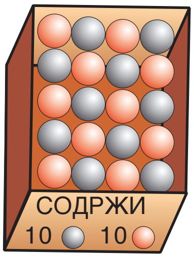
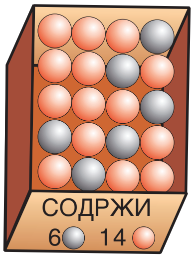

Вртење стрелка на вртелешка

Фрлање монета од два денари

- Настанот од некој експеримент може да биде сигурен, невозможен или можен (веројатен).

4. Разгледај ги примерите:

Дадени се три кутии со топчиња во боја.
Под секоја кутија се запишани тврдења за настани од извлекување топчиња без гледање.

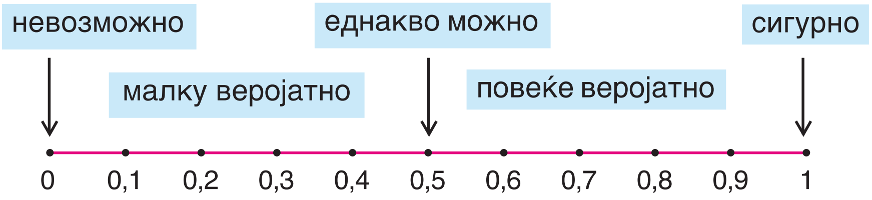
		
▪ Сигурно може да се извлече црно топче. ▪ Невозможно е да се извлече црвено топче.	▪ Можно е да се извлече или црно или црвено топче. ▪ Невозможно е да се извлече бело топче.	▪ Можно е да се извлече или црно или црвено топче. ▪ Повеќе е можно да се извлече црвено отколку црно топче.

- Кога е **сигурно** дека настанот ќе се случи, велиме дека има **веројатност 1** или 100%. Пример, извлечено црно топче од првата кутија.

- Кога е **невозможно** дека настанот ќе се случи, велиме дека има **веројатност 0**. Пример, извлечено бело топче од втората кутија.

- **Сите други можности или веројатности се меѓу 0 и 1**. Пример, извлечено црвено топче од третата кутија.

5. Воочи ја скалата на веројатност.



- Користејќи ја скалата на веројатност за секој настан од листата дадена подолу, одговори:

а) колкава е веројатноста за настанот да се случи, опиши со: невозможно, малку веројатно, еднакво веројатно, повеќе веројатно или сигурно;

б) нацртај скала како дадената и на неа означувај ги настаните 1, 2, 3, ... 10, според тоа колкава е веројатноста тој да се случи;

в) образложи го секој одговор.

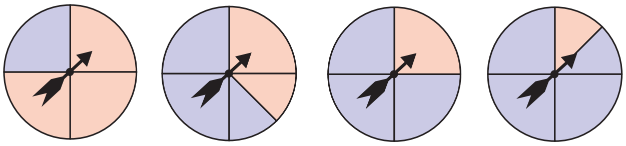
Настан	
1	Утре патуваш на Марс.
2	Вечер ќе пишуваш домашна работа по математика.
3	Сите твои другари ќе одат на училиште утре.
4	Ќе врне денес.
5	Еден вулкан ќе има ерупција оваа година.
6	Ќе заврне снег во август.
7	Ќе заврне дожд оваа година.
8	Ако фрлиш пластично шише, тоа ќе се скрши.
9	Ќе патуваш со брод од Скопје до Битола.
10	Ако фрлаш коцка ќе падне бројот 5.

Треба да знаеш:

- да разликуваш можни од неможни настани;
- да образложиш кој настан е случаен настан;
- да наведеш примери на настани со веројатност 0, меѓу 0 и 1 и веројатност 1;
- да процениш веројатност на настан при едноставен експеримент.

Задачи

1. Воочи ги вртелешките:



а) б) в) г)

- Кој од редоследот по кој се запишани е соодветен за подредување според веројатноста стрелката да застане на синото поле?

а б в г;
г в б а;
а в б г;
в б г а.

2. Во едно ќесе има 2 сини коцки и 3 портокалови коцки.
Опиши ја веројатноста да се извлече:

- сина коцка;
- портокалова коцка;
- или сина коцка или портокалова коцка;
- жолта коцка.

Провери се!

- Запиши по еден пример:
  - настан што има веројатност 0;
  - настан што има веројатност 0,5;
  - настан што има веројатност 1.

3. Запиши ја секоја буква од зборот АНАНАС на посебна картичка.
Измешај ги картичките и влечи картички без гледање.

- Опиши ја веројатноста да извлечеш:
  а) буква Н;
  б) буква А;
  в) буква А или буква Н;
  г) буква С.
- Колку најмалку картички треба да извлечеш за да бидеш сигурен дека ќе го добиеш името АНА?

Обиди се:

Во една фиока има црни и црвени чорапи.

- Колку најмалку пати Аце треба да зема, без гледање, по еден чорап од фиоката, за да бидеш сигурен дека ќе извлече еден пар чорапи со иста боја?

УЧЕШЕ ЗА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА, ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА И ЗА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА. ПРОВЕРИ ГО ТВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. Провери дали $x = 3$ е решение на равенката $3x - 2 = x + 4$.

2. Равенката $5x - 3 = 2x + 3$ има решение $x = 2$.
Која од следниве равенки е еквивалентна со дадената:

а) $x + 2 = 7 - x$;

б) $2x - 1 = x + 1$;

в) $3x - 1 = 2x + 3$?

3. Реши ја равенката:

а) $3x - 2{,}5 = x + 1{,}7$;

б) $4(x - 1) - 3(2x + 1) = -9$;

в) $\frac{3x-1}{4} - \frac{2+x}{5} = 1$.

4. Во равенката $ax + 4 = 5x - a + 11$ определи го a така што $x = -2$ да биде решение на таа равенка.

5. Збирот на три последователни природни броеви е 84. Кои се тие броеви?

6. Од местото А кон местото В тргнал камион кој се движи со брзина 50 km на час. Два часа подоцна од А тргнала лесна кола која се движи со брзина 75 km на час. Лесната кола го стигнала камионот во местото В. Одреди го растојанието меѓу местата А и В.

7. Провери дали $x = -1$ е решение на неравенката $3x^2 - 2x > x + 3$.

8. Во множеството D = {0, 1, 2, 3} се зададени неравенките:
$2x - 1 > x - 2$; $3x + 1 > 2x - 3$.
Провери дали дадените неравенки се еквивалентни.

9. Реши ја неравенката:

а) $4(x - 1) > 3x - 1$;

б) $\frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{6} < \frac{x+3}{2}$.

Решението престави го со интервал и графички.

10. Реши го системот неравенки:

а) $\begin{cases} -8 - \quad > 2 \quad + 1 \\ 2 \quad - 3 > 5 \quad - 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} > \frac{x+1}{4} - 1 \\ 3 \; x - 1 \; - 3 < x - 1. \end{cases}$

Решението на системот претстави го со интервал и графички.

11. Дадена е линеарната функција $y = 2x - 3$.

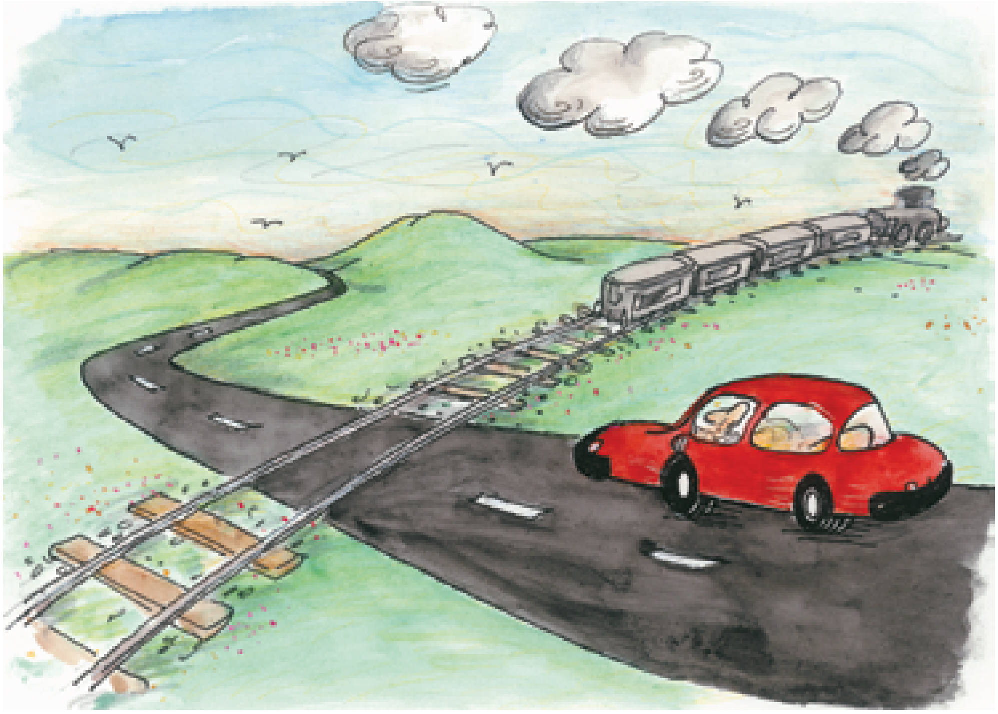
- Претстави ја графички функцијата.
- Одреди ја нулата на функцијата.

12. Дадена е функцијата $y = 2x - 3$.
Одреди која од точките: A(0, –3), B(1, 1) и C(2, 1) припаѓа на графикот на таа функција.

13. Во функцијата $y = 2x + n$ одреди го n така што точката M(1, –1) да припаѓа на графикот на таа функција.

14. Одреди која од следниве функции е растечка, а која спаднувачка:
$y = -3x + 1$; $y = 3x - 2$;
$y = 2x - 3$; $y = -x - 1$.

15. Реши ја графички равенката
$3x - 1 = x + 3$.



ТЕМА 3. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

1 ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Според бројот на непознатите една равенка може да биде:
  - – со една непозната;
  - – со две непознати итн.
- Според степенот на непознатите равенката може да биде:
  - – линеарна (равенка од прв степен);
  - – квадратна (равенка од втор степен);
  - – кубна (равенка од трет степен) итн.

Според тоа дали равенката содржи параметри или не, таа може да биде:
- – параметарска равенка;
- – равенка со посебни коефициенти.

● Воочи ги равенките:

а) $2x + 3 = 5$; б) $2x + y = 3$;
в) $2x^2 = x + 1$; г) $2x + y = kx + 3$.

На секоја од равенките определи ѝ го видот според бројот на непознатите и според степенот на непознатите. Која од равенките е равенка со параметар?

А **1.** Јован и Илија заедно имаат 9 бонбони. Колку бонбони има Јован, а колку Илија?

● Колку решенија има задачата?

- Воочи ги следниве решења на задачата:

Јован	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Илија	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

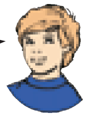
- Нека со парот броеви (0,9) е претставено решението: Јован има 0 бонбони, а Илија има 9 бонбони.

● Запиши ги како подредени парови сите други решенија, ако првиот број во парот е бројот бонбони на Јован, а вториот број во парот е бројот бонбони на Илија.

- Нека x е бројот бонбони на Јован, а y е бројот од бонбони на Илија. Реченицата Јован и Илија заедно имаат 9 бонбони, може да се запиште: $x + y = 9$.

Кои вредности може да има x, а кои y во равенката $x + y = 9$?

Вредностите на променливите x и y се елементи на множеството А = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, така што нивниот збир е 9.



- Множеството А = {0, 1, 2, 3, ..., 9} претставува **дефиниционо множество** за равенката $x + y = 9$.

- Множеството подредени парови R = {(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)} претставува **множеството решенија** на равенката $x + y = 9$.

- Воочи дека $x + y = 9$ е равенка која според бројот на непознатите е со 2 непознати, а според степенот на непознатите е линеарна.

● Одреди го видот на равенката $2x - y = 5$ според бројот на непознатите и според степенот на непознатите.

■ Ако за равенката не е дадено дефиниционото множество, понатаму ќе сметаме дека тоа е множеството **R** на реалните броеви.

Запомни

■ Равенката од видот $ax + by = c$, каде што a, b и c се реални броеви (коефициенти), а x и y се реални непознати, се вика **линеарна равенка со две непознати**.

■ Воочи ја равенката $4x + 3y = 9$; таа е линеарна со 2 непознати x и y, а коефициенти се броевите 4, 3 и 9.

2. Дадена е равенката $3x + y = 7$. Најди неколку вредности на x и y, за кои равенката поминува во точно бројно равенство.

■ Воочи го примеров: за $x = 1$ и $y = 4$.
$3x + y = 7$; $3 \cdot 1 + 4 = 7$; $7 = 7$.
Согледај дека подредениот пар
$(x, y) = (1, 4)$ е едно решение на равенката.

● Провери дали подредениот пар (x, y) е решение на равенката ако:

а) $x = 2$ и $y = 1$;
б) $x = 1$ и $y = 3$;
в) $x = 4$ и $y = -5$;
г) $x = -1$ и $y = 10$.

■ **Решение на линеарна равенка со две непознати** е секој подреден пар од реални броеви за кои равенката преминува во точно бројно равенство.

■ Множеството $M = \{(x, y) \mid x, y \in R$ и $3x + y = 7\}$, претставува множеството решенија на равенката $3x + y = 7$.

3. ● Провери дали подредениот пар $(x, y) = (4, -6)$ е решение на равенката $2x - \frac{1}{3}y = 10$.

● Дали равенката $3(u - 2) = 2(1 - v)$ преминува во точно бројно равенство за $u = 0$ и $v = -5$?

4. Дадена е равенката $x - 2y = 4$. Одреди три нејзини решенија.

■ Воочи ја постапката.

☞ Се избира произволен реален број за x. Пример: $x = 3$.

☞ Се заменува вредноста за x во равенката: $3 - 2y = 4$.

☞ Се решава добиената линеарна равенка со една непозната чие решение е:

$$3 - 2y = 4; \quad -2y = 4 - 3; \quad -2y = 1; \quad -y = \frac{1}{2}; \quad y = -\frac{1}{2}.$$

☞ Значи, подредениот пар $(x, y) = (3, -\frac{1}{2})$ е едно решение на дадената равенка.

● Применувајќи ја покажаната постапка одреди уште 2 решенија на дадената равенка.

Треба да знаеш:

- која равенка е линеарна равенка со 2 непознати;
- да одредиш решенија на линеарна равенка со две непознати.

Провери се!

- Која од равенките: $x + 5 = y - 3$; $y - 7x = 10$ и $9 = 2y$ е линеарна равенка со 2 непознати?
- Дали подредениот пар (1, 6) е решение на равенката $3x - y = -3$?

Задачи

1. За секоја од равенките запиши кои се нејзините непознати, а кои се нејзините коефициенти:

а) $2x - y = 3$; в) $y = 2z - 1$;

б) $3x + 2y = x - 4y + 1$; г) $5u + 3v = 16$.

2. Одреди дали подредениот пар:

а) (4,–6) е решение на равенката

$2x - \frac{1}{3}y = 10$;

б) (0, –5) е решение на равенката $3(u - 2) = 2(1 - v)$.

3. Одреди ја непознатата компонента во подредениот пар (x, y) за соодветната равенка да премине во точно бројно равенство.

а) $(\square, -2)$ за равенката $y = 2x$;

б) $(0, \square)$ за равенката $2x + y = \frac{1}{2}$;

в) $(-6, \square)$ за равенката $\frac{1}{2}x + 2y = 7$.

4. Откако во линеарна равенка со две непознати едната непозната се замени со дадена бројна вредност, равенката преминува во:

а) точно бројно равенство;

б) линеарна равенка со една непозната;

в) линеарна равенка со две непознати;

г) линеарна неравенка.

Кои од овие тврдења се точни?

5. Одреди ги решенијата на равенката $2x + y = -1$ за $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

6. Дадена е равенката $3(x + y) = 2x - 3$. Изврши ги следните барања според дадениот редослед:

1° ослободи се од заградите во равенката;

2° запиши ги членовите со непозната од левата страна, а членот без непозната од десната страна на знакот „=";

3° сведи го изразот на левата страна во нормален вид.

Која равенка се добива?

2 ЕКВИВАЛЕНТНИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

● Кој подреден пар од реални броеви е решение на една линеарна равенка со две непознати?

● Провери дали подредениот пар $(x, y) = (-1, 2)$ е решение на равенката $2x - y = -4$ и на равенката $3x - y = x - 4$.

1. Одреди ги решенијата на равенките

А: $4x + y = 6$ и

В: $2x + \frac{1}{2}y = 3$

за $y=4$.

■ Спореди го твоето решавање со даденото.

А: $4x + y = 6$; $4x + y = 6$; $4x + 4 = 6$; $4x = 6 - 4$; $4x = 2$; $x = \frac{2}{4}$; $x = \frac{1}{2}$. **Решение:** $(\frac{1}{2}, 4)$.

В: $2x + \frac{1}{2}y = 3$; $2x + \frac{1}{2}y = 3$; $2x + \frac{1}{2} \cdot 4 = 3$; $2x + 2 = 3$; $2x = 3 - 2$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.

Решение: $(\frac{1}{2}, 4)$.

■ Воочи дека подредениот пар $(\frac{1}{2}, 4)$ е решение и на равенката А и на равенката В.

● Избери вредност за x и одреди ги решенијата на равенките А и В. Што заклучуваш?

2. Провери дали равенките: $3(x + 2y) = 5y + 1$ и $3x + y = 1$ имаат еднакви решенија за $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

■ Воочи ја постапката за $x = -1$.

$3(x + 2y) = 5y + 1$;	$3x + y = 1$;
$3(-1 + 2y) = 5y + 1$;	$3(-1) + y = 1$;
$-3 + 6y = 5y + 1$;	$-3 + y = 1$;
$6y - 5y = 1 + 3$;	$y = 1 + 3$;
$y = 4$;	$y = 4$;
$(x, y) = (-1, 4)$.	$(x, y) = (-1, 4)$.

Воочи и запомни

■ Две линеарни равенки со две непознати се **еквивалентни** ако нивните множества решенија се еднакви.

■ Исто како кај линеарните равенки со една непозната, можеш да применуваш трансформации на линеарна равенка со две непознати и да ја сведеш во форма $ax + by = c$.

Воочи ги трансформациите на равенките

P_1: $2(2x + y) - 7 = 3x - 2$ *и* P_2: $\frac{2(x+3\ )}{3} = 5 - x$.

Трансформација (Т)	Равенка P_1: $2(2x + y) - 7 = 3x - 2$	Равенка P_2: $\frac{2(x+3\ )}{3} = 5 - x$
Т1: Едната страна на равенката се заменува со идентичен израз	$\Leftrightarrow\ 4x + 2y - 7 = 3x - 2$	$\Leftrightarrow\ \frac{4x+6}{3} = 5 - x$
Т2: Секој член од равенката може да се пренесе од едната на другата страна, но со спротивен знак: членовите со непознати на левата, а константните членови на десната страна.	$\Leftrightarrow\ 4x + 2y - 3x = -2 + 7$ $\Leftrightarrow (4x - 3x) + 2y = 7 - 2$ $\Leftrightarrow\ x + 2y = 5$	$\Leftrightarrow\ \frac{4x+6}{3} + x = 5$
Т3: Двете страни на равенката се множат со ист број различен од нула.		$\Leftrightarrow \frac{3(4x+6\ )}{3} + 3x = 5 \cdot 3$ $\Leftrightarrow\ 4x + 6y + 3x = 15$ $\Leftrightarrow\ 7x + 6y = 15$

- Воочи дека со користење на трансформации, равенките P_1 и P_2 се сведени во: $x + 2y = 5$ и $7x + 6y = 15$, т.е. во форма $ax + by = c$. Од оваа форма можеш полесно да го одредиш множеството решенија на равенките.

За $x = k$, $k \in \mathbf{R}$, се определува множеството решенија на равенката:	$x + 2y = 5$; $k + 2y = 5$; $2y = 5 - k$; $y = \frac{5-k}{2}$; $\left\{\left(k, \frac{5-k}{2}\right) \mid k \in \mathbf{R}\right\}$	$7x + 6y = 15$; $7k + 6y = 15$; $6y = 15 - 7k$; $y = \frac{15-7k}{6}$; $\left\{\left(k, \frac{15-7k}{6}\right) \mid k \in \mathbf{R}\right\}$

- Одреди ги решенијата на P_1 и P_2 за: а) $k = 0$; б) $k = 2$; в) $k = 4$.

3. Одреди го множеството решенија на равенката: а) $y = 3x - 5$; б) $x - 1 = 3x - y$.

4. Одреди го множеството решенија на равенката $-2x + y = 1$, а потоа претстави го графички во правоаголен координатен систем.

- Воочи ја постапката и спореди го твоето решение со даденото.

☞ $-2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 2x + 1$; за $x = k$, $k \in \mathbf{R}$; $y = 2k + 1$.

☞ Множеството решенија на равенката е: $\{(k, 2k + 1) \mid k \in \mathbf{R}\}$.
Запишуваме: $R(-2x + y = 1) = \{(k, 2k + 1) \mid k \in \mathbf{R}\}$.

- Одреди ги решенијата на равенката за:
а) $k = -1$; б) $k = 0$; в) $k = 1$.

x	−1	0	1	2
y	−1	1	3	5

- Воочи дека со равенката $-2x + y = 1$ во множеството **R** (реални броеви) е определена линеарната функција $y = 2x + 1$.

$\{(k, 2k + 1) \mid k \in \mathbf{R}\}$

На цртежот графички е претставена линеарната функција $y = 2x + 1$.

Подредените парови (x, y) од графикот на функцијата се решенија на равенката $y = 2x + 1$. Што претставуваат тие парови за равенката $-2x + y = 1$?

Бидејќи $-2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 2x + 1$, тогаш подредениот пар координати на која било точка од графикот на функцијата $y = 2x + 1$ е решение на равенката $-2x + y = 1$.

Воочи дека со графикот на линеарната функција $y = 2x + 1$, графички е претставено множеството решенија на равенката $-2x + y = 1$. Велиме дека тоа е **график на равенката**.

- Провери дали подредените парови кои претставуваат координати на точките: A(–1, –1); B(0, 1); C(1, 3) и D(2, 5) се решенијата на равенката $-2x + y = 1$.

5. Одреди го множеството решенија на равенката: $3x - y = 1$.

- Провери дали подредениот пар (–1, –4) е решение на равенката.
- Множеството решенија на равенката претстави го графички.
- Од графикот на равенката одреди ја втората координата на точката S(2, ▢). Согледај дека добиениот подреден пар е решение на равенката $3x - y = 1$.

Треба да знаеш:

- кои две линеарни равенки со две непознати се еквивалентни;
- да користиш трансформации за да добиеш еквивалентна равенка на дадена линеарна равенка со две непознати;
- да одредиш множество решенија на равенка;
- графички да го претставиш множеството решенија на равенката.

Задачи

1. Одреди го множеството решенија на равенката:

а) $2x + y = 3$; б) $3x + 2y = x - 4y + 1$.

2. Секоја од равенките доведи ја во форма $ax + by = c$ со користење на трансформации.

а) $3(x + y) = 2x - 3$; б) $(x - 3)\,(y - 2) - 1 = xy$;

в) $\frac{x+3}{4} - \frac{x+}{3} = 2 + x$;

г) $5(x - 3) + 8(\quad - 2) = \frac{x}{4} - \frac{}{4}$.

Провери се!

- Со користење на трансформации провери дали равенката $x + 2y = 6$ е еквивалентна со равенката $\quad = 3 - \frac{x}{2}$.
- Множеството решенија $\{(k, k - 1) \mid k \in \mathbf{R}\}$ на една линеарна равенка со две непознати претстави го графички.

3. Одреди го множеството решенија на секоја од равенките и претстави го графички:

а) $2x + 3y = 6$; б) $x - \frac{1}{2}\quad = 3$;

в) $2x + 0 \cdot y = 4$.

4. Одреди ја вредноста на параметарот p за подредениот пар (0, 1) да биде решение на равенката:

$$(p - 5)x - (3p - 1)y = 5 - p.$$

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

3 СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Која равенка се вика линеарна равенка со две напознати?
- Одреди го множеството решенија на линеарната равенка со две непознати:

$$x + y = 7$$

Колку решенија има равенката?

1. Илија и Мартин имаат по еден аквариум со риби.

Збирот од бројот на рибите во двата аквариуми е 10. Разликата од бројот на рибите во аквариумот на Илија и аквариумот на Мартин е 4.

- Колку риби има во аквариумот на Илија, а колку во аквариумот на Мартин?

- Воочи го решението:
Нека во аквариумот на Илија има x риби, а во аквариумот на Мартин има y риби.

☞ Од првиот услов во задачата следува: $\boxed{x + y = 10.}$

Променливите x и y се менуваат во множеството A={1, 2, 3,..., 9}. Зошто? Во табелата се дадени решенијата на равенката.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1

☞ Од вториот услов во задачата следува: $\boxed{x - y = 4.}$

Разгледај ја табелата и воочи ги решенијата.

x	5	6	7	8	9
y	1	2	3	4	5

- Во едниот аквариум има 7 риби (од Илија), а во другиот (од Мартин) има 3 риби. Нивниот збир е 7 + 3 = 10, а нивната разлика е 7 – 3 = 4.

- Одреди кој од подредените парови (x, y) е заедничко решение на двете равенки.
- Воочи дека парот $(x, y) = (7, 3)$ е решение на равенката $x + y = 10$ и на равенката $x - y = 4$.

- Согледај дека оваа задача ја реши така што одреди заедничко решение на две линеарни равенки со две непознати, т.е. го одреди пресекот на нивните множества решенија.

Запомни

- Две линеарни равенки со две исти непознати, за кои се бара заедничко решение, односно пресек на нивните множества решенија, се вика **систем од две линеарни равенки со две непознати**.

Се запишува: $\begin{cases} a_1x + b_1 \ = c_1 \\ a_2x + b_2 \ = c_2 \end{cases}$ x и y се *непознати*, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и c_2 се реални броеви (*коефициенти*).

2. Запиши ги равенките од задачата 1 како систем и одреди ги непознатите и коефициентите на системот.

3. Воочи го системот: $\begin{cases} 3x + \quad = 1 \\ \frac{2}{3}x - 3 \quad = -2. \end{cases}$

- Именувај ги непознатите.
- Одреди ги коефициентите на системот.

Б **4.** Провери дали подредениот пар $(x, y) = (2, -1)$ е решение на равенката: $3x + 2y = 4$.

- Провери дали парот $(x, y) = (2, -1)$ е решение на равенката: $x - y = 3$.

Воочи дека парот (2,–1) е заедничко решение на двете равенки од системот, т.е. подредениот пар $(x, y) = (2, -1)$ е решение на системот: $\begin{cases} 3x + 2 \quad = 4 \\ x - \quad = 3 \end{cases}$.

Општо, **решение на систем од две линеарни равенки со две непознати** е подреден пар од реални броеви којшто е заедничко решение на двете равенки.

5. Провери за кој од системите подредениот пар (–2, 3) е решение:

а) $\begin{cases} x - \quad = -5 \\ 2x + 2 \quad = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2 \quad = 4 \\ 3x + 5 \quad = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3 \quad = 3 \\ x + 5 \quad = 1. \end{cases}$

Потсети се!

- Ако во даден систем неравенки една од неравенките се замени со еквивалентна неравенка на неа, се добива систем неравенки што е еквивалентен на дадениот.
- Зошто системот $\begin{cases} 10x > 20 \\ x > -3 \end{cases}$ е еквивалентен со $\begin{cases} 5x > 10 \\ x > -3 ? \end{cases}$
- Ако две линеарни равенки со две непознати имаат еднакви множества решенија, тогаш тие се еквивалентни.
- Провери дали равенката $3(x + 2y) = 5y + 1$ и равенката $3x + y = 1$ се еквивалентни.

В **6.** Дадени се системите:

А: $\begin{cases} x + \quad = 5 \\ 3x - \quad = 3 \end{cases}$ и В: $\begin{cases} \quad = 5 - x \\ 3x - \quad = 3. \end{cases}$

Множеството решенија на системот А е пресекот на множествата решенија за равенката $x + y = 5$: $\{(k, 5 - k) \mid k \in \mathbf{R}\}$ и за равенката $3x - y = 3$: $\{(k, 3(k - 1) \mid k \in \mathbf{R}\}$.

Пресекот на множествата решенија ќе го одредиш со изедначување на компонентите на подредените парови. Првите компоненти се еднакви, т.е. $k = k$. Одреди го k од вторите компоненти, т.е. реши ја равенката $5 - k = 3(k - 1)$.

- Провери дали парот $(x, y) = (2, 3)$ е решение на системот А.

Множество решенија на системот В е пресекот од множествата решенија за равенката $y = 5 - x$: $\{(k, 5 - k) \mid k \in \mathbf{R}\}$ и за равенката $3x - y = 3$: $\{(k, 3k - 3) \mid k \in \mathbf{R}\}$.

- Кој е пресекот на множествата решенија на равенките во системот В.
- Провери дали парот $(x, y) = (2, 3)$ е решение на системот В.
- Воочи дека равенките во системот В имаат исти множества решенија како равенките во системот А.

Овие два системи имаат еднакви множества решенија. Парот $(x, y) = (2, 3)$ е решение на системот А и на системот В.

Ако два система равенки имаат еднакви множества решенија, тогаш тие се **еквивалентни**.

Системот А: $\begin{cases} x+\quad =5 \\ 3x-\quad =3 \end{cases}$ и системот В: $\begin{cases} \quad =5-x \\ 3x-\quad =3 \end{cases}$ се еквивалентни.

- Која од равенките во системот В е еквивалентна на равенката $x + y = 5$ во системот А, и со која трансформација е добиена?

Ако некоја од равенките на даден систем се замени со еквивалентна равенка на неа, се добива систем еквивалентен на дадениот.

7. Воочи и образложи зошто се еквивалентни системите:

- $\begin{cases} 5x-\quad =x-4 \\ x+\quad =3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x=\quad -4 \\ x+\quad =3; \end{cases}$
- $\begin{cases} x+\quad =8 \\ 2x+\quad =3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+\quad =3 \\ 2x+2\quad =16. \end{cases}$

Со еквивалентни трансформации даден систем се трансформира во еквивалентен систем кој има форма $\begin{cases} x=a \\ \quad =b \end{cases}$.

Од него непосредно може да се прочита решението на системот.
Парот $(x, y) = (a, b)$ е решение на системот.

8. Воочи го решавањето на системот: $\begin{cases} 2(x+\quad)=6+2 \\ \quad =5. \end{cases}$

$\begin{cases} 2(x+\quad)=6+2 \\ \quad =5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2\quad =6+2 \\ \quad =5 \end{cases}$ ☜ Левата страна на првата равенка е заменета со идентичен израз.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2\quad -2\quad =6 \\ \quad =5 \end{cases}$ ☜ Членот $2y$ е пренесен на левата страна од равенката (со спротивен знак).

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ \quad =5 \end{cases}$ ☜ Изразот на левата страна на првата равенка е доведен во нормален вид.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \quad =5 \end{cases}$ ☜ Првата равенка е решена по x, т.е. левата и десната страна се поделени со 2.

Парот $(x, y) = (3, 5)$ е решение на системот равенки.

9. Реши го системот: $\begin{cases} x=-7 \\ 2(\quad -1)+3x=3(x+2). \end{cases}$

Треба да знаеш:

- што е систем од две линеарни равенки со две непознати и како се запишува;
- да провериш дали даден подреден пар е решение на даден систем равенки;
- да определиш еквивалентен систем на даден систем;
- да решиш систем доведувајќи го во форма од каде непосредно може да се прочита решението.

Задачи

1. Одреди ги непознатите и коефициентите во секој од системите:

а) $\begin{cases} 2x - \quad = 6 - \\ \quad = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2 \quad = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \quad = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0,25x + 0,04 \quad = 0 \\ 4x + 25 \quad = 641. \end{cases}$

2. Запиши ги како систем од две линеарни равенки со две непознати речениците:

- Збирот на два броја е 64, а нивната разлика е 17.
- Еден внатрешен агол на триаголникот ABC е 52°. Разликата на другите два агли е 18°.
- Во две касички има вкупно 440 денари. Ако од првата се прфрлат во втората 180 денари, во касичките ќе има еднаква сума пари.

3. Провери дали подредениот пар:

а) (2, 10) е решение на системот:

$\begin{cases} 3x - \quad = -4 \\ \quad = 5x; \end{cases}$

б) (2, 2) е решение на системот:

$\begin{cases} x - 4 \quad = -6 \\ 5x - 3 \quad = 4; \end{cases}$

в) (1, 1) е решение на системот:

$\begin{cases} x + \quad = 2 \\ 2x - \quad = 0. \end{cases}$

Провери се!

▲ Одреди еквивалентен систем на системот $\begin{cases} 5x - 3 \quad = 2x + 1 \\ \quad = 2x + 3 \end{cases}$, во кој двете равенки ќе имаат форма $ax + by = c$.

▲ Провери дали подредениот пар $(x, y) = (3, 2)$ е решение на системот: $\begin{cases} 2x - \quad = 6 - \\ \quad = 2. \end{cases}$

4. Одреди еден еквивалентен систем на системот:

а) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \quad = 2 \\ x - 2 \quad - 5 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2 \quad = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \quad = 2. \end{cases}$

5. Одреди еквивалентен систем на системот: $\begin{cases} (x-1)(x+1) - 2 \quad = (x-3)^2 \\ \frac{x}{2} - \frac{\quad}{2} = x, \end{cases}$ во кој двете равенки имаат форма $ax + by = c$.

6. Реши го системот:

а) $\begin{cases} x - \quad = -2 - \\ \quad = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = -3 \\ x + \quad = 3 + x. \end{cases}$

7. Бојан и Дејан се браќа. Збирот од годините на Бојан и на Дејан е 16.
Збирот од годините на Бојан и половината од годините на Дејан е 12.

- Запиши систем од две линеарни равенки со две непознати според условите во задачата.
- Дали Бојан и Дејан се близнаци?

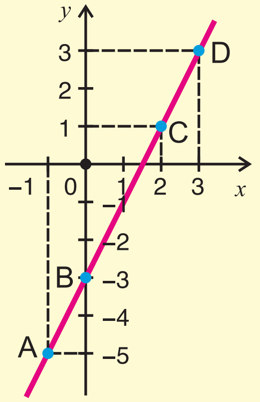
Образложи го својот одговор.

4 ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Воочи го графикот на равенката $2x - 3 = y$.

x	y
-1	-5
0	-3
2	1
3	3



- Одреди ги координатите за секоја од точките A, B, C и D. Што претставуваат координатите на тие точки за дадената равенка?

1. Во иста координатна рамнина (на ист цртеж), нацртај ги графиците на равенките: $x + y = 5$ и $3x - y = 3$.

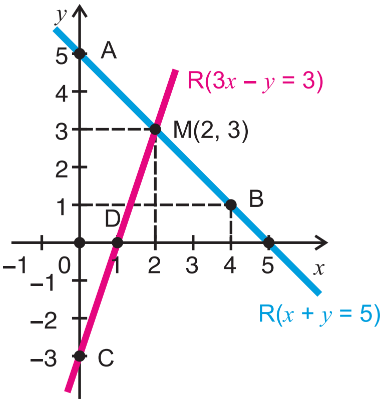
- Воочи дека со дадените равенки се определени функциите: $y = 5 - x$ и $y = 3x - 3$.
- Спореди го твоето решение со даденото.

$x + y = 5$
$y = 5 - x$

x	y	
0	5	A(0, 5)
4	1	B(4, 1)

$3x - y = 3$
$y = 3x - 3$

x	y	
0	–3	C(0, -3)
1	0	D(1, 0)



- Нека точката во која се сечат графиците на равенките е точката M. Одреди ги координатите на точката M.
- Пресекот на множествата решенија на двете равенки е подредениот пар координати на точката M(2, 3).

Парот $(x, y) = (2, 3)$ е единствено решение на системот равенки $\begin{cases} x + \quad = 5 \\ 3x - \quad = 3. \end{cases}$

2. Графички реши го системот равенки: $\begin{cases} 3x - \quad = 3 \\ 3x + \quad = 0. \end{cases}$

Потсети се!

- Две прави во рамнината можат:
  - да се сечат во една точка;
  - да се совпаѓаат;
  - да се заемно паралелни прави.
- Графиците на равенките во еден систем се прави, и системот има онолку решенија колку што заеднички точки имаат графиците.

Б

- Системот од две линеарни равенки со две непознати:
  - ☞ има едно решение, ако графиците на равенките се сечат;
  - ☞ има бесконечно многу решенија, ако графиците на равенките се прави што се совпаѓаат;
  - ☞ нема решение, ако графиците на равенките се различни паралелни прави.

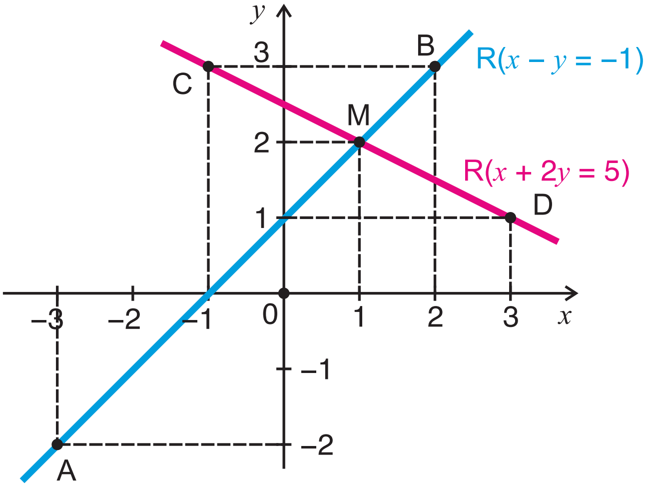
3. ■ Проследи го графичкото решавање на системот: $\begin{cases} x+2 \quad = 5 \\ x- \quad = -1. \end{cases}$

$x + 2y = 5$

x	y	
−1	3	☞ C
3	1	☞ D

$x - y = -1$

x	y	
−3	−2	☞ A
2	3	☞ B



- Запиши ги координатите на точките A, B, C, D и M.
- Која од точките е пресек на графиците?

■ Воочи дека системот има само едно решение $R_s = \{(1, 2)\}$, т.е. $(x, y) = (1, 2)$.

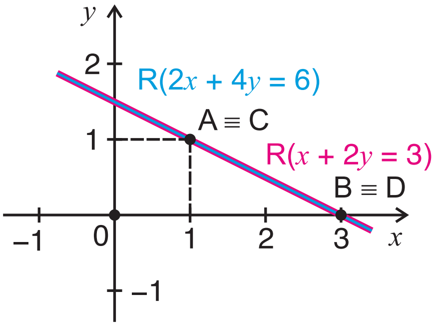
4. ■ Проследи го графичкото решавање на системот: $\begin{cases} x+2 \quad = 3 \\ 2x+4 \quad = 6. \end{cases}$

$x + 2y = 3$

x	y	
1	1	☞ A
3	0	☞ B

$2x + 4y = 6$

x	y	
1	1	☞ C
3	0	☞ D



- Запиши ги координатите на точките A, B, C и D.

■ Воочи дека сите точки од графиците се заеднички и системот има бесконечно многу решенија.

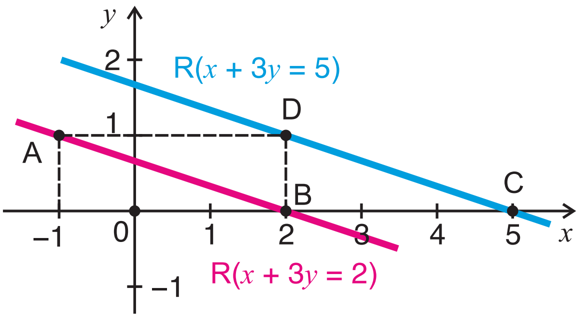
5. ■ Проследи го графичкото решавање на системот: $\begin{cases} x+3 \quad = 2 \\ x+3 \quad = 5. \end{cases}$

$x + 3y = 2$

x	y	
−1	1	☞ A
2	0	☞ B

$x + 3y = 5$

x	y	
5	0	☞ C
2	1	☞ D



- Запиши ги координатите на точките A, B, C и D.
- Дали графиците имаат заедничка точка?

■ Воочи дека графиците се различни паралелни прави и системот нема решение, т.е. $R_s = \varnothing$.

Треба да знаеш:

- да ги нацрташ графиците на двете равенки од системот линеарни равенки во една координатна рамнина;
- графички да решиш систем од две линеарни равенки со две непознати;
- да го процениш множеството решенија на системот според графиците на равенките.

Провери се!

- Во кој случај системот од две линеарни равенки со две непознати:

  а) има само едно решение;

  б) има бесконечно многу решенија;

  в) нема решение?

- Образложи го својот одговор.

Задачи

1. Реши го графички секој од системите:

а) $\begin{cases} \ \ =8-4x \\ \ \ =5x-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \ \ =x+2 \\ 3x- \ \ =-6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ -6x=0 \\ 4x- \ \ =2. \end{cases}$

2. ● Графички реши го секој од системите.

● По колку решенија има секој од нив?

а) $\begin{cases} 2x- \ \ =1 \\ \ \ =1-x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3 \ \ =2 \\ 2x+6 \ \ =4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \ \ =x \\ x=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+2 \ \ =1 \\ \ \ =1. \end{cases}$

3. *Потсети се!*

- Графикот на функцијата $y = ax$ е права што минува низ координатниот почеток.
- Графикот на функцијата $y = ax + b$, е права што е паралелна со графикот на функцијата $y = ax$.
- Графикот на функцијата $y = a$ е права паралелна со x–оската. Графикот на функцијата $x = a$ е права паралелна со y–оската.

- Секоја од равенките во системите подолу запиши ја како функција:

а) $\begin{cases} \ \ =2x \\ \ -2x=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+ \ \ -1=0 \\ \ \ =1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=3 \\ \ \ =2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+ \ \ =2 \\ 3x+3 \ \ =6. \end{cases}$

- За секој систем процени ја заемната положба на графиците на функциите и процени го множеството решенија на системот.
- Реши го графички секој од системите и провери ја својата проценка.

5 РЕШАВАЊЕ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ СО МЕТОД НА ЗАМЕНА

Потсети се!

- Кои два системи равенки се еквивалентни?
- Провери дека подредениот пар $(x, y) = (5, 1)$ е решение на системите:

$$\begin{cases} x = 8 - 3 \\ 2x - 4 \quad = 6 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} x = 8 - 3 \\ 2(8 - 3 \quad) - 4 \quad = 6 \end{cases}$$

- Што забележуваш за равенките во двата системи?

1. Воочи ги системите А и В од две линеарни равенки со две непознати.

$$А: \begin{cases} 2x + \quad = 1 \\ 3x - 5 \quad = 21 \end{cases} \quad и \quad В: \begin{cases} \quad = 1 - 2x \\ 3x - 5(1 - 2x) = 21 \end{cases}.$$

- Како се добиени равенките во вториот систем од равенките на првиот систем?

Првите равенки во А и В се еквивалентни, а во втората равенка од системот В, непознатата y е заменета со израз од првата равенка.

- Покажи дека подредениот пар $(x, y) = (2, -3)$ е решение на системите.

Ако во една од равенките во системот, едната непозната се изрази преку втората, и потоа со добиениот израз се замени таа непозната во другата равенка, тогаш новодобиената равенка и првата равенка од системот образуваат нов систем што е еквивалентен на дадениот систем. Ова се вика **својство на замена**.

2. Воочи го решавањето на системот $\begin{cases} 3x + 2 \quad = 13 \\ \quad = 5 \end{cases}$ со користење на својството на замена.

$$\begin{cases} 3x + 2 \quad = 13 \\ \quad = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \cdot 5 = 13 \\ \quad = 5 \end{cases}$$

Во првата равенка, непознатата y е заменета со вредноста за y од втората равенка.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 10 = 13 \\ \quad = 5 \end{cases}$$

Се добива систем еквивалентен на претходниот.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 13 - 10 \\ \quad = 5 \end{cases}$$

Се користи еквивалентна трансформација (10 се префрла од другата страна на знакот „=” со спротивен знак).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ \quad = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \quad = 5 \end{cases}$$

$R_s = \{(1, 5)\}$.

Добиениот систем е од видот $\begin{cases} x = a \\ \quad = b, \end{cases}$ од каде непосредно се чита подредениот пар $(x, y) = (1, 5)$ што е решение на системот.

- Реши го системот равенки $\begin{cases}2x+\quad=6\\ x=3.\end{cases}$ со користење на својството на замена.

3. Одреди го подредениот пар што е решение на системот: $\begin{cases}\quad=x-5\\ 5x+2\quad=4.\end{cases}$

Воочи

Можеш да го користиш својството на замена така што во втората равенка непознатата y ќе ја замениш со изразот x – 5 еднаков на y од првата равенка.

$$\begin{cases}\quad=x-5\\ 5x+2\quad=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\quad=x-5\\ 5x+2(x-5)=4\end{cases}$$

Ако продолжиш да решаваш правилно, ќе го добиеш еквивалентниот систем:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\quad=x-5\\ x=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\quad=2-5\\ x=2\end{cases}$$

Ако непознатата x во првата равенка ја замениш со вредноста 2 за x од втората равенка, ќе добиеш систем од кој можеш да го запишеш решението.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\quad=-3\\ x=2.\end{cases}$$

- Провери дали за подредениот пар (x, y) = (2,–3), равенките од системот се точни бројни равенства.

- На сличен начин реши го системот равенки: $\begin{cases}\quad=x-1\\ x+\quad=3.\end{cases}$

4. Проследи го решавањето на системот равенки: $\begin{cases}3x+2\quad=5\\ 2x-3\quad=-14.\end{cases}$

$$\begin{cases}3x+2\quad=5\\ 2x-3\quad=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2\quad=5\\ x=\dfrac{3\quad-14}{2}\end{cases}$$

Воочи: Во втората равенка непознатата x е изразена преку y.
Понатаму, x во првата равенка се заменува со изразот за x од втората и понатаму се вршат трансформации.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\cdot\dfrac{3\quad-14}{2}+2\quad=5/\cdot2\\ x=\dfrac{3\quad-14}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(3\quad-14)+4\quad=10\\ x=\dfrac{3\quad-14}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9\quad-42+4\quad=10\\ x=\dfrac{3\quad-14}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13\quad=10+42\\ x=\dfrac{3\quad-14}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}13\quad=52\\ x=\dfrac{3\quad-14}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\quad=4\\ x=\dfrac{3\cdot4-14}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\quad=4\\ x=\dfrac{12-14}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\quad=4\\ x=-1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x=-1\\ \quad=4.\end{cases}$$

- Провери дека паротот $(x, y) = (-1, 4)$ е решение на системот равенки.

- Реши го системот равенки $\begin{cases} 5x-3 \quad =17 \\ 2x+3 \quad =11. \end{cases}$

■ Ваквиот начин на решавање на систем линеарни равенки со две непознати се вика решавање на системот со **метод на замена**.

5. ■ Во системот равенки: $\begin{cases} \frac{x+}{2}-\frac{x-}{3}=8 \\ \frac{x+}{3}+\frac{x-}{4}=11; \end{cases}$ ниту една од равенките не е запишана во форма $ax + by = c$.

За да се реши ваков систем, претходно е потребно равенките да се доведат во форма $ax + by = c$.

- Проследи го решавањето: $\begin{cases} \frac{x+}{2}-\frac{x-}{3}=8/\cdot 6 \\ \frac{x+}{3}+\frac{x-}{4}=11/\cdot 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+}{2}\cdot 6-\frac{x-}{3}\cdot 6=8\cdot 6 \\ \frac{x+}{3}\cdot 12+\frac{x-}{4}\cdot 12=11\cdot 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+\quad)-2(x-\quad)=48 \\ 4(x+\quad)+3(x-\quad)=132 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3\quad -2x+2\quad =48 \\ 4x+4\quad +3x-3\quad =132 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5\quad =48 \\ 7x+\quad =132 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=48-5 \\ 7(48-5\quad)+\quad =132 \end{cases} \cdots$$

- Продолжи со решавањето. Точно си решавал ако си добил систем $\begin{cases} x=18 \\ \quad =6 \end{cases}$, односно подреден пар $(x, y) = (18, 6)$, што е решение на дадениот систем равенки.

- Реши го системот равенки: $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{}{2}=1 \\ \frac{x}{2}+\frac{}{2}=4 \end{cases}$.

■ Ако при решавањето на систем равенки, по извршените трансформации се добие систем во кој една од равенките нема решение (на пример, ако се добие $0 \cdot x = -1$), тогаш системот нема решение.
Ако, пак, се добие систем во кој секој реален број е решение на една од равенките (на пример, $0 \cdot y = 0$), а другата равенка не е противречна, тогаш системот има бесконечно многу решенија.

6. Реши го системот А: $\begin{cases} x+\quad=3 \\ 2x+2\quad=5 \end{cases}$ и системот В: $\begin{cases} 2x+3\quad=1 \\ 4x+6\quad=2. \end{cases}$

● Воочи дека системот А нема решение, а системот В има бесконечно многу решенија.

Треба да знаеш:

- да одредиш решение на систем од две линеарни равенки со две непознати со користење на методот на замена;
- правилно да ги користиш еквивалентните трансформации при решавање на систем равенки.

Провери се!

▲ Образложи како ќе постапиш при решавањето на системот: $\begin{cases} x=5 \\ 2x+\quad=7, \end{cases}$ со користење на методот на замена.

Задачи

Во следните задачи реши ги системите равенки со методот на замена.

1. а) $\begin{cases} 3x+2\quad=14 \\ \quad=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3\quad=5 \\ \quad=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x=0 \\ 3x+2\quad=14 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} x-\quad=2 \\ 3x-2\quad=9 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \quad=11-2x \\ 5x-4\quad=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+\quad-13=0 \\ 2x-3\quad-5=0 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} 2x-\quad=2 \\ 3x+4\quad=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \quad-2\quad=3 \\ 5\quad+\quad=4 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x=3-6 \\ 5x-\quad=16. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \frac{2}{3}\ 2x+x\ -\frac{1}{2}\ x-\quad=8 \\ x+\quad=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{\quad}{3}=6 \\ \frac{x}{2}-\frac{\quad}{4}=-1. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{\quad+5}{2}=1 \\ \quad=\frac{x+1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{\quad+1}{2}=\frac{x-\quad}{3} \\ \frac{x-3}{4}-\frac{\quad-3}{2}=2\quad. \end{cases}$

6 РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ СО МЕТОД НА СПРОТИВНИ КОЕФИЦИЕНТИ

1. Дадени се системите равенки А: $\begin{cases} 2x-3 \quad =12 \\ 5x+3 \quad =9 \end{cases}$ и В: $\begin{cases} 2x-3 \quad =12 \\ 2x-3 \quad + \; 5x+3 \quad =12+9. \end{cases}$

- Покажи дека подредениот пар $(x, y) = (3, -2)$ е решение на двата системи.
- Воочи дека системите се еквивалентни. Како се добиени равенките во вториот систем од равенките во првиот систем?

Првите равенки и во двата системи се исти, а втората равенка во системот В е добиена со собирање на левите, односно десните страни на првата и втората равенка од системот А.

- Ако соодветните страни на две равенки ги собереме, односно одземеме, велиме дека сме извршиле **собирање**, односно **одземање на равенките**.

- Ако во даден систем која било равенка се замени со збирот или разликата на равенките, се добива нов систем што е еквивалентен со дадениот.
- Ова се вика **својство на збир** на равенките во системот.

2. Проследи го решавањето на системот $\begin{cases} 5x-2 \quad =5 \\ 7x+2 \quad =31 \end{cases}$ со користење на својството на збир.

$$\begin{cases} 5x-2 \quad =5 \\ 7x+2 \quad =31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2 \quad =5 \\ 5x-2 \quad + \; 7x+2 \quad =31+5 \end{cases}$$

На втората равенка од системот е додадена првата равенка од системот.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2 \quad =5 \\ 5x-2 \quad +7x+2 \quad =31+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2 \quad =5 \\ 12x=36 \end{cases}$$

Се добива систем еквивалентен на првиот и втората равенка се сведува на равенка со една непозната.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2 \quad =5 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\cdot 3-2 \quad =5 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \quad =5-15 \\ x=3 \end{cases}$$

Се решава системот со методот на замена.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \quad =-10 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad =5 \\ x=3. \end{cases}$$

Равенките се доведуваат во видот $\begin{cases} x=a \\ \quad =b \end{cases}$.

- Провери дали $(x, y) = (3, 5)$ е решение на системот.
- Реши го системот равенки $\begin{cases} 2x+ \quad =1 \\ 3x- \quad =9. \end{cases}$

Важно е да воочиш дека:

- коефициентите пред x, односно пред y во двете равенки треба да бидат спротивни броеви;
- при собирањето на соодветните страни на равенките се добива равенка со една непозната;
- во новодобиениот еквивалентен систем едната равенка е со една непозната, па системот понатаму се решава со методот на замена.

3. Реши го системот равенки: $\begin{cases}5x+2\ \ =3\\ x+\ \ =3.\end{cases}$

- Коефициентите пред x, односно пред y, не се спротивни броеви, па ако ги собереш равенките нема да добиеш еквивалентен систем во кој едната равенка е со една непозната.
- Која трансформација треба да ја извршиш на втората равенка од системот за коефициентите пред x или пред y да бидат спротивни броеви?

Ако двете страни на втората равенка ги помножам со –5, тогаш коефициентите пред x ќе бидат спротивни броеви.
Ако двете страни на оваа равенка ги помножам со –2, тогаш коефициентите пред y ќе бидат спротивни броеви.

- Спореди го твоето решение со даденото.

$$\begin{cases}5x+2\ \ =3\\ x+\ \ =3\ /\cdot\ -5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+2\ \ =3\\ -5x-5\ \ =-15\end{cases}$$

☜ Со множење на втората равенка со (–5), се добива еквивалентен систем во кој коефициентите пред x се спротивни броеви.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5x+2\ \ =3\\ 5x+2\ \ +\ -5x-5\ \ =3-15\end{cases}$$

☜ Се собираат равенките и се добива систем во кој втората равенка се сведува на равенка со една непозната.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5x+2\ \ =3\\ -3\ \ =-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x+2\ \ =3\\ \ \ =4 \qquad \ldots\end{cases}$$

☜ Понатаму системот се решава по метод на замена.

- Доврши го решавањето на системот.
- Провери дали (x, y) = (–1, 4) е решение на системот.
- Реши го истиот систем така што коефициентите пред y да бидат спротивни броеви.
- Реши го системот $\begin{cases}3x+\ \ =1\\ 2x+3\ \ =-4.\end{cases}$

4. Реши го системот равенки: $\begin{cases}2m+7n=9\\ 3m+2n=5.\end{cases}$

- Во овој систем, за да се добијат равенки со спротивни коефициенти пред m (или пред n) треба да се помножи со 3 првата равенка, а со (– 2) втората равенка (или со 2 првата равенка, а со (–7) втората равенка).

- Доврши го решавањето на системот:

$$\begin{cases}2m+7n=9 & /\cdot 3\\ 3m+2n=5 & /\cdot\ -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6m+21n=27\\ -6m-4n=-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6m+21n=27\\ 6m+21n\ +\ -6m-4n\ =27-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6m+21n=27\\ 17n=17 \quad \ldots\end{cases}$$

- Провери дека $(m, n) = (1, 1)$ е решение на системот.
- Реши го истиот систем така што коефициентите пред n да бидат спротивни броеви.

Ваквиот начин на решавање систем равенки се вика решавање со **метод на спротивни коефициенти**.

5. Со користење на методот на спротивни коефициенти реши го системот равенки:

$$\begin{cases}7x-2\ \ =3\\ 3x+8\ \ =-43.\end{cases}$$

Треба да знаеш:

- методот на спротивни коефициенти посебно е згоден за користење кога коефициентите пред непознатите се спротивни броеви или кога со множење лесно може да се доведат до спротивни броеви;
- да решаваш систем равенки со методот на спротивни коефициенти.

Задачи

- Реши ги системите со методот на спротивни коефициенти:

1. $\begin{cases}2x-3\ \ =12\\ 5x+3\ \ =9;\end{cases}$ $\begin{cases}3\ \ -7x=32\\ 2x-3\ \ =3.\end{cases}$

2. $\begin{cases}4x+3\ \ =-4\\ 6x+5\ \ =-7;\end{cases}$ $\begin{cases}6x-7\ \ =44\\ 5\ \ -2x=-4.\end{cases}$

3. $\begin{cases}7x-8\ \ =19\\ 3x+5\ \ =25.\end{cases}$

4. $\begin{cases}5\ x+2\ \ \ -3=x+5\\ 4\ x-3\ \ \ =50-\ \ .\end{cases}$

Провери се!

- Процени кој од системите е позгоден за решавање со методот на спротивни коефициенти:

$$\begin{cases}6x-7\ \ =40\\ 5\ \ -2x=-3\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2x+11\ \ =15\\ 10x-11\ \ =9.\end{cases}$$

- Образложи го одговорот.

5. $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{}{3}=7\\ \frac{2x}{3}-\frac{}{4}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{7x}{6}+\frac{5}{3}=34\\ \frac{7x}{6}+\frac{}{4}=17.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x+2\ \ +6=0\\ 3x-2\ \ =-2\end{cases};$ $\begin{cases}x-4\ \ =8\\ 3x-2\ \ +6=0\end{cases}.$

7. Определи го решението на системите графички, а потоа изврши проверка решавајќи ги со метод на замена или спротивни коефициенти.

а) $\begin{cases}2x+3\ \ =9\\ 3x-2\ \ =7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+3\ \ =3\\ 4x+6\ \ =5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+2\ \ =2\\ 3x+6\ \ =6\end{cases}.$

7 ПРИМЕНА НА СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

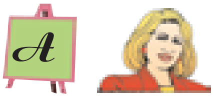
- Запиши ја реченицата: „Збирот на два броја е 6, а разликата на половината од првиот број и вториот број е 0” со систем од две линеарни равенки со две непознати.

■ Системот што треба да го добиеш е:

$$\begin{cases} x + \quad = 6 \\ \frac{x}{2} - \quad = 0. \end{cases}$$

Со решавање на овој систем ќе откриеш кои се тие два броја.

- Провери дали парот $(x, y) = (4, 2)$ е решение на системот, т.е. дали двата барани броја се 4 и 2.



При решавањето на различни задачи од математика, другите науки или проблемски ситуации од секојдневниот живот, често треба да определиш непознати вредности.

Проблемите (задачите) во вакви ситуации се искажани со зборови, а за да се решат потребно е да се претставаат математички во вид на равенки.

1. ■ Воочи ги упатствата што треба да се почитуваат при решавањето вакви задачи и редоследот на постапките што треба да се користат.

Почеток

Внимателно се чита задачата и се определува што е познато, а што е непознато.

☞

Означување на величините

Непознатите се означуваат (x, y, a, b итн.) и се воочуваат нивните карактеристики.

☞

Воочување на заемните врски

Се воочуваат заемните врски меѓу непознатите и познатите величини.

☞

Составување систем

Се формираат равенки, се составува систем и системот се решава.

Пример: Јован има 17 монети со вкупна вредност 67 денари. Монетите се од по 2 денари, и од по 5 денари. Колку монети од по 2 денари, а колки од 5 денари има Јован?

Почеток

Познато:
- бројот на монети;
- вкупната вредност;
- видот на монети.

Непознато:
- по колку монети има од секој вид.

☞

Означување

- со x бројот на монети од 5 ден;
- со y бројот на монети од 2 ден.

☞

Заемни врски

- бројот на монети е 17; $(x + y = 17)$;
- вкупната вредност е 67 ден. $(5x + 2y = 67)$.

☞

Систем

$$\begin{cases} x + \quad = 17 \\ 5x + 2 \quad = 67 \end{cases}$$

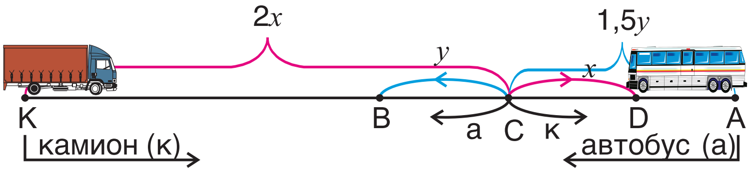
- Реши го системот.
- Решение на системот е $(x, y) = (11, 6)$. Провери дали се точни тврдењата во задачата ако Јован имал 11 монети од по 5 денари и 6 монети од по 2 денари.

2. На две полици имало 124 книги. На првата полица имало 3 пати повеќе книги отколку на втората. По колку книги имало на секоја полица?

3. Местото K и местото A се оддалечени 190 km. Од K кон A тргнал камион, а по половина час од A кон K тргнал автобус. По два часа од тргнувањето на камионот тие се пресретнале и продолжиле да се движат.
Еден час по сретнувањето автобусот и камионот биле оддалечени 110 km. Со кои брзини се движеле автобусот и камионот?

Оваа задача е со движења. За решавањето на овие задачи полесно е да се воочуваат заемните врски ако се направи цртеж.

- Воочи го цртежот:



ПОЗНАТО

- Од K поаѓа камионот, од A поаѓа автобусот.
- Местото каде што се сретнале е во точката C.
- Од K до C камионот се движел 2 часа.
- Од A до C автобусот се движел 1,5 часа.
- Од C до D камионот патувал 1 час.
- Од C до B автобусот патувал 1 час.
- Растојанието од B до D е 110 километри.

ОЗНАЧУВАЊЕ

- Брзината на камионот е x.
- Брзината на автобусот е y.

ЗАЕМНИ ВРСКИ

- Бидејќи движењата на камионот и автобусот се рамномерни, се користи формулата за рамномерно движење $s = v \cdot t$, односно во нашиов случај v е x или y.
- Камионот од местото K до C (за 2 часа) изминал пат $2x$.
- Автобусот од местото A до C (за 1,5 часа) изминал пат $1,5y$.
- За 1 час од C до D камионот изминал $1 \cdot x$.
- За 1 час од C до B автобусот изминал $1 \cdot y$.

Според цртежот: $\overline{KC}+\overline{CA}=\overline{KA}$ или $2x + 1,5y = 190$; $\overline{CD}+\overline{CB}=\overline{DB}$ или $1x + 1y=110$.

СИСТЕМ РАВЕНКИ

$$\begin{cases} 2x+1\,5 \quad = 190 \\ x+ \quad = 110 \end{cases}$$

- Реши го системот.
- Провери дали е точно дека камионот се движел со брзина 50 km/h, а автобусот со 60 km/h.

4. Еден брод се движи по течението на реката со брзина 25 km/h, а спроти течението на реката со 20 km/h. Определи ја брзината на бродот и брзината на реката.

5. Дадени се два раствора киселини K_1 и K_2. Растворот K_1 е 36%, а растворот K_2 е 96%. По колку литри треба да се земе од секој од растворите, за да се добие 120 литри раствор од 80%?

Треба да се потсетиш за проценти.

Запомни дека во m литри со k% раствор има $\frac{k \cdot m}{100}$ литри киселина.

П О З Н А Т О

- Растворот K_1 е 36%.
- Растворот K_2 е 96%.
- Новиот раствор треба да е 80%.

О З Н А Ч У В А Њ Е

- Бројот литри што треба да се земат од K_1 нека е x.
- Бројот литри што треба да се земат од K_2 нека е y.

З А Е М Н И   В Р С К И

- Во x литри раствор од K_1 има $\frac{36x}{100}$ литри киселина.
- Во y литри раствор K_2 има $\frac{96}{100}$ литри киселина.
- Во 120 литри од новиот раствор има x литри K_1 и y литри K_2 или: $x + y = 120$.
- Во 120 литри од новиот раствор има $\frac{120 \cdot 80}{100}$ литри киселина или $\frac{36x}{100} + \frac{96}{100} = \frac{120 \cdot 80}{100}$.

С И С Т Е М   Р А В Е Н К И

$$\begin{cases} x + \quad = 120 \\ \frac{36x}{100} + \frac{96}{100} = \frac{120 \cdot 80}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \quad = 120 \\ 3x + 8 \quad = 800 \end{cases}$$

- Реши го системот.
- Провери дали $(x, y) = (32, 88)$ ги задоволува условите на задачата.

6. Колку литри вода и колку литри 90% шпиритус треба да се измешаат за да се добие 60 литри од 75% шпиритус?

7. Збирот од должините на двете катети во правоаголен триаголник е 20 cm. Ако помалата катета се продолжи за 2 cm, а поголемата се скрати за 4 cm, тогаш плоштината на триаголникот ќе се намали за 8 cm^2.
Одреди ги должините на катетите на триаголникот.

За да ги решаваш ваквите задачи треба да се потсетиш за формулите и својствата на рамнинските геометриски фигури.

ПОЗНАТО

- Збирот од должините на катетите е 20 cm.
- Кај правоаголниот триаголник катетата е и висина на триаголникот.
- Плоштината на триаголникот е $P = \frac{a \cdot h}{2}$, каде што a е основа на триаголникот, а h е соодветната висина.

ОЗНАЧУВАЊЕ

- Должината на помалата катета е x.
- Должината на поголемата катета е y.

ЗАЕМНИ ВРСКИ

- Збирот од должините на катетите е: $x + y = 20$.
- По продолжувањето на помалата катета, нејзината должина е $x + 2$.
- По скратувањето на поголемата катета, нејзината должина е $y - 4$.
- Плоштината на триаголникот на почетокот е $\frac{x \cdot}{2}$.
- Плоштината на триаголникот по продолжувањето и скратувањето на соодветните катети е $\frac{x \cdot}{2} - 8$.

СИСТЕМ РАВЕНКИ

$$\begin{cases} x + \quad = 20 \\ \frac{x + 2 \cdot \quad - 4}{2} = \frac{x \cdot}{2} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \quad = 20 \\ 4x - 2 \quad = 8 \end{cases}$$

- Реши го системот.
- Провери дали парот $(x, y) = (8, 12)$ се бараните должини на катетите на триаголникот.

8. Висината на еден трапез е 6 cm, а неговата плоштина е 96 cm^2. Должините на паралелните страни му се разликуваат за 4 cm. Одреди ги должините на паралелните страни на тој трапез (основите).

Треба да знаеш:

- да ги искажеш и примениш постапките за решавање на проблемска задача која се сведува на систем од две равенки со две непознати.

Провери се!

За задачата: „Одреди два броја чиј збир е 100, а односот им е 4”, примени ги постапките:

- Означи ги непознатите и запиши ги заемните односи на познатите и непознаните величини.
- Состави систем равенки и реши го.
- Провери го решението.

Задачи

1. Збирот на два броја е 72, а нивната разлика е 2. Кои се тие броеви?

2. Во една паралелка има вкупно 28 ученици. Бројот на момчињата е за 4 поголем од бројот на девојчињата. Колку од учениците во паралелката биле момчиња, а колку биле девојчиња?

3. Еден брод изминал 63 km за 5 часа пловејќи спроти течението на реката. Кога бродот пловел по течението на реката истото растојание го поминал за 3 часа. Колкава е брзината на бродот, а колкава брзината на реката?

4. Ако во 8 литри топла вода се додадат 2 литри постудена вода, тогаш температурата на водата е 66°.
Ако, пак, во 7 литри топла вода се додадат 3 литри постудена вода, температурата на измешаната вода е 59°.
Колкава била температурата на топлата вода, а колкава на постудената вода?

5. Јован купил 8 тетратки (големи и мали) и платил 250 денари. Големите тетратки чинеле по 50 денари, а малите по 20 денари.
Колку големи, а колку мали тетратки купил Јован?

6. Мајката и ќерката заедно имаат 37 години. Пред две години мајката била 10 пати постара од ќерката.
Колку години има мајката, а колку ќерката?

7. Одреди ги мерните броеви на остар и тап агол со паралелни краци ако нивната разлика е 36°.

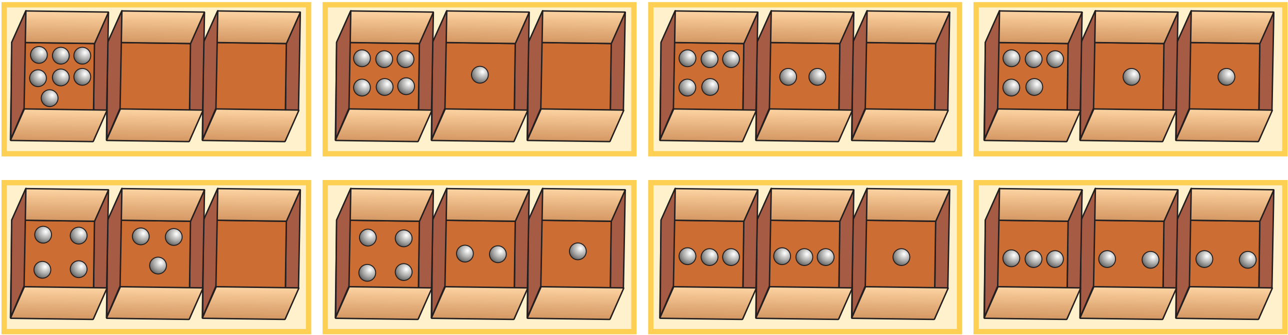
8. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 36 cm. Разликата на должините на кракот и основата е 3 cm. Одреди ја плоштината на триаголникот.

9. Во еден кафез имало зајаци и фазани. Иван изброил 35 глави, а 94 нозе во кафезот. Колку зајаци, а колку фазани имало во кафезот?

8 РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМИ СО ПРИНЦИПОТ НА ДИРИХЛЕ

Пример: Седум топчиња распореди ги во три кутии кои не се посебно означени.

- Тоа можеш да го направиш на осум начини. Воочи на цртежот.



Натаму, наша цел нема да биде одредувањето на бројот на можностите (начините) за решавање на задачата. Наша цел ќе биде почитувањето на еден принцип.

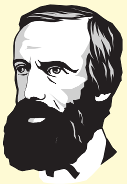
Воочи

Како и да се распоредат седумте топчиња, секогаш ќе постои кутија во која ќе има барем три топчиња.

Опишаниот пример претставува едноставна форма на еден значаен принцип познат како **принцип на Дирихле**.

Тој гласи:

Ако во n кутии се распоредат повеќе од n предмети, тогаш барем во една од кутиите ќе има повеќе од еден предмет.



Петар Густав Лежен Дирихле
(1805-1859)
германски
математичар

1. а) Може ли да се тврди дека во паралелка од 34 ученици сигурно има најмалку двајца ученици чии презимиња започнуваат со иста буква?

б) Дали ова тврдење важи ако во паралелката има 30 ученици?

- Спореди го твоето решение со даденото.

- а) Овде, според принципот на Дирихле, буквите од азбуката се „кутии“. Нив ги има 31. Во **најнеповолен** случај, за презимињата на 31 ученик би биле „заземени“ сите 31 буква.

● Со која буква започнуваат презимињата на останатите тројца ученици?

■ Тие започнуваат со некоја од веќе „заземените” букви.

● На колку најмалку ученици презимињата започнуваат со иста буква?

■ Во паралелката има барем двајца ученици чии презимиња започнуваат со иста буква.

● б) Зошто тврдењето не важи кога во паралелката би имало помалку од 31 ученик?

2. На една математичка школа учествувале 372 ученици. Докажи дека меѓу нив има барем двајца ученици кои во ист ден слават роденден.

3. Едно училиште има 16 паралелки од V до VIII одделение. Во секцијата „Млади математичари” членуваат 18 ученици. Докажи дека меѓу нив има барем двајца ученици од иста паралелка.

Воочи

■ Најнеповолен случај е кога од секоја паралелка во секцијата членува по еден ученик. Но, тоа е вкупно 16 ученици.

● Што заклучуваш за преостанатите двајца ученици од секцијата?

4. Во паралелката има 30 ученици. На писмената работа по математика некои ученици направиле 8 грешки, а другите ученици направиле помалку. Докажи дека во паралелката има најмалку 4 ученици кои направиле ист број грешки на писмената работа.

● Кој е најголемиот број направени грешки?

■ Спореди го твоето решение со даденото.

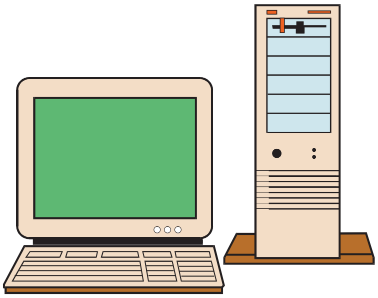
■ Најголемиот број направени грешки е 8. Значи, има ученици што направиле 8 грешки; можно е да има ученици со: 7 грешки; 6 грешки;...; 1 грешка, а и ученици што не направиле грешка (т.е. направиле нула грешки).

■ Сите ученици ги разделуваме во 9 групи:
1) ученици што направиле 8 грешки;
2) ученици што направиле 7 грешки итн. Во деветтата група се учениците што не направиле грешка.

- Најнеповолен случај е ако 3 ученици направиле 8 грешки, 3 направиле 7 итн., а 3 ученици не направиле грешка. Тоа се вкупно $3 \cdot 9 = 27$ (имаме 9 групи од ученици).

- Но, $30 = 3 \cdot 9 + 3$. Преостанатите тројца ученици направиле 8, 7, ..., 2, 1 или 0 грешки, т.е. според принципот на Дирихле, има група ученици во која има најмалку 4 ученици што направиле ист број грешки или не направиле грешки.

5. Во паралелката има 34 ученици. При внесување на ист текст во компјутерот Петар направил 13 грешки, а другите помалку.
Докажи дека има тројца ученици кои направиле ист број грешки.



- Принципот на Дирихле е применлив во многу подрачја од математиката. Проследи неколку задачи со неговата примена во деливост на броевите и во гео–метријата.

6. Дадени се произволни 5 броја. Докажи дека меѓу нив има барем два броја такви што нивната разлика е делива со 4.

Работи според упатството:

● Колку и кои остатоци се добиваат при делење со бројот 4?	Се добиваат 4 остатоци: 0, 1, 2, или 3.

- При делење на петте броја со 4 се добиваат 5 остатоци. Значи, најмалку два од остатоците се еднакви (според принципот на Дирихле).

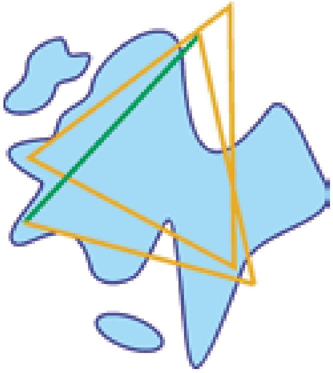
● Нека броевите a и b при делење со 4 даваат ист остаток p, каде што $p \in \{0, 1, 2, 3\}$.	$a = 4m + p$; $b = 4n + p$.

● Разликата $a - b = (4m + p) - (4n + p) = 4(m - n) = 4k$ е од облик $4k$, т.е. таа е делива со 4. Запишуваме $4 \mid (a - b)$.

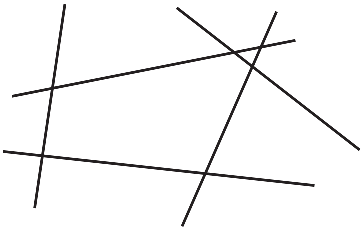
7. Колку најмалку природни броеви треба да се земат за да има меѓу нив такви два броја чија разлика е делива со 7?

8. На бел лист хартија (20 cm x 30 cm) е разлеано мастило. Докажи дека на овој лист постојат барем две точки со иста боја кои се оддалечени 10 cm една од друга.

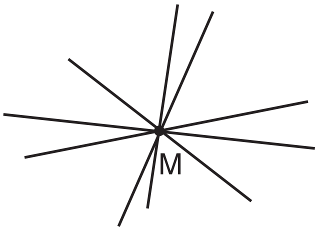
- Проследи го објаснението.
- Конструирај рамностран триаголник на тој лист со страна 10 cm.
- Воочи дека од трите темиња на овој триаголник две темиња се бели, а едното сино, или двете се сини, а едното бело, или трите се бели, или, пак, трите се сини. Две темиња со иста боја се бараните темиња.



9. Во рамнината се дадени 5 прави од кои никои две не се паралелни. Докажи дека постојат две прави меѓу нив кои образуваат агол помал од 37°.



- Работи на следниот начин.
- Избери точка M во рамнината и помести ги паралелно сите прави така што тие да минуваат низ точката M.
- Воочи дека правите низ M ја делат рамнината на 10 агли.
- Ако аглите се еднакви, тогаш секој има $360 : 10 = 36^\circ$, а $36^\circ < 37^\circ$, т.е. секогаш има агол што е помал од 37°.
- Ако аглите се различни, тогаш не се сите поголеми од 37°, бидејќи $10 \cdot 37^\circ = 370^\circ > 360^\circ$. Значи некој од тие агли е помал од 37°.



Задачи

1. Во едно училиште има 1 200 ученици. Докажи дека:

а) најмалку 4 ученици од тоа училиште слават роденден во ист ден;

б) барем двајца ученици имаат исти иницијали.

2. Да се докаже дека во Скопје има барем три лица кои имаат ист број влакна на главата. (Еден човек на главата нема повеќе од 200 000 влакна.)

3. Во една паралелка има 37 ученици. Докажи дека има еден месец во годи–ната во кој се родени не помалку од 4 ученици од паралелката.

4. Во 25 гајби има 3 вида јаболка, но така што во секоја гајба има само еден вид јаболка. Докажи дека меѓу нив има 9 гајби со јаболка од ист вид.

УЧЕШЕ ЗА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ
ПРОВЕРИ ГО ТВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. Што е решение на линеарна равенка со две непознати?

2. Одреди го параметарот k за подредениот пар (2, 6) да биде решение на равенката $(4x - 2)k - 1 = y - k$.

3. Претстави го множеството решенија на равенката $-2x+\frac{1}{2}\quad=0$ графички.

4. Што е решение на систем линеарни равенки со две непознати?

5. Одреди еквивалентен систем на дадениот во кој двете равенки имаат форма $ax + by = c$.

$$\begin{cases}\dfrac{x+\quad+1}{3}+\dfrac{2x-3}{6}=-3\\[2mm] \dfrac{2x-\quad-4}{3}-\quad=6.\end{cases}$$

6. Реши го графички системот:

$$\begin{cases}x+2\quad=7\\ x-\dfrac{1}{3}\quad=0.\end{cases}$$

7. Реши го системот со метод на замена.

$$\begin{cases}4x-\quad=5\\ 5x-3\quad=1\end{cases}$$

8. Реши го системот со методот на спротивни коефициенти:

$$\begin{cases}x+2\quad+3=\dfrac{1}{3}\quad x+\\ 2\ 2x+3\quad=3x-\quad.\end{cases}$$

9. Според графичко решавање на систем линеарни равенки, процени колку решенија има системот:

а) $\begin{cases}x-\quad=1\\ 3x+3\quad=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x-\quad=0\\ 4x-2\quad=0\end{cases}$

10. Збирот од годините на таткото и синот е 46. По 10 години таткото ќе биде два пати постар од синот. По колку години имаат сега?

ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

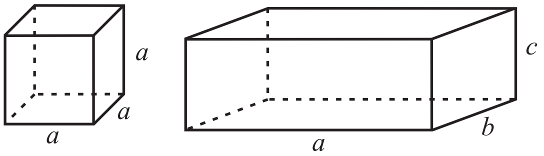
ТОЧКИ, ПРАВИ И РАМНИНИ ВО ПРОСТОРОТ

1 ТОЧКА, ПРАВА И РАМНИНА

Потсети се!

- Правата, аголот, трапезот и кружницата се *рамнински фигури*.
- Има и други рамнински фигури.
- Делот од геометријата што ги изучува рамнинските фигури се вика **планиметрија**.
- Некои својства на правата се прифатени како *основни својства* (*аксиоми*).
- Како *прва аксиома* (A_1) го прифативме својството: *на секоја права лежат бесконечно многу точки, но има и точки што не лежат на таа права*.

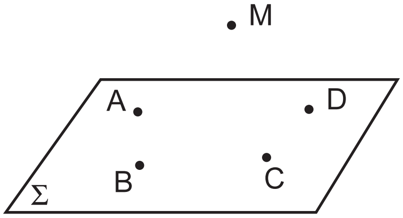
А **1.** На цртежот се претставени коцка и квадар.



- Дали квадарот е рамнинска фигура? Зошто?
- Дали сите точки од коцката припаѓаат на иста рамнина?
- Делот од геометријата што ги изучува геомертиските фигури во просторот се вика **стереометрија**.

- Точките, правите и рамнините се *основни геометриски фигури* во просторот.
- Рамнината може да се замисли како рамно стакло, како мирна водена површина и сл. Таа е неограничена рамна површина. За неа е прифатена аксиомата:

A_1	На секоја рамнина лежат бесконечно многу точки, а има и точки што не лежат на неа.



- Дадена е рамнина Σ и точки A, B, C, D, M на цртежот.
- Точката A ѝ *припаѓа* на рамнината Σ, т.е. $A \in \Sigma$. Може да се рече и дека A **лежи** на Σ, односно Σ **минува низ** A.
- Кои други од означените точки лежат на Σ?
- За три или повеќе точки што лежат на една рамнина се вели дека се **компланарни**. Така, на цртежот $A, B, C, D \in \Sigma$, $M \notin \Sigma$, па A, B, C, D се компланарни, а B, C, D, M не се компланарни.

Б *Потсети се!*

- За правата ја знаеш аксиомата: *низ кои било две точки минува точно една права.* Тоа важи и во просторот.

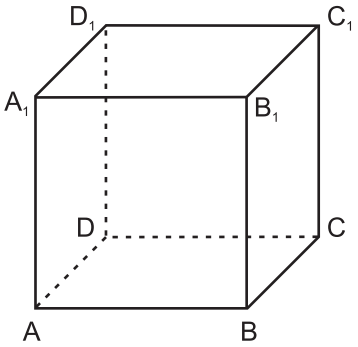
- За рамнината е прифатено следново основно својство (аксиома):

A_2 Низ кои било три точки што не лежат на една права минува точно една рамнина.

2. Зошто триножно столче не се „лула” ни кога ногалките не се еднакво долги?

- Дали тоа е така и кај четириножна маса?

3. Разгледај го квадарот на цртежот и одговори на прашањата.

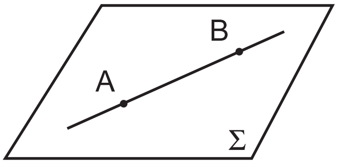


- Кое теме од квадарот лежи на рамнината определена со A, B и B_1?
- Дали темето C лежи на таа рамнина?
- Дали се компланарни точките:
  а) A, B, C, D; б) A, B, C_1, D_1; в) A, B, C, C_1?
- Најди други четири темиња што:
  а) лежат; б) не лежат на иста рамнина.
- Нацртај квадар и означи го како на цртежот. Потоа, исшрафирај го делот од рамнината низ B, C, D_1, A_1 што лежи во квадарот.

- Ако секоја точка од една права лежи на една рамнина, тогаш се вели дека правата **лежи на** таа рамнина, а за рамнината се вели дека **минува низ** таа права.

- На една рамнина лежат бесконечно многу прави.

4. На цртежот е претставена рамнина Σ и две точки A и B, што лежат на неа.



- Колку прави минуваат низ точките A и B?
- Дали другите точки од *правата AB* лежат на рамнината Σ?

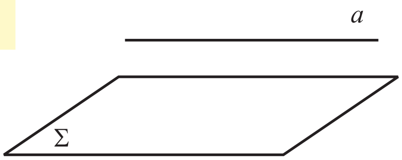
- Прифатено е за точно следново основно својство (аксиома) на рамнината.

A_3 Ако две точки од една права лежат на некоја рамнина, тогаш и правата лежи на таа рамнина.

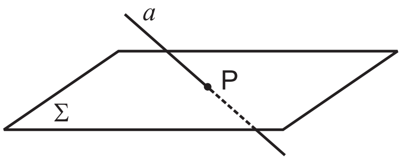
- Оваа аксиома ќе ти помогне да се согледаат заемните положби на права и рамнина во просторот.

- Разгледај ги цртежите и проследи ги објаснувањата за можната заемна положба на една права и една рамнина.

■ За рамнината Σ и правата a се можни следните три случаи.

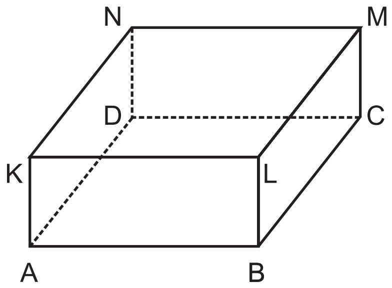


- *Правата и рамнината немаат заеднички точки.*
  Тогаш се вели дека тие се **паралелни**, и се запишува $a \parallel \Sigma$.



- *Правата и рамнината имаат само една заедничка точка.*
  Тогаш се вели дека рамнината **ја сече** правата или дека правата a **ја прободува** рамнината Σ во точката P; за точката P се вели дека е **пробод**.

- *Правата a лежи на рамнината Σ;*
  и во овој случај се вели дека тие **се паралелни**.



5. Разгледај го квадарот и воочи ја рамнината Σ, определена со темињата A, B, C.

- Именувај ги правите определени со рабовите што:
  а) се паралелни со Σ; б) ја прободуваат Σ;
  в) лежат на Σ.

Треба да знаеш:

- да ги искажеш основните геометриски фигури во просторот;
- да одредиш заемна положба на права и рамнина.

Провери се!

- Каква е заемната положба на:
  а) точка и рамнина; б) права и рамнина?
- Точките A, B, C, M, D се темиња на квадарот на горниот цртеж. Кои четири од овие темиња:
  а) се компланарни, б) не се компланарни?
- Колку рамнини може да минуваат низ:
  а) дадена точка A;
  б) две дадени точки B и C;
  в) три дадени точки A, B, C?

Задачи

1. Нацртај коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Именувај четири темиња кои се:

а) компланарни; б) некомпланарни.

2. Колку прави може да бидат определени со едно теме од горната основа и едно теме од долната основа на една коцка?

3. Работ AB од коцката во зад. 1 е паралелен само со два нејзини ѕида и нема заеднички точки со нив. Именувај ги тие ѕидови.

4. Дијагоналата AC на основата на коцката од зад 1. нема заеднички точки само со еден ѕид на коцката. Кој е тој ѕид?

2 ДВЕ ПРАВИ

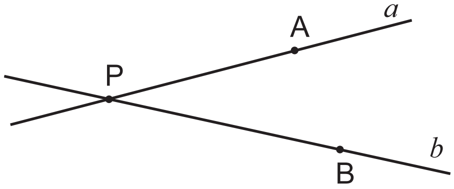
Потсети се!

- Искажи ги аксиомите за рамнина.
- Колку точки определуваат една права
  а) на рамнина, б) во просторот?
- Каква е заемната положба на две прави (во просторот) што имаат две заеднички точки?
- Колку точки определуваат една рамнина?
- Правата a има две заеднички точки со рамнината Σ. Каква е заемната положба на a и Σ?

А *Две прави* во просторот:

- или *имаат само една* заедничка точка (**се сечат**);
- или *немаат* заеднички точки;
- или *се совпаѓаат* (ако имаат две заеднички точки).

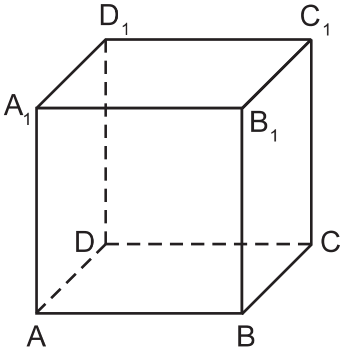
1. На цртежот, правите a и b се сечат, т.е. имаат една заедничка точка P. Разгледај го цртежот и одговори на прашањата.



- Дали може произволно избрани точки $A \in a$, $B \in b$ и пресекот P ($A \neq P$ и $B \neq P$) да се колинеарни? Зошто?
- Точките A, B и P определуваат точно една рамнина. Зошто?
- Правите a и b лежат во таа рамнина. Зошто?

2. На цртежот е претставен еден квадар. Разгледај го и одговори на прашањата.

- Дали работ AB лежи во иста рамнина со работ:
  а) BB_1; б) A_1B_1; в) B_1C_1?
- Рабовите CB и C_1B_1 лежат во иста рамнина. Зошто?
- Рабовите AB и A_1B_1 лежат во иста рамнина и немаат заедничка точка; и правите AB и A_1B_1 немаат заедничка точка – тие **се паралелни**, т.е. $AB \parallel A_1B_1$.



Внимавај!

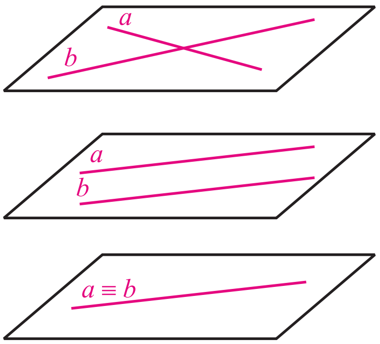
- *Две паралелни прави секогаш лежат во иста рамнина*. Рабовите, односно правите AB и B_1C_1, исто така, немаат заеднички точки, но тие не лежат во иста рамнина; за нив се вели дека **се разминуваат**.

3. Со помош на квадар согледај уште неколку пара паралелни прави. Дали три паралелни прави секогаш лежат на иста рамнина?

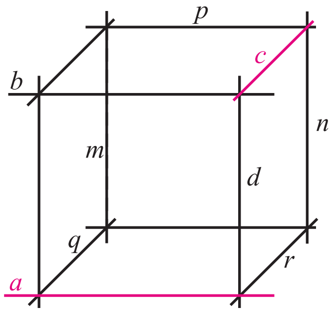
Запомни и согледај на цртежите!

Две прави во просторот може:

- ☞ **да лежат** на иста рамнина; тогаш тие или **се сечат** или **се паралелни** (при што може да **се совпаѓаат**), како на црт. 1;
- ☞ **да не лежат** на иста рамнина, т.е. да **се разминувачки прави** (a и c на цртежот 2).



Црт. 1



Црт. 2

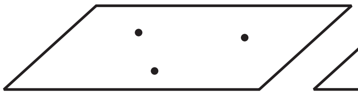
4. Запиши според црт.2 неколку парови: а) разминувачки прави; б) паралелни прави.

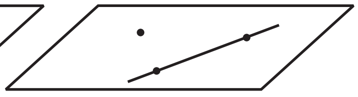
5. Пресечните точки на правите на црт. 2 се темиња на еден квадар. Утврди дали се точни следните искази.
а) Правите b и m не се сечат и не се паралелни, т.е. тие се разминувачки.
б) Правите m и d не се сечат и лежат на иста рамнина, т.е. тие се паралелни.
в) Правите a и d се сечат и не лежат на иста рамнина.
г) Правите b и m се разминувачки и лежат на иста рамнина.

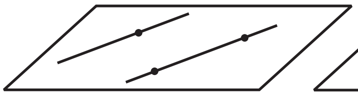
Потсети се!

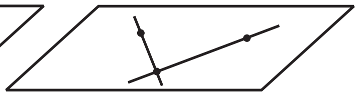
- Според аксиомата A_2, рамнината е наполно определена со три неколинеарни точки.
- Некои положби на две прави во просторот, исто така, определуваат една рамнина. Кои се тие положби?

6. Разгледај ги цртежите и образложи зошто една рамнина во просторот е наполно определена:
а) со три неколинеарни точки;
б) со права и точка што не лежи на таа права;
в) со две паралелни прави;
г) со две прави што се сечат.


а)


б)


в)


г)

7. Колку рамнини определуваат два по два од бочните рабови на еден квадар? (Внимавај: има повеќе од четири рамнини.)

Треба да знаеш:

- да ги објасниш заемните положби на две прави во просторот.

Провери се!

- За кои прави се вели дека се: а) паралелни, б) разминувачки?
- Нацртај коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и нацртај ги дијагоналите на нејзините основи. Кои парови од правите AC, BD, A_1C_1, B_1D_1: а) се сечат, б) се паралелни, в) се разминувачки?

Задачи

1. Три различни прави во просторот минуваат низ иста точка. Колку рамнини може да определат овие прави?

2. Нацртај квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и нацртај ги дијагоналите на два негови соседни ѕида, на пример, ABB_1A_1 и BCC_1B_1. Кои парови од правите AB_1, BA_1, CB_1, BC_1:

а) се сечат; б) се паралелни;

в) се разминуваат?

3. Нека a и b се различни прави во просторот. Колку рамнини може да минуваат низ нив?

4. Колку рамнини определуваат четири некомпланарни точки?

5. Образложи го тврдењето:

„Ако правите AB и CD се сечат, тогаш точките A, B, C, D се компланарни”.

3 ДВЕ РАМНИНИ

Потсети се!

- Како гласи аксиомата со која наполно се определува една рамнина во просторот?
- Каква заемна положба може да имаат една права и една рамнина во просторот?

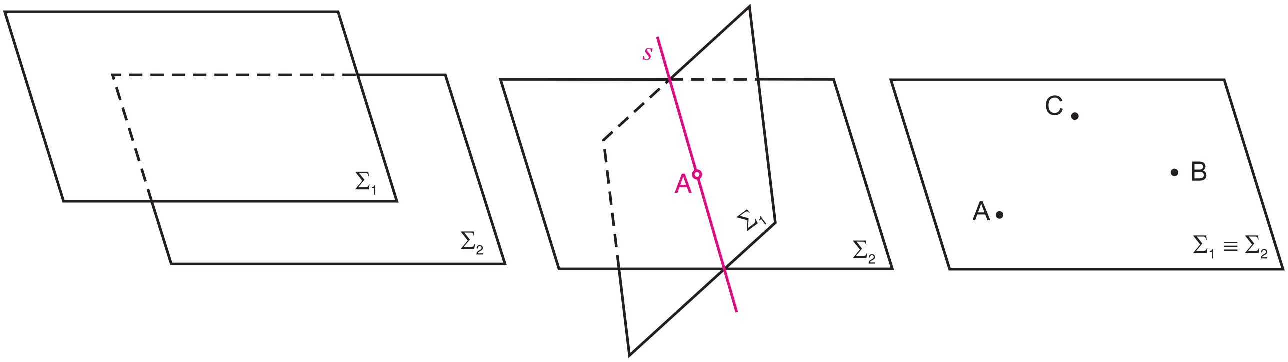
A **1.** Размисли и одговори:

- Дали може две рамнини да имаат *само една* заедничка точка?
- Дали може две рамнини да имаат *само две* заеднички точки?

Одговор на ова прашање дава следново основно својство (аксиома A_4):

A_4 Ако две различни рамнини имаат заедничка точка, тогаш тие имаат заедничка права што минува низ таа точка.

- Според аксиомата, значи, две различни рамнини Σ_1 и Σ_2:
  а) или немаат заеднички точки; б) или имаат заедничка права.
- Ако рамнините имаат три заеднички неколинеарни точки, тие се совпаѓаат.



Запомни

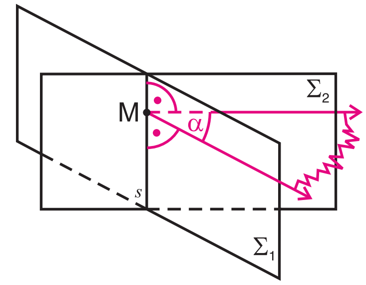
- Кога две различни рамнини Σ_1 и Σ_2 имаат заедничка права се вели дека тие **се сечат**, а за правата дека е нивна **пресечна права**.
- За две рамнини Σ_1 и Σ_2 се вели дека **се паралелни** ако немаат заеднички точки или ако се совпаѓаат; тоа се означува со $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.

2. Согледај дека се точни следниве тврдења. (Направи цртеж!)

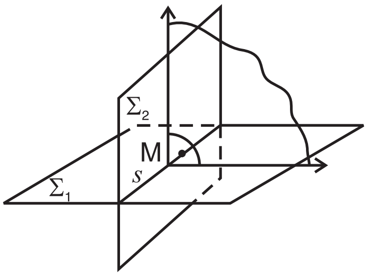
а) Ако $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ и ако правата a ја прободува Σ_1, тогаш a ја прободува и Σ_2.

б) Ако $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ и $a \parallel \Sigma_1$, тогаш $a \parallel \Sigma_2$.

в) Ако $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ и Σ_3 се сече со Σ_1, тогаш Σ_3 се сече и со Σ_2.



- Разгледај го цртежот и следи го објаснувањето.
- Рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат и s е нивната пресечна права.
- M е произволна точка од s, од која се повлечени две полуправи нормални на s, така што едната лежи во Σ_1, а другата во Σ_2. Тие полуправи го образуваат аголот α.
- Аголот α чиишто краци се тие полуправи се вика **агол меѓу рамнините** Σ_1 и Σ_2. И неговиот напореден агол претставува агол меѓу тие рамнини.



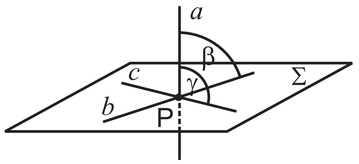
- Ако аголот меѓу рамнините е прав, тогаш за рамнините се вели дека **се нормални** меѓу себе, т.е. $\Sigma_1 \perp \Sigma_2$.

3. Каков агол зафаќаат подот и еден ѕид во училницата? Дали ѕидовите и таванот се нормални меѓу себе? А таванот и подот?

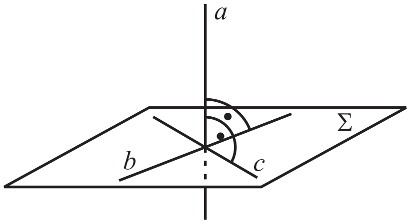
4. Каков агол зафаќаат основата и еден бочен ѕид на квадарот?

Б

- Разгледај ги цртежите и проследи го објаснувањето.
- Правата a ја прободува рамнината Σ во точката P.



- Низ прободот P се повлечени правите b и c што лежат во Σ; тие со правата a зафаќаат агли β и γ. Низ P може да се повлечат и други такви прави; сите тие со a зафаќаат различни агли.
- Сигурно согледуваш дека тие агли можат да бидат еднакви меѓу себе само кога *тоа се прави агли*.
- Тогаш за правата a се вели дека е *нормална* на рамнината, т.е. дека a е *нормала на рамнината* Σ; тоа се означува со $a \perp \Sigma$.



Запомни

- За правата a се вели дека е **нормала на рамнината** Σ, ако a е нормална на секоја права што лежи на Σ и што минува низ прободот на Σ со a.

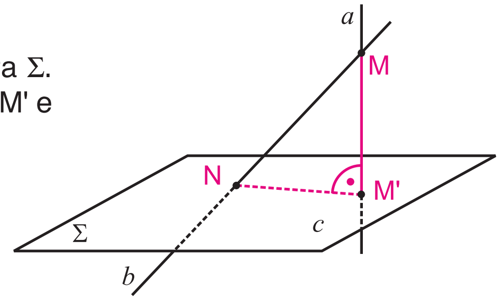
5. Согледај дека за рамнините Σ_1, Σ_2 и правите a, b, следните тврдења се точни. Направи цртеж!

а) Ако $a \parallel b$ и $a \perp \Sigma_1$, тогаш $b \perp \Sigma_1$.

б) Ако $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ и $a \perp \Sigma_1$, тогаш $a \perp \Sigma_2$.

В

6. На цртежот точката M не лежи на рамнината Σ. Од M може да се спушти нормала на Σ. Нека M' е прободот на таа нормала.



- Разгледај го цртежот, па размисли и одговори на прашањата.
- Колку такви нормали на Σ може да се спуштат од M?
- Низ M е повлечена права b што ја прободува Σ во точка $N \neq M'$.
- Дали правата b е нормална на Σ?
- Каков триаголник е $\Delta MM'N$?
- Изведи заклучок дека MM' е единствена нормала на Σ спуштена од точката M.
- Објасни што е *нормала на рамнина спуштена од точка што лежи надвор од рамнината*.
- За отсечката MM' (од цртежот) се вели дека е **ортогонална** на рамнината Σ, а за секоја друга отсечка (како што е MN) – дека е **наведната**.

  Должината на отсечката $\overline{MM'}$ се вика уште и **растојание од точката M до рамнината** Σ.
- Искажи ја дефиницијата за растојание од точка до рамнина.
- Од цртежот утврди дека $\overline{MM'} < \overline{MN}$.

Треба да знаеш:

- да објасниш што е пресек на две рамнини;
- со цртеж да ги претставиш заемните положби на две рамнини;
- со цртеж да ги објасниш: агол меѓу две рамнини и растојание од точка до рамнина.

Задачи

1. За кои две рамнини се вели дека:

а) се паралелни; б) се нормални?

2. Колку нормали може да се повлечат од дадена точка, на дадена рамнина?

3. Дали за правите a и b и рамнините Σ_1, Σ_2, Σ_3 се точни тврдењата? (Направи цртеж.)

а) Ако $a \parallel b$ и $a \parallel \Sigma_1$, тогаш и $b \parallel \Sigma_1$.

б) Ако $a \perp \Sigma_1$ и $a \perp \Sigma_2$, тогаш и $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.

в) Ако $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ и $\Sigma_1 \parallel \Sigma_3$, тогаш и $\Sigma_2 \parallel \Sigma_3$.

Провери се!

- Каква е заемната положба на две рамнини ако имаат:
  а) една; б) две; в) три заеднички точки?
- Дали за правите a, b и рамнината Σ се точни тврдењата (направи цртеж):
  а) Ако $a \parallel b$ и правата a ја прободува Σ, тогаш и правата b ја прободува Σ.
  б) Ако $a \perp \Sigma$ и $b \perp \Sigma$, тогаш $a \parallel b$.

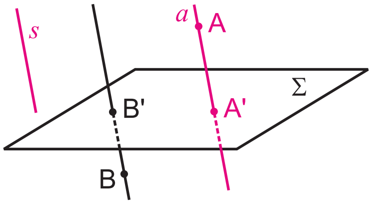
4. Растојанието од точката M до рамнината Σ е d.
Образложи дека за должината на секоја отсечка спуштена од M до која било точка X од Σ важи: $\overline{MX} \geq d$.

5. Каква заемна положба може да имаат рамнините Σ_1, што минува низ точките A, B, C и Σ_2, што минува низ точките A, B, D?

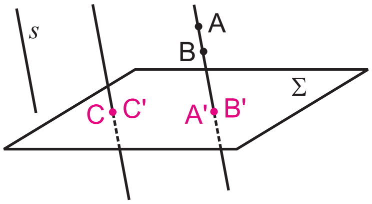
4 ПАРАЛЕЛНО ПРОЕКТИРАЊЕ. ОРТОГОНАЛНА ПРОЕКЦИЈА

А 1. Дадена е рамнина Σ и права s што не е паралелна со Σ.

- Избери точка A и низ неа повлечи права a што е *паралелна* со правата s.
- Правата a ја *прободува* рамнината Σ. (Зошто?) Нацртај го тој прободот и означи го со A'.
- Спореди го твојот цртеж со дадениот.

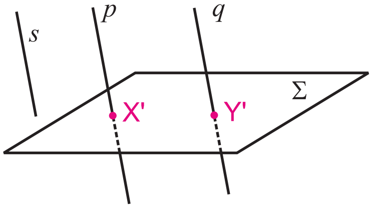


- Точката A' се вика **проекција на точката** A врз рамнината Σ во правец на s.
- За правата s се вели дека е **проектирачки правец**.
- Правата a се вика **проектирачка права** на точката A.
- За рамнината Σ се вели дека е **проекциона рамнина**.
- Со тоа е определено пресликување на точките од просторот врз рамнината Σ. Тоа пресликување се вика **паралелно проектирање**, со проектирачки правец s.



2. Точките A’, B’ и C’ на цртежот се проекции на точките A, B и C соодветно.

- Зошто A’ ≡ B’ и C’ ≡ C?



3. Точките X’ и Y’ на цртежот се проекции на некои точки, врз рамнината Σ, во правец на правата s.

- Кои точки од просторот се проектираат во точката X’?
- Кои точки од рамнината Σ се проектираат во точката Y’?

Воочи и запомни!

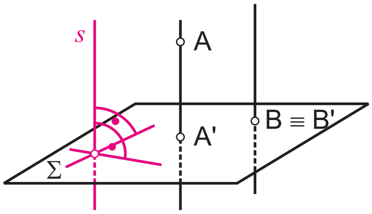
- Ако A’ е проекцијата на точката A, тогаш A’ е проекција и на *секоја* точка од *проектирачката права* на A.
- *Секоја* точка од *проекционата рамнина* се совпаѓа со својата проекција.

4. Нацртај рамнина Σ и проектирачки правец s и права p, $p \nparallel s$. Избери на p три точки A, B, C и нацртај ги нивните проекции A’, B’, C’. (Внимавај: и A’, B’, C’ ќе бидат колинеарни!)

Потсети се!

- Што е тоа паралелно проектирање?
- Геометриска фигура (и рамнинска и просторна) претставува едно множество точки.
- Секоја од тие точки има своја проекција при дадено паралелно проектирање.

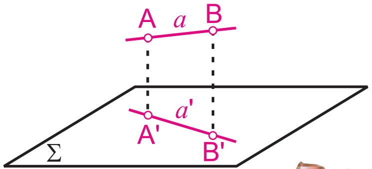
- **Проекција на** една **фигура** врз дадена рамнина Σ е множеството точки што се проекции на точките од таа фигура.
- Така, проекција на права врз рамнина Σ, во општ случај е права, на отсечка – е отсечка, на триаголник – е триаголник итн.



5. Дадена е рамнина Σ, права s и $s \perp \Sigma$, $A \notin \Sigma$, $B \in \Sigma$.

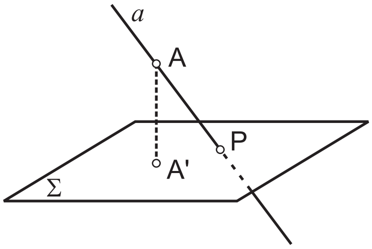
- Најди ги проекциите на A и B врз Σ во правец на s.

- Разгледај го и проследи го објаснението.
- Во случајот кога проектирачкиот правец е *нормален на дадената рамнина* Σ, за паралелното проектирање се вели дека е **ортогонално**, а за проекциите дека се **ортогонални проекции.**
- Така, точките A’ и B’ се ортогонални проекции на точките A и B врз рамнината Σ.



6. Разгледај го цртежот и објасни како е изведена конструкцијата на ортогонална проекција a' на правата a врз рамнината Σ .

7. Направи цртеж во тетратката како дадениов и нацртај ја ортогоналната проекција на правата a врз рамнината Σ.



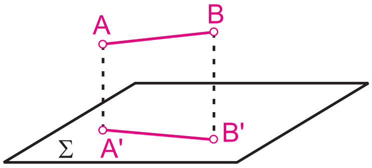
8. Што е ортогонална проекција на отсечка AB врз дадена рамнина Σ:

а) во случај ако AB не е нормална на Σ;

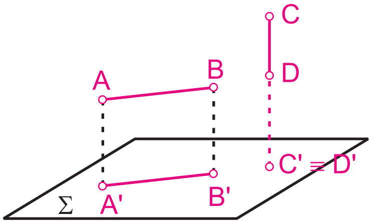
б) ако AB || Σ?

Разгледај ги цртежите и проследи ги објаснувањата.

а) Ако A’ и B’ се проекциите на крајните точки A и B на отсечката AB, тогаш проекцијата на отсечката AB врз рамнината Σ е отсечката A’B’.



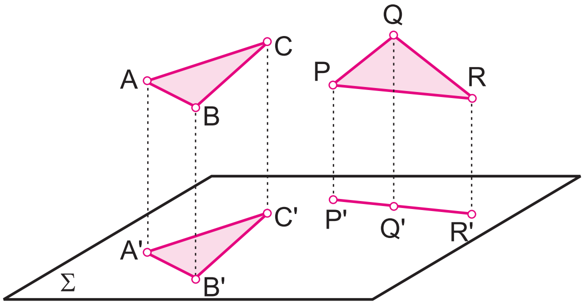
б) Ако отсечката AB е *паралелна* со проекционата рамнина Σ, тогаш нејзината *проекција A’B’ е паралелна и еднаква со дадената отсечка*, т.е. A'B' || AB, $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, бидејќи четириаголникот ABB’A’ е паралелограм. (Зошто?)



9. Што е ортогоналната проекција на отсечка, којашто е нормална на Σ?

10. Проекцијата на триаголник, во општ случај е триаголник.

- При каква положба на рамнината во која лежи триаголникот, со проекционата рамнина, проекцијата на триаголникот не е триаголник?



Ако рамнината во која лежи триаголникот е нормална на проекционата рамнина, тогаш неговата проекција е отсечка. На цртежот, ΔPQR се проектира во отсечката P'R'.

Треба да знаеш:

- да ги објасниш: паралелно проектирање и ортогонална проекција врз рамнината;
- да изведеш ортогонална проекција на точка, права, отсечка и триаголник врз рамнина.

Провери се!

- Правата b е нормална на Σ со прободод P. Најди ја ортогоналната проекција b’ на правата b.
- Каква е заемната положба на проектирачките прави и проекционата рамнина при ортогоналната проекција?

Задачи

1. Крајните точки на отсечката AB лежат од различни страни на проекционата рамнина. Најди ја ортогоналната проекција на отсечката. Направи цртеж.

2. Ортогоналните проекции на отсечките AB и CD се A'B' и C'D'. Кое од следниве тврдења е точно?

а) Ако $\overline{AB}=\overline{CD}$, тогаш $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$.

б) Ако AB || CD, тогаш $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$.

в) Ако AB || CD и $\overline{AB}=\overline{CD}$, тогаш $\overline{A'B'}=\overline{C'D'}$.

3. Правите a и b се сечат. Дали може нивните проекции да се две различни паралелни прави?

4. Проекциите A', B', C' на точките A, B, C се колинеарни. Дали мора точките A, B, C да се колинеарни?

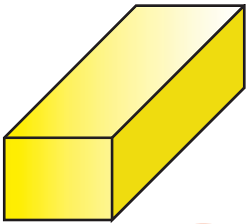
5. Точката C е средина на отсечката AB. Образложи дека проекцијата C' (на точката C) е средина на A'B'.

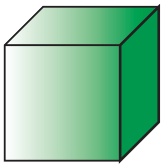
6. Точката M не лежи на правата a. Дали може проекцијата M' да лежи на a'?

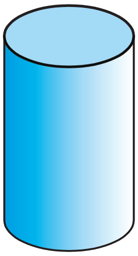
5 ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ГЕОМЕТРИСКО ТЕЛО СО ЦРТЕЖ

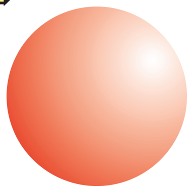
Потсети се!

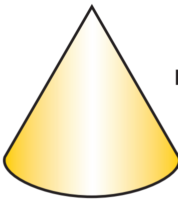
- Со коцката и квадарот се запозна порано во твоето школување. За нив знаеш и да им ги пресметаш и плоштината и волуменот.
- Покрај овие две геометриски тела запозна и други со: цилиндрична, конусна и топчеста форма.
- Кои од геометриските тела на цртежите се со рабови (рабести тела) а кои се валчести?


квадар


коцка

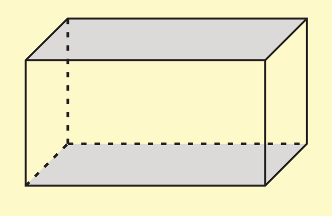

цилиндар


топка


конус

A **1.** Нацртај еден квадар во тетратката.

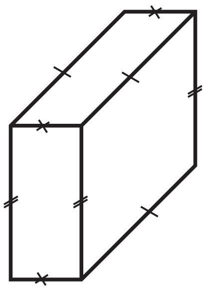
- При цртежето треба да внимаваш на следното.



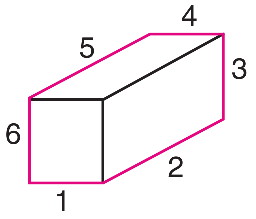
☞ 1° Ѕидот на кој квадарот е поставен на некоја рамнина и ѕидот спротивен на него, се викаат **основи** (долна и горна); тие секогаш се **паралелни** и **складни** меѓу себе паралелограми. Тоа се однесува и на сите *призми*.

☞ 2° **Бочните ѕидови** и **бочните рабови** на квадарот (и кај правите призми) треба да се ортогонални (нормални) на двете основи.

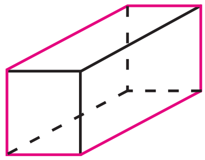
☞ 3° **Паралелните рабови** на квадарот (и на која било призма) мора да се паралелни и на цртежот!



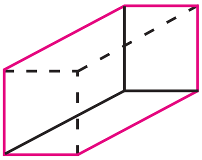
☞ 4° Сите 12 рабови на квадарот не можат да се гледаат. На цртежот, **видливите рабови** се претставуваат со полна линија, а **невидливите** – со испрекината. Кои од нив ќе се „видливи” а кои не, зависи *од каде* се гледа квадарот: а) *одозгора* (како што гледаат птиците – „птичја перспектива”) или *одоздола* (како што гледаат жабите – „жабја перспектива“), или
б) *оддесно* или *одлево*.



контура



одозгора,
оддесно



одоздола,
одлево

☞ 5° Шесте рабови што ја формираат **контурата** на цртежот (1, 2, ..., 6) се „видливи“. Погледај ги рабовите од 1 до 6; тие се видливи и на другите два цртежа.

☞ 6° Од останатите 6 рабови треба да процениш: кои три имаат заедничко **теме коешто не се гледа**. Тие рабови не се видливи.

Б Најчесто (а и се препорачува), геометриските тела да се цртаат така што **да се гледаат одозгора и оддесно**.

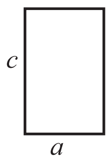
2. Да нацртаме постапно еден квадар (со рабови: a, b, c). Цртај во тетратката, следејќи ги чекорите а) од г):

а) нацртај правоаголник со страни a и c (предниот бочен ѕид);

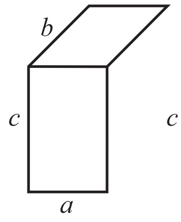
б) нацртај ја горната основа;

в) од темињата на горната основа спушти (два) бочни раба со должина c и паралелни со c;

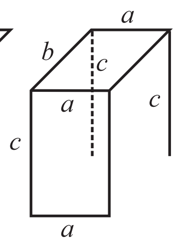
г) сега може да се нацрта и долната основа и да се согледа кои рабови не се видливи.



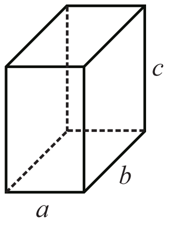
а)



б)



в)

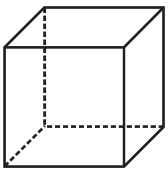


г)

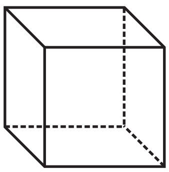
3. Нацртај коцка што ја гледаш

а) одозгора и оддесно; б)одозгора и одлево.

■ Спореди го твојот цртеж со дадениот.



а)

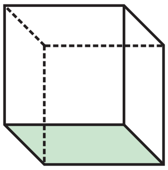


б)

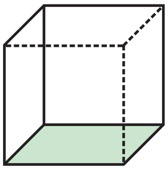
4. Нацртај коцка гледана:

а) одоздола и оддесно; б) одоздола и одлево.

Спореди го твојот цртеж со дадениот.

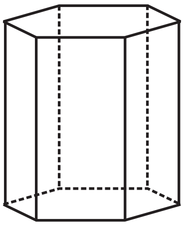


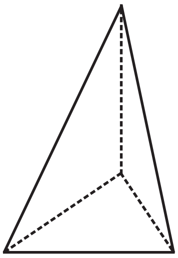
а)

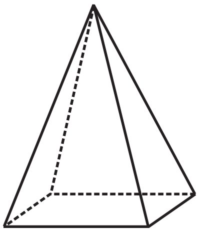


б)

В Разгледај ги цртежите. На нив се претставени една *права шестаголна призма* и две *пирамиди* (една триаголна и една четириаголна). Овие рабести тела ќе ги сретнеш во наредните лекции.







5. Нацртај права триаголна призма.

6. Нацртај пирамида со основа петаголник.

Треба да знаеш:

- да претставиш геометриско тело со цртеж.

Задачи

1. Нацртај коцка со раб a = 2,5 cm.

2. Нацртај квадар со основа квадрат гледан одозгора и:

а) оддесно; б) одлево.

3. Нацртај квадар со основа квадрат гледан одоздола и:

а) одлево; б) оддесно.

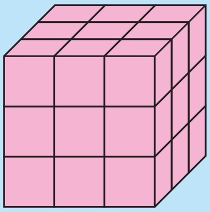
4. Претстави еден квадар во сите четири случаи на гледање.

Провери се!

- Нацртај еден квадар гледан одозгора и одлево.

Обиди се да преброиш...

Еден дрвен блок во форма на коцка со раб од 3 dm е обоен црвено (т.е. со црвена боја) на сите шест ѕидови. Столарот Столе Цепенкоски го исекол на 27 коцки, секоја со раб 1 dm.



а) Колку коцки немаат ниеден црвено обоен ѕид?

б) Колку коцки имаат точно еден црвено обоен ѕид?

в) Колку коцки имаат точно два црвено обоени ѕидови?

г) Колку коцки имаат точно три црвено обоени ѕидови?

д) Колку коцки имаат точно четири црвено обоени ѕидови?

ПРИЗМА

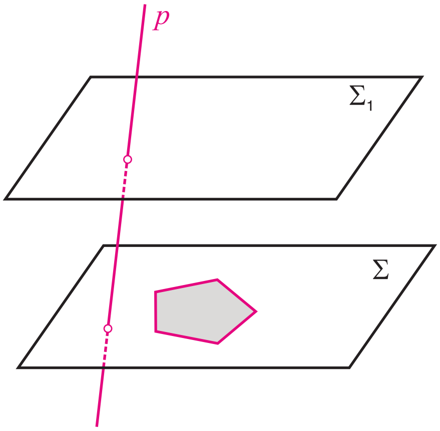
6 ПРИЗМА. ВИДОВИ ПРИЗМИ. ДИЈАГОНАЛНИ ПРЕСЕЦИ

Потсети се!

- Коцката и квадарот се просторни геометриски фигури.
- Какви геометриски фигури се нивните sидови? Во едната од нив *сите sидови* се складни фигури. Во која?
- Нацртај една коцка и еден квадар и објасни во што се разликуваат.

А Проследи го објаснението како се добива призма.

☞ Се земаат две различни *паралелни* рамнини Σ и Σ_1, како на цртежот.



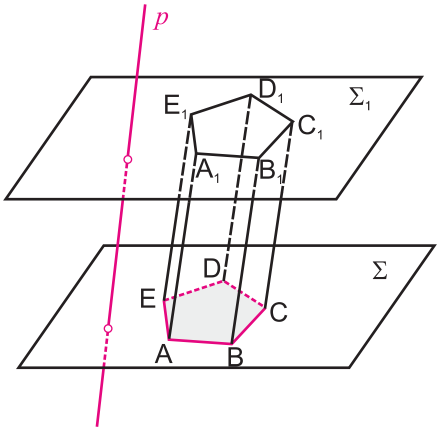
☞ Се зема уште еден многуаголник, на пример петаголникот ABCDE, што лежи на Σ.

☞ Потоа, се зема една права p што ги прободува тие две рамнини.

☞ Низ темињата на избраниот многуаголник се повлекуваат прави паралелни со правата p; на цртежот, нивните прободни точки на рамнината Σ_1 се означени со A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 соодветно.

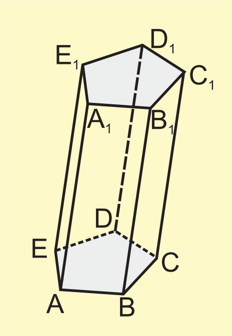
1. Во врска со цртежот, утврди кои од следните искази се точни и образложи зошто.

- $AA_1 \parallel BB_1$ и $\overline{AA_1} = \overline{BB_1}$.
- $AB \parallel A_1B_1$ и $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$.
- $\sphericalangle EAB = \sphericalangle E_1A_1B_1$.



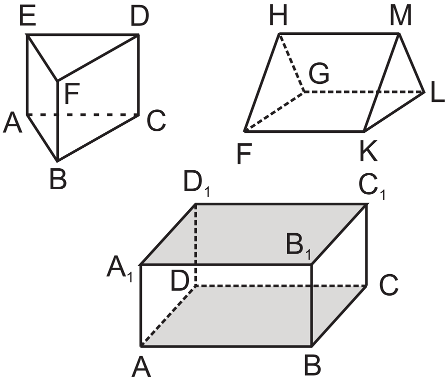
- Воочи дека сите три искази се точни. Од тоа можеш да заклучиш дека:
  а) четириаголниците ABB_1A_1, BCC_1B_1 итн. се паралелограми;
  б) петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ е складен со петаголникот ABCDE.
- Геометриската фигура што е составена од тие два петаголника и петте паралелограми, издвоено е претставена на цртежов.
- Таа е една *површина* што го дели множеството точки од просторот на две области: *внатрешна* и *надворешна*.

- Внатрешната област, заедно со таа површина, обрзуваат едно геометриско тело што се вика **петаголна призма**.
- На ист начин може да се добијат и: *триаголна* призма, *четириаголна* призма итн. Триаголниците, четириаголниците, петаголниците итн., што ја определуваат формата на призмата, се викаат **основи** на призмата. Другите *sидови* се паралелограми – тоа се **бочни sидови**, а нивната унија, пак, се вика **бочна површина**.
- *Секоја призма* има *две основи* и *бочна површина*. Темињата на основите се **темиња на призмата**, а страните (отсечките) на основите и на бочните sидови се **рабови**, и тоа: **основни рабови** и **бочни рабови**.



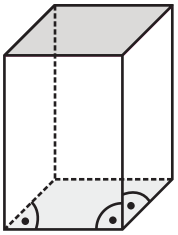
2. На цртежот се претставени две триаголни призми и еден квадар, т.е. четириаголна призма.

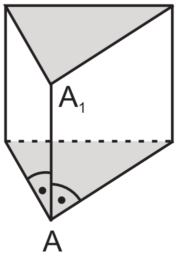
- Именувај ги основите на сите три призми.
- Именувај ги бочните sидови на двете триаголни призми.
- Колку темиња и колку рабови има една четириаголна призма?
- Кои рабови се основни, а кои бочни кај петаголната призма од претходната задача?



3. Изброј ги темињата (t), sидовите (s) и рабовите (r) на петаголната призма од цртежот погоре, и провери дали е задоволено равенството: $s + t = r + 2$.

- Призмата при која бочните рабови *се нормални* на основите се вика **права призма**. Такви се призмите I и II на цртежот.
- Призмата при која бочните рабови не се нормални на основите се вика **коса призма**. Такви се призмите III и IV на цртежот.
- Четириаголна призма се вика **паралелопипед**.

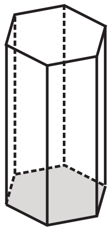

I

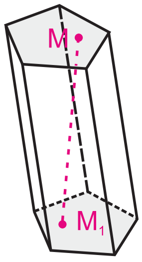


II

4. Именувај ги призмите I – IV на цртежот:

- според видот на основите;
- според положбата на бочните рабови (кон основите);
- според видот на основите и положбата на бочните рабови.


III



IV

- Секоја права призма со основа правилен многуаголник се вика **правилна призма**.
- Така, за една права призма со основа квадрат се вели дека е **правилна четириаголна призма**.

5. Колку и какви ѕидови има:

а) четириаголна призма;
б) права четириаголна призма;
в) правилна четириаголна призма;
г) правилна шестаголна призма?

Запомни

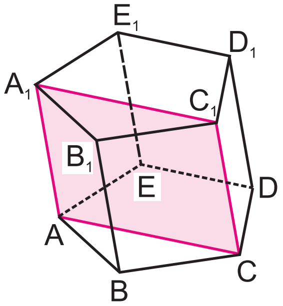
- Растојанието меѓу паралелните основи на една призма се вика **висина на призмата**.

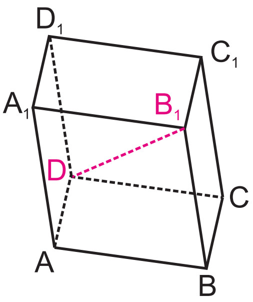
- За призмата од цртежот IV тоа е, на пример, должината на отсечката MM’, а за *правата призма* II тоа е должината на кој било бочен раб, на пр. AA_1.

В Разгледај ги цртежите и воочи:

- Ако една призма се пресече со рамнина се добива многуаголник којшто се вика **пресек на призмата**.

- Пресекот на призма со рамнина што минува низ два несоседни бочни раба на призмата се вика **дијагонален пресек.**





- Отсечката чии крајни точки се две темиња на една призма, што не лежат на ист ѕид, се вика **просторна дијагонала** или само **дијагонала на призмата**.

- За призмата на цртежот отсечката DB_1 е просторна дијагонала.

6. На цртежот погоре е претставен (шрафирано) дијагоналниот пресек ACC_1A_1 на петаголната призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

- Именувај барем уште два нејзини дијагонални пресеци.
- Како ќе образложиш дека *секој* дијагонален пресек е *паралелограм* при кој едниот пар спротивни страни е парот „соодветни дијагонали“ на основите?
- Каков паралелограм е дијагоналниот пресек на *права* призма?
- Колку дијагонални пресеци има: а) петаголна; б) шестаголна; в) осумаголна призма?

7. Во врска со призмите на претходниот цртеж, одговори на следните барања.

- Именувај ги сите (просторни) дијагонали на четириаголната призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. (Внимавај, има 4 дијагонали!)
- Колку дијагонали има петаголната призма на цртежот?
- Колку дијагонали на призмата лежат на еден нејзин дијагонален пресек? Што се тие за пресекот?

Треба да знаеш:

- да ги препознаеш и именуваш видовите на призми;
- да именуваш елементи на призма (основи, бочни ѕидови, рабови...);
- да дефинираш и да црташ пресек на призма, дијагонален пресек и просторна дијагонала на призма.

Задачи

1. Колку бочни ѕидови има права седумаголна призма? Какви многуаголници се тие?

2. Колку ѕидови има n–аголна призма?

3. Каква е врската меѓу бројот s на бочните ѕидови и бројот r на основните рабови?

Провери се!

- Може ли основите на една призма да се разликуваат по бројот на страните?
- Дали вкупниот број на рабови на една призма може да биде:
  а) 6; б) 9; в) 12; г) 15?
- Што е права призма?
- Што е правилна призма?

4. Може ли основите на коса призма да бидат правилни многуаголници?

5. Дали постои призма со:

а) 4; б) 8; в) 13 ѕидови?

6. Колку (просторни) дијагонали може да се повлечат од едно теме на горната основа кај: а) триаголна; б) петаголна; в) шестаголна призма?

7 ПАРАЛЕЛОПИПЕД. МРЕЖА И ПЛОШТИНА НА ПРИЗМА

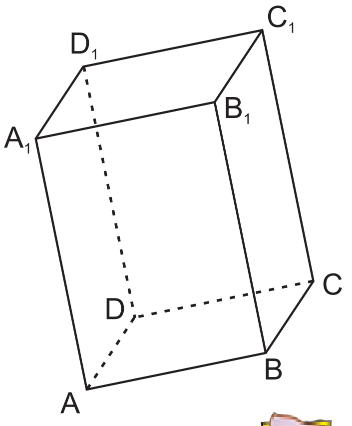
Потсети се!

- Какви многуаголници се бочните ѕидови на една призма?
- Што е: а) права, б) коса призма?
- За која призма се вели дека е правилна?
- Дали квадарот е правилна призма?
- Дали коцката е правилна призма?

- Сите шест ѕидови на паралелопипедот се паралелограми.
  Од нив може да се формираат три пара **спротивни ѕидови** (т.е. пар ѕидови што немаат заеднички рабови).

1. Воочи го паротспротивни ѕидови ADD_1A_1 и BCC_1B_1 на паралелопипедот од цртежот и одговори на барањата.

- Именувај ги другите два пара спротивни ѕидови.
- Какви се меѓу себе, според заемната положба и должина, рабовите: AD и BC; AA_1 и BB_1; AB и A_1B_1?
- $\sphericalangle A_1AD = \sphericalangle B_1BC$. Зошто?
- Изведи заклучок дека ѕидовите ADD_1A_1 и BCC_1B_1 се складни паралелограми.

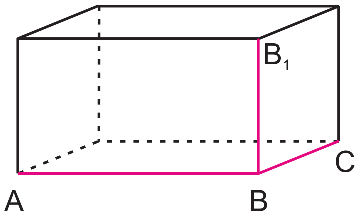


Важи и општо

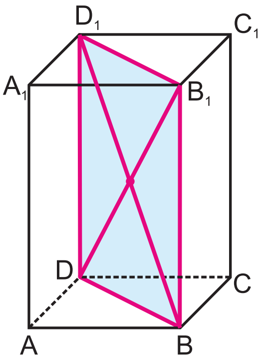
- Кај паралелопипедот кои било два заемно спротивни sида се паралелни и складни.

За кој паралелопипед можеш да кажеш дека е **прав**, а за кој дека е **кос** паралелопипед?

Бидејќи паралелопипедот е призма, можеме да кажеме дека тој е **прав** ако бочните рабови се нормални на основите. Ако тие не се нормални на основите, тогаш паралелопипедот е **кос**.

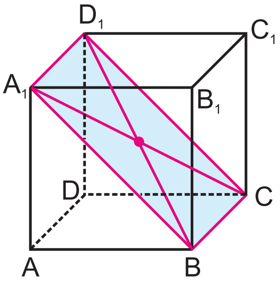


- Паралелопипед што е прав и има основа правоаголник се вика **правоаголен паралелопипед** или **квадар**.
- Должините на трите раба што излегуваат од едно теме (на пример, на цртежот: AB, BC, BB_1) се викаат **димензии на квадарот**.
- Квадар на кој димензиите му се еднакви се вика **коцка**.



2. На цртежот, воочи го дијагоналниот пресек BDD_1B_1 на квадарот, размисли и одговори на прашањата.

- Какви четириаголници се дијагоналните пресеци на квадарот?
- Какви се меѓу себе, по големина и заемна положба, просторните дијагонали BD_1 и DB_1?
- Колку просторни дијагонали има квадарот? Какви се тие меѓу себе по големина и заемната положба?

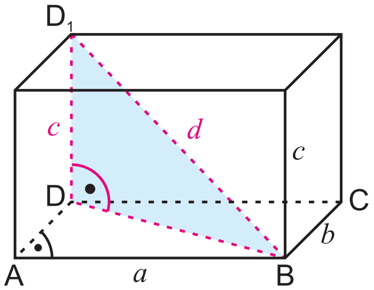


- Воочи го четириаголникот BCD_1A_1 на цртежот. Тој е правоаголник (зошто?) и неговите дијагонали BD_1 и CA_1 се еднакви меѓу себе.

Според тоа: $\overline{CA_1} = \overline{BD_1} = \overline{DB_1} \left(= \overline{AC_1}\right)$.

Запомни

- Кај квадарот сите четири просторни дијагонали се еднакви меѓу себе.
- Тие се сечат во една точка и се преполовуваат со неа.



3. На цртежот е претставен квадар со димензии a, b, c.

- Воочи ја просторната дијагонала BD_1 и размисли како ќе заклучиш дека за должината $d = \overline{BD_1}$ важи:

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- За да го изведеш бараниот заклучок, согледај дека:

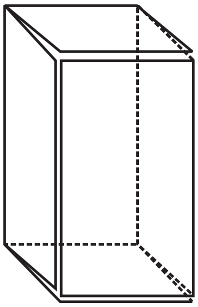
  а) ΔBAD е правоаголен, па $\overline{BD}^2 = a^2 + b^2$ (зошто?);

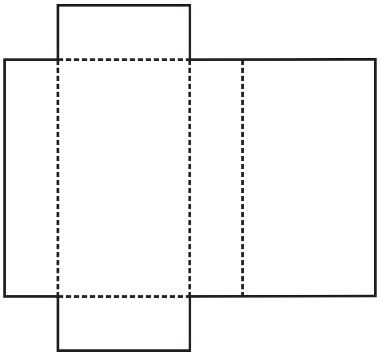
  б) ΔBDD_1 е правоаголен, па $d^2 = \overline{BD}^2 + c^2$ (зошто?).
  Значи: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

4. Пресметај ја дијагоналата на квадар со димензии 8 cm, 6 cm, 24 cm.

Б

- Нека е дадена една права четириаголна призма.
- Замисли дека е „исечена“ по еден бочен раб и по трите основни рабови на двете основи, како на цртежот.
- Ако, потоа, сите нејзини ѕидови ги собориме во една рамнина, ќе добиеме една фигура што се вика **мрежа** на таа призма.



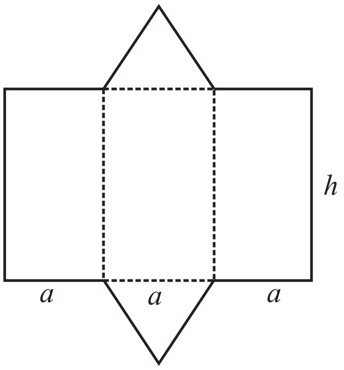


Запомни

- Секоја права призма има своја мрежа. Мрежата е составена од два многуаголника (основите на призмата) и од еден правоаголник со димензии: L (периметарот на основата) и H (должината на бочниот раб, т.е. висината) на призмата.

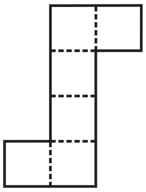
5. Фигурата на цртежот е составена од еден правоаголник и два складни триаголници, „прилепени“ на правоаголникот.

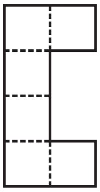
- Образложи дека таа е мрежа на една права триаголна призма.
- Дали таа е правилна призма? Зошто?

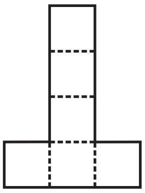


6. Дали сите три фигури се мрежи на коцка?

- Обиди се во мислите да ја составиш коцката или направи модел.


а)

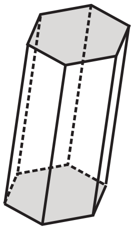

б)


в)

Потсети се!

- Површината на една многуаголна призма се состои од: *две основи* (коишто се складни многуаголници) и *бочна површина* (којашто се состои од паралелограми).

Разгледај го цртежот на кој е претставена една многуаголна призма и воочи кој вид многуаголници се нејзините ѕидови.



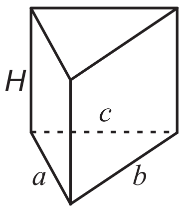
- Збирот од плоштините на сите ѕидови на една призма се вика **плоштина на призмата**.

- За плоштината P на една призма важи: $\boxed{P = 2B + M}$

B – плоштина на една основа;
M – плоштина на бочната површина.

7. Пресметај ја плоштината на права триаголна призма со основни рабови $a = 6$ cm, $b = 25$ cm, $c = 29$ cm и висина $H = 35$ cm.

- Твоето решение спореди го со даденото.



☞ Плоштината B на основата може да се пресмета со *Хероновата формула*:

$$B=\sqrt{s\ \ s-a\ \ \ s-b\ \ \ s-c}\ ,\ 2s = a + b + c = L;\ 2s = 6 + 25 + 29 = 60;\ s = 30;$$

$$B=\sqrt{30\cdot 24\cdot 5\cdot 1}=\sqrt{3600}=60\ ,\ \text{т.е. } B = 60\text{ cm}^2.$$

☞ Бочната површина е составена од три правоаголници, па за нејзината плоштина М имаме:

$$M = a\cdot H + b\cdot H + c\cdot H = (a + b + c)\cdot H = L\cdot H = 60\cdot 35,\ \text{т.е. } M = 2100\text{ cm}^2.$$

☞ Значи, плоштината P на призмата е:

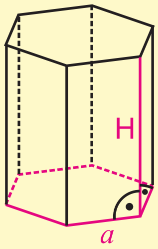
$$P = 2B + M = 2\cdot 60 + 2100 = 2220,\ \text{т.е. } P = 2220\text{ cm}^2.$$

Воочи општо

- Плоштината M на бочната површина на права призма се пресметува со формулата:

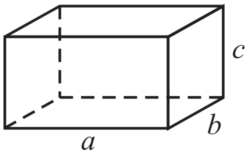
$$\boxed{M = L\cdot H,}$$

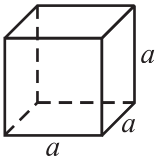
каде што L е периметарот на основата, а H е висина на призмата.



8. Пресметај ја M на правилна шестаголна призма со раб $a = 5$ cm и висина $H = 7$ cm.

9. Плоштината на квадар и коцка си пресметувал и порано.





- Воочи и образложи:

Плоштината на *квадар* со димензии a, b, c (изразени со иста мерна единица) се пресметува со формулата:

$$P = 2(ab + ac + bc).$$

Плоштината на *коцка* со раб a се пресметува со формулата:

$$P = 6a^2.$$

- Пресметај го работ на коцка со плоштина $P = 61{,}44\ \text{cm}^2$.

10. Образложи ги формулите за пресметување плоштина на:

а) правилна триаголна призма $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$;

б) правилна четириаголна призма: $P = 2a\,(a + 2H)$;

в) правилна шестаголна призма: $P = 3a\ a\sqrt{3} + 2H$.

со основен раб a и висина H.

Треба да знаеш:

- да препознаеш и скицираш паралелопипед и да ги искажуваш неговите својства;
- да црташ квадар и коцка како и мрежи на разни видови призми;
- да искажеш општа постапка и да пресметаш плоштина на разни видови призми.

Провери се!

- Изведи формула за должината d на дијагоналата на коцка со раб a.
- Нацртај мрежа на правилна четириаголна призма.
- Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна призма со основен раб 5 cm и висина 10 cm.

Задачи

1. Пресметај ја плоштината на:

а) квадар со димензии 2,4 dm; 2 dm; 8,5 cm;

б) коцка со раб 2,5 cm.

2. Плоштината на една коцка е 294 cm^2. Пресметај ги работ и дијагоналата на коцката.

3. Пресметај ја висината на правилна четириаголна призма, ако плоштината на бочната површина е $M = 160\ \text{cm}^2$, а плоштината на призмата е $P = 210\ \text{cm}^2$.

4. Меѓу величините a, H, B, M, P кај правилна четириаголна призма да се најдат непознатите, ако се дадени:

а) $a = 4{,}5$ cm, $H = 8{,}4$ cm;

б) $a = 12$ cm, $M = 432$ cm^2;

в) $a = 8$ cm, $P = 480$ cm^2;

г) $B = 49$ cm^2, $H = 12$ cm;

д) $B = 81$ dm^2; $P = 342$ dm^2;

ѓ) $H = 8$ dm, $M = 208$ dm^2;

е) $M = 120$ dm^2, $B = 36$ dm^2;

ж) $M = 180$ cm^2, $P = 342$ cm^2.

5. Колку пати ќе се зголеми плоштината на една коцка, ако нејзиниот раб се зголеми трипати?

6. Меѓу величините a, H, B, M, P кај правилна триаголна призма најди ги непознатите, ако се дадени (во центиметри):

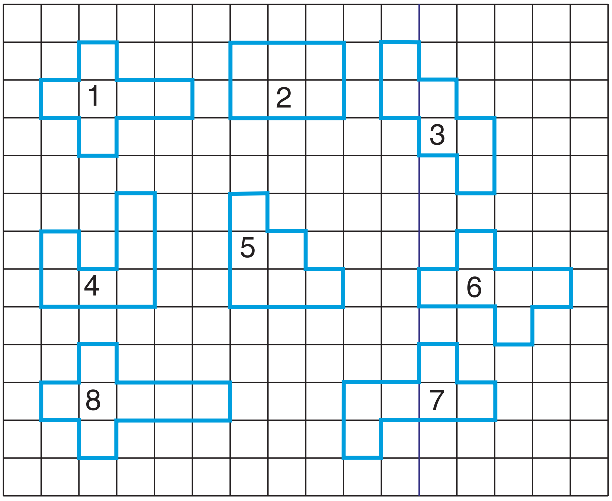
а) $a = 6$, $H = 15$; б) $a = 4$, $M = 108$;

в) $a = 12$, $P = 216\sqrt{3}$; г) $B = 4\sqrt{3}$, H = 9;

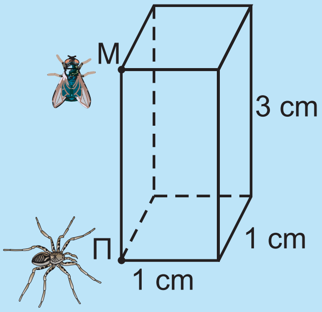
д) $M = 270$, $B = 9\sqrt{3}$; ѓ) $M = 240$, $P \approx 326{,}5$.

7. Права призма со бочен раб 12 cm има основа ромб со дијагонали 6 cm и 8 cm. Најди ја плоштината на призмата.

8. Кои од дадените фигури 1–8 се мрежи на коцка?



Може ли пајакот да дојде до мувата?



На цртежот е претставена правилна четириаголна призма со основен раб 1 cm и висина 3 cm.

Еден пајак (П) и една мува (М) се во положба како на цртежот. Пајакот ја прашал мувата: „Дали ќе ме чекаш да дојдам до тебе?“ Мувата му одговорила: „Ќе те чекам ако ги исполниш следниве два услова:

1) да поминеш по **сите** четири бочни ѕидови и

2) изминатиот пат да не биде поголем од 5 cm.“

Дали мувата ќе се спаси или пајакот ќе најде пат да дојде до мувата?

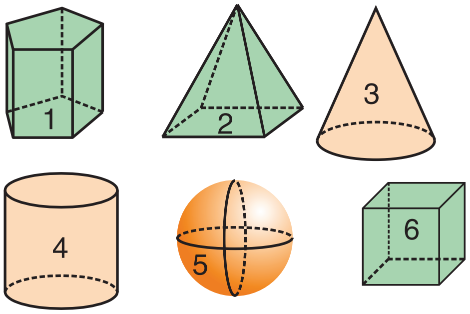
8 ВОЛУМЕН НА ПОЛИЕДАР. ВОЛУМЕН НА КВАДАР И КОЦКА

Потсети се!

- Коцката, квадарот и други призми се просторни геометриски фигури.
- Тие „зафаќаат некој дел од просторот“ и се нарекуваат *геометриски тела*.
- Покрај нив има и други геометриски тела.

А На цртежот се нацртани модели на геометриски тела.

- Именувај го секое од нив.
- Кои од нив се рабести, а кои валчести?

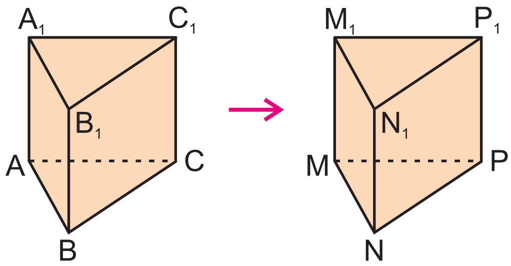


Општо

- **Геометриско тело** (или, кратко: **тело**), слободно речено, е ограничен и затворен дел од просторот.
- Ако површината со која е затворено телото е составена само од многуаголници, тогаш за него се вели дека е **рабесто тело** или **полиедар** (како, на пример: призма, пирамида).
- Ако, пак, некои делови од површината што го заградува телото се криви, тогаш за него се вели дека е **валчесто тело** (на пример: цилиндар, конус, топка).

2. Именувај три предмети (т.е. „физички тела“) од околината што имаат форма на:
а) рабесто, б) валчесто геометриско тело.

3. На цртежот се претставени две прави призми, чиишто основи се складни триаголници ($\Delta ABC \cong \Delta MNP$), а бочните рабови им се еднакви $\overline{AA_1} = \overline{MM_1}$.



- Што ќе се случи ако при некое поместување темињата A, B, C се совпаднат со темињата M, N, P соодветно, а темињата A_1, B_1, C_1 се совпаднат со темињата M_1, N_1, P_1, соодветно?

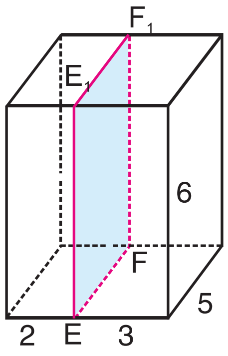
- Воочуваш дека, со тоа поместување, призмите ќе се доведат до потполно совпаѓање. Затоа велиме дека тие се складни меѓу себе.

Запомни

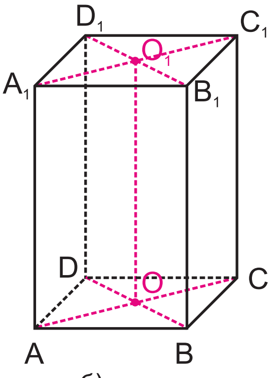
- За две геометриски фигури (а посебно, за две геометриски тела) може да се рече дека се **складни**, ако тие, со поместување (движење), може да се доведат до совпаѓање.

4. Квадарот на цртежот а) е пресечен со рамнина EFF_1E_1, така што се добиени два квадра. Тие имаат *заеднички ѕид*, но *немаат заеднички внатрешни точки*. За нив велиме дека се **составни делови** (или составки) на дадениот квадар.

- На колку составни делови е поделена призмата на цртежот б)? Именувај ги тие делови.



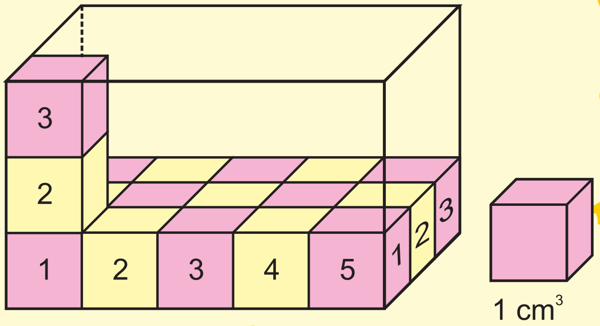
а)



б)

Потсети се!

- Одреди го волуменот на квадар со димензии a = 5 cm, b = 3 cm, c = 3 cm;
- Бројот што го доби притоа (45 cm³) ја карактеризира големината на внатрешниот дел на квадарот.
- Што покажува тој број (45 cm³)?
- Тој број покажува дека во дадениот квадар можеме да сместиме точно 45 коцки со раб 1 cm, т.е. 45 коцки со волумен 1 cm³. Затоа велиме дека тој квадар *има волумен* 45 cm³.



- Секое геометриско тело зафаќа извесен дел од просторот.
- За „големината“ на внатрешниот дел од телото, т.е. на зафатениот дел од просторот, се вели дека е **волумен** на телото.
- Општата задача за одредување, т.е. за *мерење на волумен на тело* е аналогна на задачата за мерење плоштина на рамнински лик.
- Имено, големината на внатрешниот дел на едно геометриско тело, а посебно на полиедар може да се осмисли со реален број којшто се нарекува волумен на телото.

Запомни

- На кој било полиедар може да му се придружи реален број V, наречен **волумен на полиедарот**, така што да бидат задоволени следните услови (**аксиоми за волумен**).

1°	Волуменот V на кој било полиедар е позитивен број, т.е. $V > 0$.
2°	Ако два полиедри се складни, тогаш нивните волумени V_1 и V_2 се еднакви, т.е. $V_1 = V_2$.
3°	Ако еден полиедар е поделен на два составни дела, тогаш неговиот волумен V е еднаков со збирот на волумените V_1 и V_2 на составните делови, т.е. $V = V_1 + V_2$.

4° Се зема дека коцка со раб 1 cm (1 dm, односно 1 m, итн) има волумен 1 cm^3 (1 dm^3, односно 1m^3, итн.).

5. Кај квадарот од црт. а) во задачата 4 се назначени неговите димензии, како и димензиите на неговите два составни квадра.

- Пресметај го волуменот V на квадарот, а потоа и волумените V_1 и V_2 на неговите составки.
- Провери ги, за овој случај, аксиомите (1° и 3°) за волумен.

6. Како може од аксиомата **3°** да се изведе заклучок дека волуменот на еден полиедар е поголем од волуменот на кој било негов составен дел?

Обрни внимание и запомни

- Во врска со условот **4°**, мошне важно е да се утврди *основна мерна единица за волумен*. За таква единица може да се земе волуменот на која било коцка. Но, со Меѓународниот систем на мерни единици (SI), прифатено е тоа да биде коцка со раб 1 m што е наречена **кубен метар**; ознака: m^3.

7. Кои се помалите единици што се изведуваат од кубниот метар?

- Колку: а) кубни дециметри (dm^3); б) кубни центиметри (cm^3); в) кубни милиметри (mm^3) се содржат во 1 m^3?
- Пресметај во m^3: а) 2 350 dm^3; б) 625 000 cm^3; в) 55 · 10^6 mm^3.

- За мерење волумен (обично на *течности*) се употребува и мерната единица **литар** (ℓ) Притоа: $\boxed{1\ \ell = 1\ \text{dm}^3.}$

8. Колку литри има во: а) 35 dm^3; б) 2 500 cm^3; в) 2 m^3?

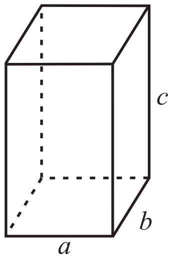
В

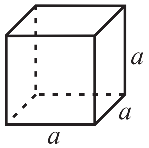
- Врз основа на аксиомите за волумен може да се докаже дека волуменот V на квадар со димензии a, b, c, може да се пресмета со формулата (што ја знаеш):

$$\boxed{V = abc}$$

а на коцка со раб a (т.е. квадар со $a = b = c$):

$$\boxed{V = a^3}$$





- Формулата за волумен на квадар може да се запише и во облик: $\boxed{V = B \cdot H}$

каде што $B = a \cdot b$ е плоштината на основата, а $H = c$ е висината на квадарот.

9. Една канта со форма на квадар, чијашто основа има страни $a = b = 25$ cm, собира 25 ℓ вода. Колкава е висината на кантата?

Треба да знаеш:

- да пресметаш волумен на квадар и коцка во разни практични примери;
- да ги користиш мерните единици за волумен.

Провери се!

- Колку коцки со раб 1 cm, може да се сместат во коцка со раб

  а) 2 cm, б) 3 cm, в) 1 dm?
- Една канта со форма на квадар има основа со страни $a = b = 30$ cm и висина $H = 40$ cm. Колку литри вода собира кантата?

Задачи

1. Пресметај го волуменот на коцка чија плоштина е 54 cm^2.

2. Димензиите на еден квадар се: 16 cm, 4 dm, 1 m. Најди го работ на коцката што има еднаков волумен со квадарот.

3. Кај некоја коцка, плоштината во cm^2 и волуменот во cm^3 се изразени со ист број. Колкав е работ на коцката?

4. Еден квадар има основа квадрат со страна 4 cm и бочна плоштина $M = 112$ cm^2. Пресметај го волуменот на тој квадар.

5. Основата на еден квадар има страни 6 cm и 8 cm, а дијагоналата на тој квадар е 26 cm. Најди го волуменот на квадарот.

6. Волуменот на една коцка е еднаков со волуменот на квадарот со димензии 8 cm, 4 cm, 2 cm. Пресметај ја плоштината на коцката.

7. За да се ѕида еден ѕид висок 2,80 m и дебел 40 cm потрошени се 2 600 цигли. Се знае дека за 1 m^3 ѕид се потребни 400 цигли. Колку е долг ѕидот?

8. Една права призма има висина 8 cm и основа правоаголен триаголник со катети $a = 3$ cm и $b = 4$ cm. Пресметај го нејзиниот волумен, согледувајќи дека таа е половина од квадар со димензии 3 cm, 4 cm, 8 cm.

9 ВОЛУМЕН НА ПРАВА ПРИЗМА

Потсети се!

- Волуменот на квадар со димензии a, b, c се пресметува со формулата $V = abc$.
- Како се добива формулата $V = BH$ за волумен на истиот квадар?
- За коцката знаеш дека $V = a^3$. Дали и за неа важи: $V = BH$?
- Како се пресметува плоштината на правоаголен триаголник со катети a и b?

А

За пресметување на волуменот на права призма со основа правоаголен триаголник важи истата формула како за квадар:

$$V = BH,$$

каде што B е плоштината на основата, а H е висината на призмата.

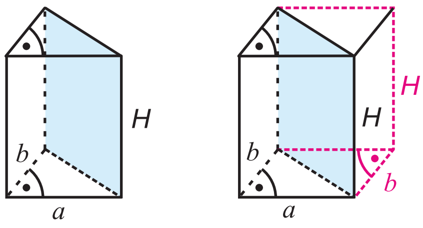
- Следи го образложението на ова тврдење.

☞ На цртежот а) е претставена права призма со висина H и основа правоаголен триаголник со катети a и b.

☞ На црт. б) дадената призма е дополнета до квадар со друга призма што е складна со неа.

☞ Волуменот V_k на квадарот е двапати поголем од волуменот V на дадената триаголна призма, т.е. $V_k = 2V$ (зошто?).

☞ Знаеме дека $V_k = abH$, па: $2V = abH$, т.е. $V = \frac{ab}{2} \cdot H$.



а) б)

☞ Бидејќи $\frac{ab}{2}$ е плоштината на основата на дадената призма (зошто?), т.е. $B = \frac{ab}{2}$,

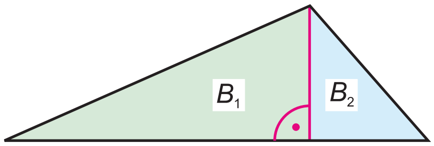
за волуменот на призмата можеме да запишеме: $\boxed{V = B \cdot H}$

1. Искажи ја со зборови формулата за пресметување волумен на права призма со основа правоаголен триаголник.

2. Правоаголен триаголник со катети 6 dm и 8 dm е основа на права призма со висина 1,5 m. Пресметај го волуменот на таа призма.

Б

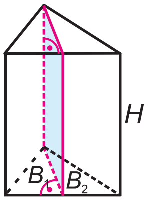
3. Нацртај произволен триаголник и раздели го на два составни правоаголни триаголници.



- Тоа можеш секогаш да го направиш (како на цртежот) со висината спуштена кон неговата најголема страна.

4. На цртежот е претставена права призма со основа произволен триаголник.

- Објасни како е пресечена призмата и со тоа е разделена на две составни прави призми со основи правоаголни триаголници.



- Искористи го тоа за да покажеш дека волуменот V на дадената триаголна призма се пресметува со формулата $V = B \cdot H$. (B – плоштината на основата, H – висината).

- Согледај дека, ако $V_1 = B_1 \cdot H$ и $V_2 = B_2 \cdot H$ се волумените на составните призми, тогаш (според аксиомата 3° за волумен), волуменот V на дадената призма ќе биде:

$$V = V_1 + V_2 = B_1H + B_2H = (B_1 + B_2) \cdot H.$$

Ако ја означиш со B плоштината на основата од дадената призма, тогаш $B = B_1 + B_2$, па

$$\boxed{V = B \cdot H}$$

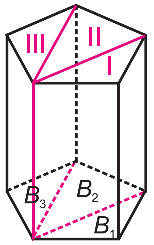
т.е. волуменот на права триаголна призма е еднаков со производот од висината и плоштината на основата на призмата.

5. Триаголник со страни $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm е основа на права призма со висина $H = 20$ cm. Пресметај го волуменот на таа призма.

6. Пресметај го волуменот на правилна триаголна призма со основен раб 6 cm и висина 8 cm.

В

7. На цртежот е претставена права петаголна призма и од едно теме се повлечени две дијагонали на основата. Разгледај го цртежот и одговори на прашањата.



- Колку дијагонални пресеци може да се постават низ едно теме на основата?
- Колку составни прави триаголни призми се добиваат со тие пресеци?
- Ако V_1, V_2, V_3 е волуменот на правата триаголна призма I, II, III соодветно, како може да се изрази волуменот V на петаголната призма?
- Ако B е плоштината на основата, а H е висината на петаголната призма, како ќе ја запишеш формулата за нејзиниот волумен?

- Сигурно одговори дека волуменот на права петаголна призма е еднаков со збирот од волумените на составните триаголни призми.
- Таков заклучок важи и за секоја права многуаголна призма.
- Според тоа:

Волуменот V на права призма е производ од плоштината B на основата и висината H, т.е.

$$\boxed{V = B \cdot H}$$

8. Пресметај го волуменот на канта со форма на правилна шестаголна призма со основен раб $a = 10$ cm и висина $H = 60$ cm.
Колку литри течност собира таа канта?

9. Права призма со висина 12 cm има основа рамнокрак правоаголен триаголник со катета 8 cm. Пресметај го волуменот на призмата.

10. Најди ги формулите за волумен на:

а) правилна триаголна призма.

б) правилна четириаголна призма;

в) правилна шестаголна призма, со основен раб a и висина H.

Провери ги твоите резултати:

а) $B=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad V=\dfrac{a^2H\sqrt{3}}{4}$;

б) $B = a^2$, $\quad V = a^2H$;

в) $B=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ $\quad V=\dfrac{3a^2H\sqrt{3}}{2}$.

Треба да знаеш:

- да пресметаш волумен на призма според општата формула;
- да ги изведеш формулите за пресметување волумен на правилна триаголна, четириаголна, шестаголна призма;
- да ги користиш мерните единици за волумен при решавање на практични примери за плоштина и волумен на призми.

Провери се!

- Пресметај го волуменот на правилна шестаголна призма со основен раб $a = 4$ cm и висина $H = 13$ cm.
- Две триаголни призми имаат еднакви висини и еднакви волумени. Дали нивните основи мора да се:

  а) складни триаголници,

  б) еднаквоплошни триаголници?

Задачи

1. Еден сандак со должина 2 m и ширина 1 m собира 16 hℓ ориз. Колкава е висината на сандакот?

2. Пресметај го волуменот на правилна шестаголна призма со периметар на основата 24 cm и висина 10 cm.

3. Ромб со дијагонали 24 cm и 10 cm е основа на права призма со висина 20 cm. Пресметај ги волуменот и плоштината на призмата.

4. Правилна четириаголна призма има плоштина $P = 448$ dm^2 и бочна површина со плоштина $M = 320$ dm^2.
Пресметај го волуменот на призмата.

5. Пресметај го волуменот на правилна триаголна призма со:

а) основен раб 6 cm и висина 8 cm;

б) основен раб a и висина $4a$.

6. Колку е висока правилна шестаголна призма со основен раб $a = 6$ cm и волумен $V = 1260$ cm^3?

7. Напречен пресек на канал, долг 2 km, има форма на рамнокрак трапез со основи 6 m и 10 m, а крак 2,9 m. Колку m^3 земја се исфрлени при неговото копање?

8. Меѓу величините a, H, B, M, P, V кај правилна четириаголна призма најди ги непознатите, ако се дадени (во cm; cm^2; cm^3):

а) $a = 5$, $M = 160$;

б) $a = 3$, $P = 66$;

в) $B = 36$, $M = 168$;

г) $H = 14$, $V = 1694$;

д) $H = 15$, $M = 780$;

ѓ) $M = 160$, $V = 200$.

ПИРАМИДА

10 ПИРАМИДА. ПЛОШТИНА НА ПИРАМИДА

Потсети се!

- Што е полиедар или рабесто тело?
- Зошто призмата е рабесто тело?
- Според што се одредува дека призмата е триаголна, четириаголна итн., а според што дека е права, односно правилна?
- Опиши со зборови некоја од египетските пирамиди.

Разгледај ги цртежите и проследи ги објаснувањата во следната задача. Така ќе се запознаеш уште со едно *рабесто геометриско тело*.

1. Дадено е:

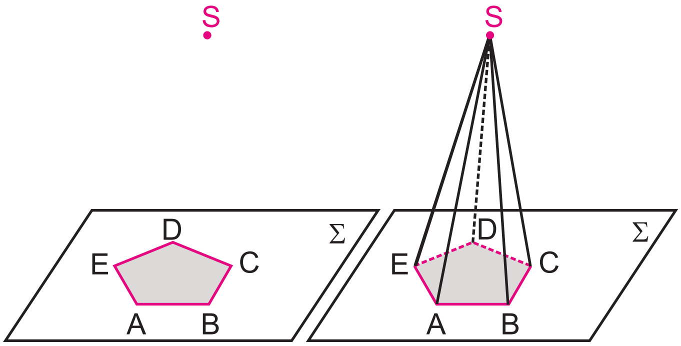
☞ една рамнина Σ,

☞ еден n–аголник на неа, на пример, петаголникот ABCDE,

☞ една точка S што не лежи на Σ.

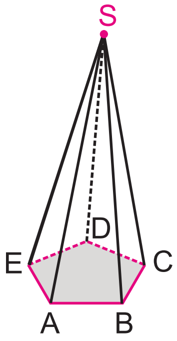
☞ Од точката S се повлечени отсечки до темињата на петаголникот.

- Колку триаголници се добиени притоа?
- Именувај ги тие триаголници.
- Што имаат заедничко сите тие пет триаголници?
- Воочи ја површината што ја сочинуваат дадениот петаголник и добиените пет триаголници.



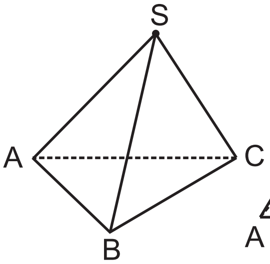
Површината што се состои од дадениот петаголник и добиените пет триаголници го дели множеството точки од просторот на две области: *внатрешна* и *надворешна*.

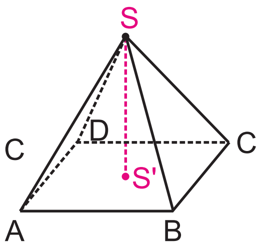
- Внатрешната област заедно со спомнатата површина образуваат едно геометриско тело што се вика **петаголна пирамида**. Таа пирамида е издвоено претставена на цртежов.
- Дадениот петаголник се вика **основа** на пирамидата, добиените триаголници ABS, BCS,... – **бочни ѕидови**, а точката S – **врв** на пирамидата.
- Врвот S и темињата на основата се викаат **темиња** на пирамидата, а бочните ѕидови ја сочинуваат нејзината **бочна површина**. И кај пирамидата разликуваме: **основни** и **бочни рабови**.



Со иста постапка може да се дојде до *триаголна пирамида*, *четириаголна пирамида* итн. Секоја од нив се вика, кратко, **пирамида**.

2. На цртежот се претставени триаголната пирамида SABC и четириаголната пирамида SABCD.





- Именувај ги:

  а) основните рабови; в) основата;

  б) бочните рабови; г) бочните ѕидови

  на пирамидата 1) SABC; 2) SABCD.
- Воочи ја и отсечката SS' во пирамидата SABCD на цртежот.

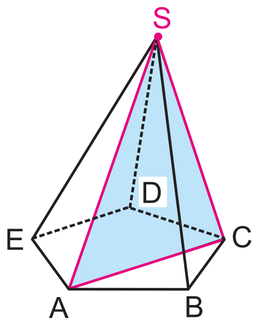
- Отсечката SS', каде што S е врвот на пирамидата, а S' е неговата *ортогонална проекција* врз основата се вика **висина** на пирамидата.
- Точката S' е **подножје** на висината. Обично и должината $\overline{SS'}$ се вика **висина** на пирамидата.

3. Од кој вид е пирамидата што има:

1. а) 4, б) 6, в) 9 темиња; 2. а) 6, б) 10, в)12 рабови; 3. а) 4, б) 7, в) 10 ѕидови?

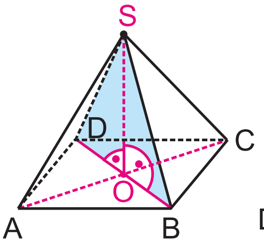
- Пресекот на пирамидата со рамнина што минува низ врвот и низ која било дијагонала на основата се вика **дијагонален пресек**.

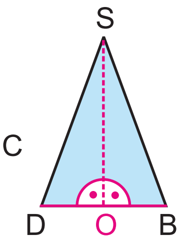
На цртежот е претставен дијагоналниот пресек ACS на пирамидата.
- Воочи и именувај уште два такви пресеци.
- Колку дијагонални пресеци има оваа пирамида?
- Колку дијагонални пресеци има која било пирамида?



Воочив дека и триаголниците BDS и ECS се дијагонални пресеци; оваа пирамида има 5 такви пресеци, а секоја пирамида има толку дијагонални пресеци, колку што има дијагонали основата.

4. На цртежот е претставена пирамидата SABCD со основа *квадрат*, а подножјето на висината паѓа *во пресекот О на дијагоналите на основата*.
Разгледај го цртежот и проследи ги објаснувањата.





☞ Точката О ги преполовува дијагоналите на квадратот (основата).

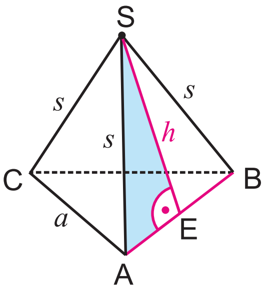
☞ Правоаголните триаголници AOS, BOS, COS, DOS имаат една заедничка катета (висината OS), а другата катета им е еднаква на половина дијагонала на квадратот.

☞ Според признакот САС тие се складни меѓу себе.

- Од тоа следува дека, кај ваквата пирамида:

а) *сите бочни рабови се еднакви* меѓу себе;
б) *бочните ѕидови се рамнокраки*, меѓу себе *складни триаголници*;
в) *висините на бочните ѕидови се еднакви меѓу себе*.

- За оваа пирамида и за секоја друга при која основата е правилен многуаголник, а *подножјето* на висината паѓа во центарот на основата, се вели дека е **правилна пирамида**.
- Висината h на кој било бочен ѕид на правилна пирамида се вика **апотема** на пирамидата.



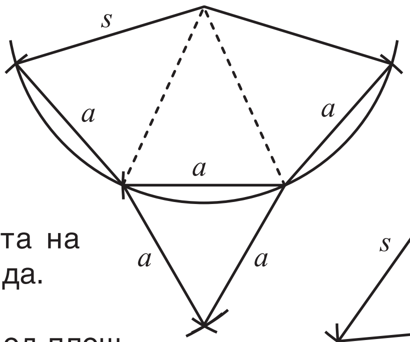
5. Пресметај ја апотемата h на правилна триаголна пирамида со основен раб a = 14 cm и бочен раб s = 25 cm.

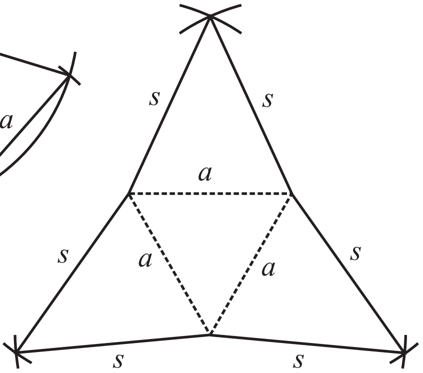
- Разгледај го триаголникот AES на цртежот.

- Ако се разрежат сите основни рабови (освен еден) и само еден бочен раб, тогаш површината на една пирамида може да се „распростре“ на рамнина. Така се добива **мрежа** на пирамидата.

6. На цртежот се претставени две конструкции на мрежата на правилна триаголна пирамида со основен раб a и бочен раб s.

- Воочи ги и опиши ги со зборови двете постапки.
- Објасни и скицирај ја мрежата на правилна четириаголна пирамида.



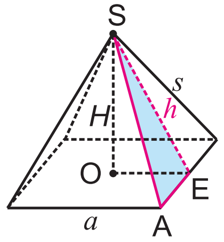


- Како и кај призмата, збирот од плоштините на сите ѕидови на една пирамида се вика **плоштина на пирамидата**. Според тоа:

- Ако B е плоштината на *основата*, а M плоштината на *бочната површина*, тогаш плоштината P на пирамидата ќе биде:

☞ $P = B + M$

7. Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна пирамида со основен раб 14 cm и бочен раб s = 25 cm.



- Спореди го твоето решение со даденото.

☞ За основата: $B = a^2 = 14^2 = 196$, т.е. $B = 196\ \text{cm}^2$;

☞ за бочната површина: $M = 4 \cdot \dfrac{a \cdot h}{2} = 2ah$ каде што h е апотемата.

☞ Апотемата ќе се пресмета со помош на Питагоровата теорема од правоаголниот триаголник AES: $h^2 = s^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576;\quad h = 24\ cm.$

☞ Така, $M = 2ah = 2 \cdot 14 \cdot 24 = 672$, т.е. $M = 672\ \text{cm}^2$.

☞ Значи: $P = B + M = 196 + 672 = 868$, т.е. $P = 868\ \text{cm}^2$.

8. Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 10$ cm и висина H = 12 cm. Искористи го ΔSOE на цртежот од задачата 7.

- Триаголна пирамида се вика **тетраедар**.
- Триаголна пирамида на која *сите рабови ѝ се еднакви* се вика **правилен тетраедар**.

9. Најди ја плоштината на правилен тетраедар со раб $a = 12$ cm.

Треба да знаеш:

- да препознаеш и да именуваш пирамида и нејзините елементи;
- да препознаеш и да дефинираш правилна пирамида;
- да пресметаш плоштина на пирамида.

Провери се!

- Ако основата на една пирамида е правилен многуаголник, дали мора пирамидата да е правилна?
- Најди ја плоштината P на правилна четириаголна пирамида со бочен раб $c = 17$ cm и апотема $h = 15$ cm.

Задачи

1. Колку најмалку ѕидови може да има една пирамида? Од кој вид е таа?

2. Пресметај ја плоштината на правилна шестаголна пирамида со основен раб 10 cm и апотема 13 cm.

3. Најди ја апотемата на правилна четириаголна пирамида чија бочна површина има 20 dm^2, а основата има 16 dm^2.

4. Правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 8$ cm има плоштина 144 cm^2. Најди ја висината H на пирамидата.

5. Пресметај ја плоштината на правилна триаголна пирамида со основен раб 6 cm и бочен раб 10 cm.

6. Пресметај ја плоштината на основата на правилна четириаголна пирамида со висина H = 6 dm и апотема $h = 6{,}5$ dm.

7. Меѓу величините a, H, h, B, M, P кај правилна четириаголна пирамида најди ги непознатите, ако се дадени (во сантиметри):

а) $a = 12$, $h = 10$; г) H = 21, $h = 29$;
б) $a = 14$, H = 24; д) P = 819, B = 81;
в) B = 256, M = 544; ѓ) P = 3584, M = 2800.

11 ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА

Потсети се!

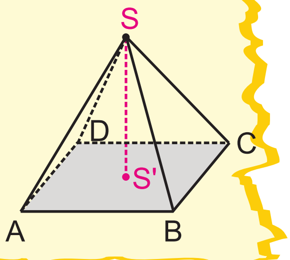
- Волуменот на права призма се пресметува со формулата

$$V = B \cdot H,$$

B – плоштина на основата, H – висина на призмата.

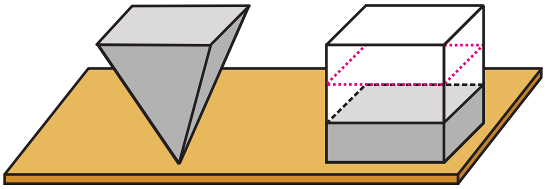
- Како се добива пирамида ? Што е, притоа:

а) основа; б) врв; в) бочна површина; г) висина на пирамидата?



- Мерењето на волуменот на некое тело не го вршиме со непосредно пренесување на мерната единица, туку изведуваме правила (што ги запишуваме со формула), според кои, врз основа на неопходни податоци за телото, со пресметување, го добиваме неговиот волумен.

- Како да добиеме правило за пресметување волумен на пирамида?



- За таа цел можеш (дома) да го направиш следниов обид.

☞ Направи шупливи модели (на пример, од картон) на една призма и на една пирамида со еднаквоплошни (може: складни) основи и еднакви висини (како на цртежот).

☞ Наполни ја пирамидата со сув песок (или друг зрнест материјал: ориз,шеќер или сл.) и потоа песокот од пирамидата претури го во призмата.

☞ Ќе забележиш дека тоа треба да го направиш уште двапати за да ја наполниш призмата.

☞ Тоа покажува дека пирамидата има трипати помал волумен од призмата.

- Овој факт, воочен експериментално, може и да се докаже (но, ние ќе го изоставиме тоа).

Запомни дека важи општо

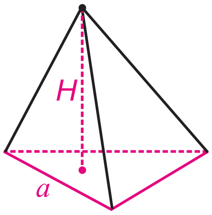
- Волуменот V на една пирамида е еднаков на една третина од производот на висината H и плоштината B на основата на пирамидата, т.е.

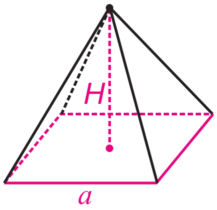
$$V = \frac{1}{3} B \cdot H$$

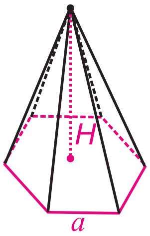
1. Пресметај го волуменот на правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 12$ cm и висина $H = 20$ cm.

Б **2.** Разгледај ги цртежите и обиди се да ги изведеш формулите за пресметување волумен на правилна:

а) триаголна;
б) четириаголна;
в) шестаголна;
пирамида со основен раб a и висина H.







■ Спореди го твоето решение со даденото.

☞ Во општата формула за волумен на пирамида $V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot H$, треба да се замени само B со соодветна формула за плоштина на:

а) рамностран триаголник: $B=\frac{1}{4}\cdot a^2\sqrt{3}$; б) квадрат: $B = a^2$;

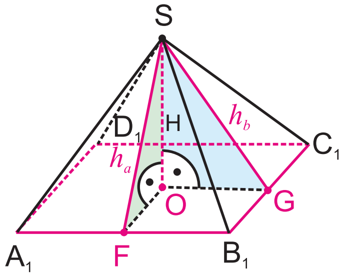
в) правилен шестаголник: $B=\frac{3}{2}\cdot a^2\sqrt{3}$.

☞ Така ќе се добијат бараните формули: $\boxed{\text{а) } V=\frac{a^2H\sqrt{3}}{12};}$ $\boxed{\text{б) } V=\frac{a^2H}{3};}$ $\boxed{\text{в) } V=\frac{a^2H\sqrt{3}}{2}.}$

3. Кеопсовата пирамида во Египет има висина 149 m и основа квадрат со страна 232 m. Пресметај го нејзиниот волумен.

4. Бочниот раб на правилна шестаголна пирамида е 14 cm, а основниот раб е a = 2 cm. Пресметај го волуменот на пирамидата.

В **5.** Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамида со висина H = 12 cm и основа правоаголник со димензии a = 32 cm и b = 10 cm, ако подножјето на висината е во пресекот на дијагоналите (центар на опишаната кружница) на основата.



■ Разгледај го цртежот и работи според упатствата.

☞ $P = B + M$ и $B = a\cdot b = 32\cdot 10$; $B = 320$ cm².

☞ Бочната површина е составена од четири триаголници, при што: $\Delta SA_1B_1 \cong \Delta SC_1D_1$ и $\Delta SB_1C_1 \cong \Delta SA_1D_1$, па од цртежот, каде што $h_a = \overline{FS}$, $h_b = \overline{GS}$, се добива

$$M = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot ah_a + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot bh_b = ah_a + bh_b.$$

☞ Пресметај ги бочните висини h_a и h_b. На цртежот: $h_a^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+H^2=169$ и $h_b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+H^2=$
$=400$, т.е. h_a = 13 cm, h_b = 20 cm и $M = 32\cdot 13 + 10\cdot 20 = 616$ cm²;

☞ $P = 320 + 616 = 936$; $P = 936$ cm².

☞ Замени ги B и H во општата формула за волумен на пирамидата:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 320 \cdot 12, \qquad V = 1\,280 \text{ cm}^3.$$

Треба да знаеш:

- да пресметаш волумен на пирамида според општата формула;
- да изведеш формула за пресметување волумен на пирамида во конкретен пример.

Провери се!

- Пресметај го волуменот на правилна триаголна пирамида со основен раб 5 cm и висина 9 cm.
- Правилна четириаголна пирамида има висина 12 cm и дијагонала на основата 8 cm. Колку е волуменот на пирамидата?

Задачи

1. Правилна четириаголна пирамида има основа $B = 144$ cm^2 и висина $H = 40$ cm. Пресметај го волуменот на пирамидата.

2. Волуменот на една правилна четириаголна пирамида е 48 cm^3, а плоштината на нејзината основа е 36 cm^2. Пресметај ја плоштината на пирамидата.

3. Правилна четириаголна пирамида има основен раб $a = 24$ cm и бочна плоштина $M = 960$ cm^2. Пресметај ги плоштината P и волуменот V на пирамидата.

4. Правилна четириаголна пирамида има основен раб 20 cm и волумен 3 200 cm^3. Пресметај ја висината и плоштината на таа пирамида.

5. Основата на една пирамида е правоаголник со димензии 90 cm и 1,20 m, а сите бочни рабови имаат по 1,25 m. Најди го нејзиниот волумен.

6. Една правилна четириаголна пирамида има основен раб $a = 8$ cm и волумен $V = 576$ cm^3. Најди ги висината и плоштината на пирамидата.

7. Меѓу величините a, H, s, B, M, P, V кај правилна шестаголна пирамида најди ги непознатите, ако се дадени (во cm):

а) $a = 10$, $H = 24$;

б) $B = 73{,}5\sqrt{3}$, $s = 25$ (s е бочниот раб);

в) $a = 7$, $s = 25$;

г) $V = 588\sqrt{3}$, $H = 24$.

Обиди се...

а) Каков многуаголник треба да биде основата за да можеш да формираш пирамида со еднакви бочни рабови?

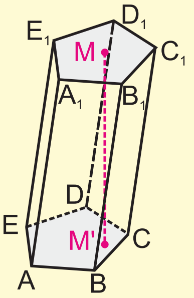
б) Каков многуаголник треба да биде основата за да можеш да формираш пирамида со еднакви апотеми?

ЦИЛИНДАР, КОНУС, ТОПКА

12 ЦИЛИНДАР; ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН

Потсети се!

- Што е призма и како се добива? Што се притоа:
  - а) основи;
  - б) бочни ѕидови;
  - в) бочна површина;
  - г) висина на призмата?
- За кои геометриски тела се вели дека се валчести?

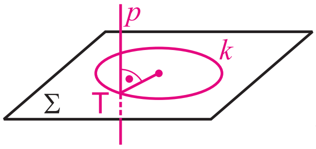


- Многу предмети од секојдневниот живот имаат форма на цилиндар (на пример: конзерва, ќунк).
- Наброј уште неколку предмети што имаат цилиндрична форма.

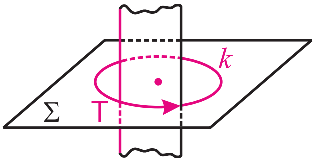
A

- Да видиме како се добива геометриското тело што го нарекуваме цилиндар.
- Следи ја постапката внимателно.

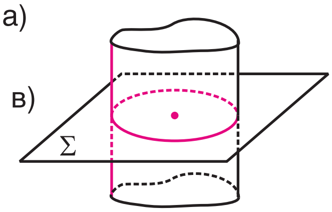
Дадена е една *рамнина* Σ, една *кружница* k на неа и една *права* p што минува низ една точка T од кружницата, а е нормална на Σ, како на цртежот а).



а)



б)



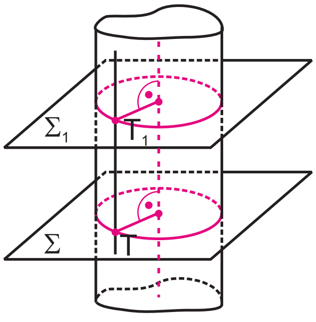
в)

Да замислиме дека точката T почнува да се движи по кружницата, а правата p – да останува паралелна на својата почетна положба како на цртежот б).

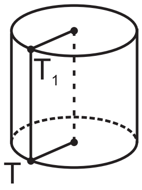
На тој начин подвижната права p опишува една површина; тоа е **цилиндрична површина** – црт. в).

- За правата p се вели дека е **генератриса** (или **изведница**), а за кружницата – **директриса** (или **водилка**) на цилиндричната површина.

Да ја пресечеме оваа површина уште со една рамнина Σ_1, паралелна со Σ, како на црт. г).



г)

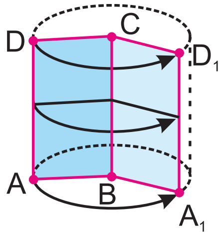


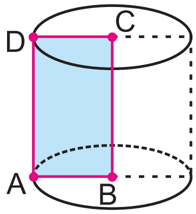
д)

Запомни

- Круговите што цилиндричната површина ги отсекува од рамнините Σ и Σ_1, и делот од неа помеѓу рамнините, заградуваат дел од просторот, т.е. образуваат едно геометриско тело што се вика **прав кружен цилиндар**, а ние ќе го викаме само **цилиндар**. Тој цилиндар е издвоено претставен на цртежот д).

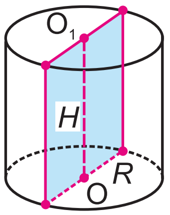
- Нагледно, цилиндар може да се добие и кога правоаголник ротира околу една своја страна (на цртежот: ABCD, околу BC).

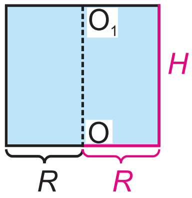




Б

- Разгледај го цртежот и воочи ги елементите на цилиндарот.





- Круговите се викаат **основи**, а делот од цилиндричната површина меѓу нив – **бочна површина** на цилиндарот.
- Радиусот R на основата се вика **радиус** на цилиндарот.
- Отсечката OO_1 (чиишто крајни точки се центрите на основите) се вика **оска** на цилиндарот; таа е и негова **висина**.
- Ако цилиндарот се пресече со рамнина што минува низ неговата оска, се добива еден правоаголник што се вика **осен пресек** (шрафираниот правоаголник на цртежот).

1. Дали може два осни пресеци на еден цилиндар да не се складни меѓу себе? Зошто?

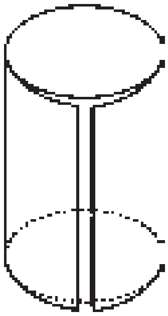
2. Пресметај ја плоштината на осниот пресек на цилиндар со радиус $R = 5$ cm и висина $H = 7$ cm.

- За цилиндар чијшто осен пресек е квадрат, т.е. $H = 2R$, се вели дека е **рамностран цилиндар**.

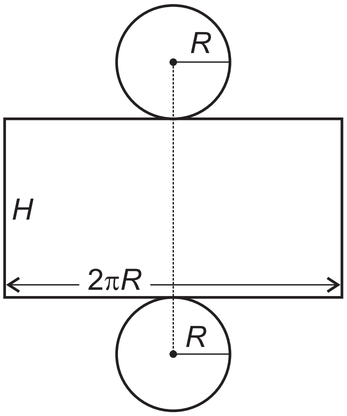
3. Осниот пресек на еден рамностран цилиндар има 100 cm^2. Најди ги радиусот и висината на цилиндарот.

В

- Ако цилиндарот се расече по една негова генератриса и по периферијата на основите, како на цртежот а), тогаш може да се види дека **мрежата на цилиндарот** е составена од два складни круга (основите) и еден правоаголник (бочната површина), како на цртежот б).



а)



б)

4. Разгледај ја мрежата на цртежот б) и, за **плоштината** P на цилиндар со радиус R и висина H, согледај дека:

а) $P = 2B + M$; (B – плоштина на основата, M – плоштина на бочната површина);

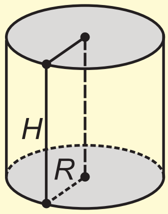
б) $B = R^2\pi$ (Зошто?), $M = 2R\pi \cdot H$ (Зошто?);

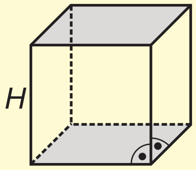
в) $P = 2R^2\pi + 2R\pi \cdot H$; $\boxed{P = 2R\pi(R + H).}$

5. Пресметај ја плоштината на цилиндар со радиус $R = 8$ cm и висина $H = 2,5$ dm.

Потсети се!

Постои голема сличност меѓу цилиндар и права призма.





– две складни основи што лежат на паралелни рамнини;
– бочни површини со изводници, односно рабови нормални на основите.

За волуменот на цилиндар со радиус R (т.е. со плоштина на основата $B = R^2\pi$) и висина H, слично како кај призмата, се зема бројот

$$\boxed{V = B \cdot H, \quad \text{т.е.} \quad V = R^2\pi \cdot H.}$$

Значи, волуменот на цилиндар е еднаков на производот од плоштината на неговата основа и висината.

6. Пресметај го волуменот на цилиндар со радиус $R = 10$ cm и висина $H = 15$ cm.

7. Изведи ги формулите за плоштина и волумен на *рамностран цилиндар*, со радиус R.

Одговор: $\boxed{P = 6R^2\pi; \quad V = 2R^3\pi.}$

Треба да знаеш:

- да идентификуваш елементи на цилиндар;
- да пресметаш плоштина и волумен на цилиндар според формула.

Провери се!

- Како се добива:
  а) цилиндрична површина; б) цилиндар?
- Пресметај ги P и V на цилиндар со $R = 1,2$ dm и $H = 15$ cm.
- За кој цилиндар се вели дека е рамностран?

Задачи

1. Да се пресмета P и V на цилиндар со $R = 6$ cm и плоштина на осниот пресек $Q = 240$ cm^2.

2. Пресметај ги P и V на рамностран цилиндар со: а) $R = 10$ cm, б) $H = 2$ dm.

3. Одреди ја висината на цилиндар, чиј радиус е 5 cm, а волуменот му е $V = 1\,570$ cm^3.

4. Дијагоналата на осниот пресек на еден цилиндар, што е висок 8 cm, е еднаква на 10 cm. Пресметај ги P и V на цилиндарот.

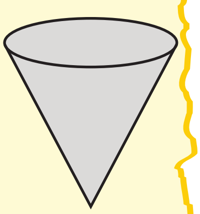
5. Рамностран цилиндар има плоштина $1\,350\pi$ cm^2. Определи го неговиот волумен.

6. Два цилиндра се добиени со ротација на правоаголник околу секоја од неговите страни a и b. Најди го односот на волумените на тие цилиндри.

13 КОНУС; ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН

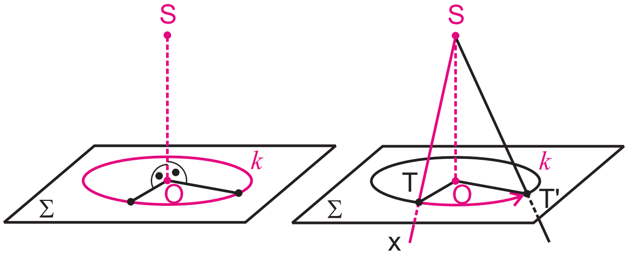
Потсети се!

- Во секојдневието често срекаваш предмети со конусна форма.
- Наброј неколку предмети што имаат конусна форма.



Едно геометриско тело со конусна форма може да се добие на сличен начин како што се добива цилиндар.

Проследи ја постапката.



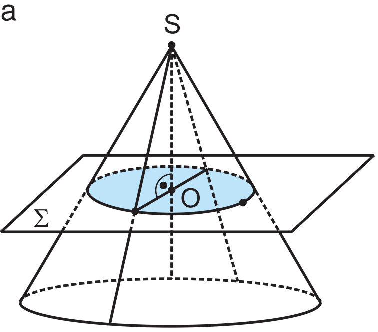
☞ Дадена е една *рамнина* Σ и на неа една *кружница* k со центар O. Од точката O е „дигната“ отсечката OS што е *нормална* на рамнината Σ.

☞ Од точката S повлечи една полуправа SX која минува низ една точка од кружницата k.

☞ Точката T почнува да се движи по кружницата, а полуправата SX да се „лизга“ по кружницата.

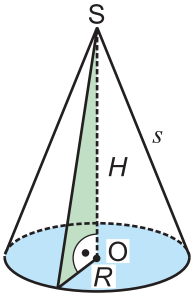
☞ На тој начин подвижната полуправа опишува една површина; тоа е **конусна површина**.

☞ За полуправата SX се вели дека е **генератриса** (**изведница**), за кружницата – **директриса** (**водилка**), а точката S – **врв**.



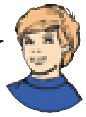
Запомни

Кругот што го отсекува конусната површина од рамнината Σ и делот од површината од кај врвот S, заградуваат дел од просторот, т.е. образуваат едно *геометриско тело* што се вика **прав кружен конус**; ние ќе го викаме, само **конус**. На цртежот е претставен тој конус издвоено.



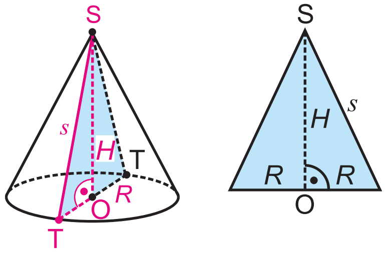
1. Какво геометриско тело се добива кога еден рамнокрак триаголник се врти (ротира) околу висината спуштена кон основата?

Конус се добива и кога еден правоаголен триаголник ротира околу една катета.



Б

- Разгледај го цртежот и воочи ги елементите на конусот.



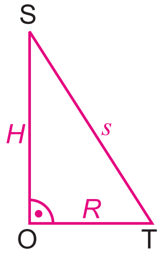
- Кругот се вика **основа**, а делот од конусната површина – **бочна површина** на конусот.
- Радиусот R на основата се вика **радиус** на конусот.
- Отсечката SO што го сврзува врвот со центарот на основата се вика **оска** на конусот; тоа е и неговата **висина**.
- Отсечка чии крајни точки се врвот S на конусот и која било точка T од периферијата на основата, како и должината $\overline{ST} = s$, се вика **генератриса**.
- Пресекот на конус со рамнина што минува низ неговата оска секогаш е рамнокрак триаголник; тој се вика **осен пресек** на конусот (шрафираниот триаголник на цртежот).
- Ако осниот пресек е рамностран триаголник, т.е. $s = 2R$, тогаш за конусот се вели дека е **рамностран конус**.

2. Пресметај ја плоштината Q на осниот пресек на рамностраниот конус со $R = 10$ cm.

3. Разгледај го цртежот и одговори зошто е точно равенството

$$\boxed{s^2 = H^2 + R^2}$$

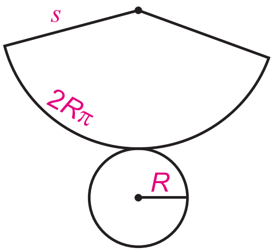
што ги сврзува генератрисата s, висината H и радиусот на основата кај секој конус.



4. Пресметај ја висината H на конусот при кој $s = 25$ cm и $R = 7$cm.

В

- Ако конусот се пресече по една негова генератриса и по периферијата на основата, тогаш може да се види дека **мрежата на конусот** е составена од еден круг (основата) и еден кружен исечок (бочната површина), како на цртежот.



5. Разгледај ја мрежата на цртежот и, за **плоштината** P на конус со радиус R и генератриса s, согледај дека:

а) $P = B + M$ (B – плоштина на основа; M – плоштина на бочната површина);

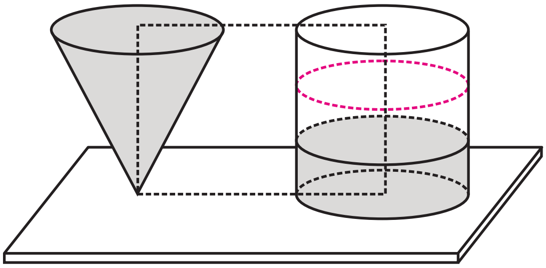
б) $B = R^2\pi$ (плоштина на круг);

в) $M = \frac{1}{2} 2R\pi \cdot s = Rs\pi$ (плоштина на кружен исечок);

г) $P = R^2\pi + Rs\pi$, т.е. $P = R\pi (R + s)$.

6. Пресметај ја плоштината на конус со радиус $R = 5$ cm и висина $H = 1{,}5$ dm.

- Волуменот на конус може да биде определен со експеримент сличен на експериментот за одредување на волуменот на пирамида.



- Ако направиш модели на конус и цилиндар со складни основи и еднакви висини, ќе се увериш дека „содржината“ на конусот (песок сол или сл.) ќе биде една третина од таа на цилиндарот.

- Волуменот V на конус со радиус R и висина H е: $V=\frac{1}{3}BH$; $V=\frac{1}{3}R^2\pi H.$

7. Пресметај го волуменот на конус со R = 10 cm и H = 3 dm.

8. Изведи ги формулите за плоштина и волумен на *рамностран конус*.

- Спореди го твојот резултат: $P = 3R^2\pi$; $V=\frac{R^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

Треба да знаеш:

- да идентификуваш елементи на конус;
- да пресметаш плоштина и волумен на конус според општа формула.

Провери се!

- Како се добива а) конусна површина; б) конус?
- Пресметај ги P и V на конус со R = 5 cm и s = 13 cm.
- За кој конус се вели дека е рамностран?

Задачи

1. Пресметај ги плоштината P и волуменот V на конус со радиус R = 5 cm и плоштината на бочната површина $M = 65\pi$ cm^2.

2. Пресметај ги P и V на конус со B = 314 cm^2 и s = 26 cm.

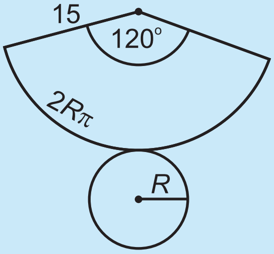
3. Осниот пресек на еден конус има плоштина Q = 18,48 cm^2, а висината е H = 5,6 cm.
Пресметај ги:
а) B; б) V; в) M.

4. Периметарот на осниот пресек на рамностран конус е 18 cm. Најди ги P и V на конусот.

5. Волуменот на конус со висина H = 20 cm, е 1 500π cm^3. Пресметај ја плоштината на конусот.

Обиди се! ... Не е задолжително!

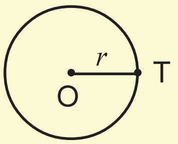
6. Аголот при врвот кај мрежата на конус е 120°, а генератрисата на конусот е 15 cm. Најди го дијаметарот на конусот.



14 ТОПКА; ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН

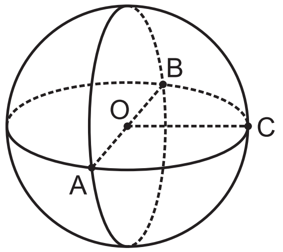
Потсети се!

- Искажи ја дефиницијата за кружница.
- Што е центар, а што радиус на кружницата?
- Со што е определена една кружница?



А

- Множеството од сите точки во просторот што се еднакво оддалечени од дадена точка O, образува една површина; таа површина се вика **сфера**.
- Дадената точка O се вика **центар** на сферата.



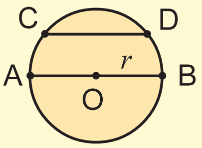
- Растојанието од центарот до која било точка од сферата се вика **радиус** на сферата и обично се означува со *R*.
- И секоја отсечка OT, каде што T е произволна точка од сферата се вика **радиус** на сферата.

1. На цртежот е претставена сфера со центар O.

- Именувај (барем две) отсечки што се радиуси на сферата.
- Со што е определена една сфера?

Потсети се!

- Што е внатрешна област за една кружница?
- Што е круг?
- Што е тетива, а што дијаметар на круг?
- Именувај некои предмети со форма на топка што ги среќаваш во секојдневниот живот.



Б

- Сферата го дели просторот на внатрешна и надворешна област.
- Множеството од сите точки на внатрешната област (т.е. точките чиешто растојание до центарот е помало од радиусот на таа сфера), заедно со сферата, образува геометриско тело што се вика **топка**.
- Центарот, односно радиусот на сферата се викаат **центар**, односно **радиус** на топката.

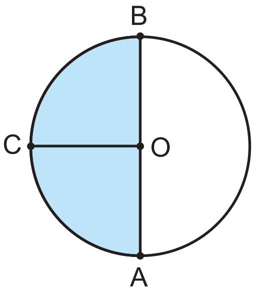
2. Топка со центар O има радиус *R* = 5 cm. Точките A, B и C се наоѓаат на растојание од центарот: $\overline{OA} = 1{,}5$ cm, $\overline{OB} = 5{,}1$ cm и $\overline{OC} = 5$ cm. Кои од нив ѝ припаѓаат на топката?

3. Потсети се што е дијаметар на круг и обиди се да ја искажеш (по аналогија) дефиницијата за дијаметар на топка.

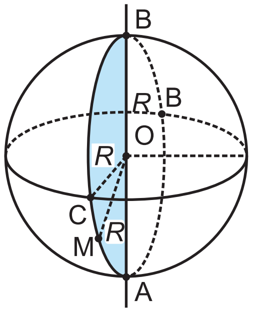
4. На цртежот а) е претставен круг со еден негов дијаметар AB.

- Што ќе се добие ако кругот ротира околу дијаметарот AB?

- Можеш да заклучиш дека со ротирање на круг (или полукруг) околу некој негов дијаметар (како на црт. б)), се добива топка.



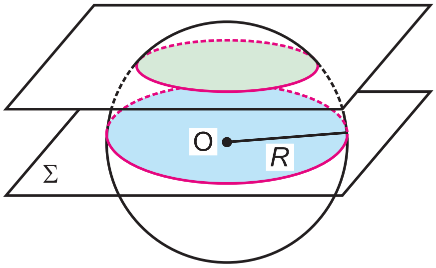
а)



б)

Воочи дека:

- Пресекот на топка со рамнина секогаш е круг.
- Ако рамнината минува низ центарот O на топката, тогаш пресечниот круг има ист радиус (R) како топката и се вика **голем круг**.
- Колку големи кругови има една топка?
- Какви се меѓу себе нивните радиуси?



5. Разгледај (или замисли) еден глобус.

- Екваторот определува еден голем круг на глобусот.
- Кои линии определуваат други големи кругови?
- Посочи некои мали кругови на глобусот.

В

- Површината на секоја топка (т.е. соодветната сфера) има своја плоштина, којашто се вика **плоштина на топката**.

- Плоштината на топка со радиус R се определува со формулата: $\boxed{P = 4R^2\pi.}$

Воочи:

- Плоштината на топката:

  а) е четирипати поголема од плоштината на еден нејзин голем круг;

  б) е еднаква со производот од дијаметарот $2R$ и периметарот $2R\pi$ на еден нејзин голем круг, т.е. $P = 2R \cdot 2R\pi = 4R^2\pi$.

- На секоја топка ѝ придружуваме број V – волуменот на топката, определен со формулата

$$\boxed{V = \frac{1}{3}PR\ ,} \quad \text{т.е.} \quad \boxed{V = \frac{4}{3}R^3\pi,}$$

каде што R е радиусот, а P е плоштината на топката.

6. Пресметај ги P и V на топка со радиус $R = 5$ cm.

7. Пресметај ги P и V на топка, за која се знае дека еден нејзин голем круг има плоштина $Q = 2\ 826\ \text{cm}^2$.

Треба да знаеш:

- да идентификуваш сфера и топка и нивните елементи;
- да пресметаш плоштина и волумен на топка според формула.

Провери се!

- Објасни што е сфера, а што е топка. Како се добиваат?
- Колкави се P и V на топка со $R = 1$ dm?

Задачи

1. Пресметај ги плоштината P и волуменот V на топка, ако нејзиниот дијаметар е 12 cm.

2. Најди ги P и V на топка, ако плоштината на еден нејзин голем круг е $314\ \text{cm}^2$.

3. Оловна топка со радиус $R = 6$ cm треба да се претопи во цилиндар со ист радиус $R = 6$ cm. Колкава е висината на цилиндарот?

4. Најди го волуменот V на топката и плоштината Q на нејзиниот голем круг, ако нејзината плоштина е $P = 100\pi\ \text{cm}^2$.

5. Во коцка со раб 6 cm е ставена топка којашто ги допира сите ѕидови на коцката. Колкава е плоштината на топката? Нацртај слика.

6. Дадена е коцка со раб a. Околу коцката е опишана топка и во коцката е впишана топка. Најди го односот меѓу а) плоштините; б) волумените на тие две топки. (Една коцка е **впишана** во топка ако сите нејзини темиња лежат на површината од топката. Тогаш велиме, исто така, дека топката е **опишана** околу коцката.)

7. Од дрвена коцка со раб 4 cm, треба да се изделка, најголема можна топка. Пресметај го волуменот на отпадокот. Колкав процент од волуменот на коцката е волуменот на отпадокот?

8. Дијаметарот на Земјата е 12 733 km, а на Месечината е 3 482 km. Колку пати е поголема:
а) плоштината на Земјата од плоштината на Месечината;
б) волуменот на Земјата од волуменот на Месечината?

15 ВЕРОЈАТНОСТ

Потсети се!

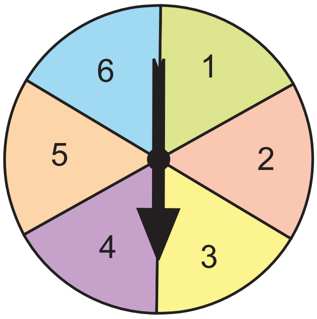
■ Ако е сигурно дека некој настан ќе се случи, тогаш веројатноста е 1, т.е. 100 %.
На пример: Ако празно пластично шише падне на подот – нема да се скрши.

■ Ако е невозможно некој настан да се случи, тогаш веројатноста е 0.
На пример: Од кутија полна само со црвени топчиња, да се извлече бело топче.

■ Сите други можности (веројатности) се меѓу 0 и 1.

На пример: Ако се фрли во воздух монета, веројатноста да падне грб е $\frac{1}{2}$.

1. Вртелешката на цртежот има 6 еднакви полиња. Ако се заврти стрелката, колкава е веројатноста таа да застане на полето со број 4?



■ Воочи ги следниве 6 настани:

Стрелката да застане на кое било од полињата 1, 2, 3, 4, 5 или 6.
Секој од овие настани е еднакво можен.

Очекуван настан е стрелката да застане на полето со број 4.

Веројатноста за стрелката да застане на полето со број 4 е $\frac{1}{6}$. Запишуваме $V(4) = \frac{1}{6}$.

● Колкава е веројатноста за стрелката да застане на бројот 1?

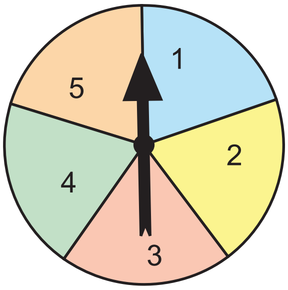
■ Веројатноста за стрелката да застане на бројот 2 или на бројот 3 е $\frac{2}{6}$, или

$V(2 \text{ или } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

● Колкава е веројатноста за стрелката да застане на бројот 1, 5 или 6?

■ Воочи ја вртелешката.
Можни настани има 5: стрелката може да застане на полето означено со 1 или со 2 или со 3 или со 4 или со 5.
Ако очекуван настан е стрелката да застане на поле означено со 7, нејзината веројатност е 0, или $V(7) = \frac{0}{5} = 0$.

Настанот е невозможен.



Општо:

- Нека n е бројот на „сите можни случаи“ во врска со даден експеримент и нека сите тие случаи се еднакво можни.
- Ако А е настан во врска со тој експетимент и m е бројот на „сите поволни случаи“ за појавување на тој настан, тогаш количникот $\frac{m}{n}$ се вика **математичка веројатност** на настанот А и се означува со V(A). Значи:

$$\mathrm{V}(\mathrm{A})=\frac{m}{n}.$$

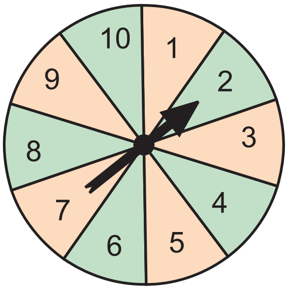
2. На секоја од картичките е запишана по една буква.

М А Т Е М А Т И К А

- Јован влечел карти без гледање. Одреди ја веројатноста за настаните:

а) V(M); б) V(A); в) V(Т или К).

3. Одреди ја веројатноста на секој од следниве настани од вртењето на стрелката .



а) бројот 3;
б) парен број;
в) непарен број;
г) 5 или 6;
д) бројот 11;
ѓ) број поголем од 7;
е) број од 1 до 10.

- Запиши ја секоја од добиените вредности за веројатноста со процент.
- Кој од настаните од а) до е) е сигурен, кој е невозможен?
- Кои два настани од а) до е) се еднакво можни?
- Кои два настани се такви што ако се случи едниот сигурно не се случува другиот?

Треба да знаеш:

- да поставуваш претпоставки за настани во врска со даден експеримент и да ја одредуваш нивната веројатност.

Провери се!

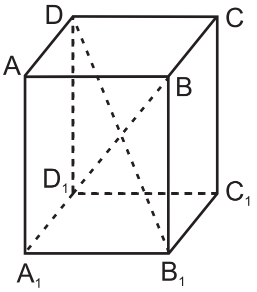
- Се фрла коцка за играње. Кои настани се можни? Наброј барем три.
- Колкава е веројатноста, при фрлање коцка за играње, на горната страна да биде:
  а) бројот 2;
  б) бројот 3 или 4;
  в) бројот 3 и 4;
  г) парен број;
  д) бројот 7;
  ѓ) број од 1 до 6?

УЧЕШЕ ЗА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА
ПРОВЕРИ ГО ТВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. Кое теме од квадарот (на цртежот) е компланарно со:

а) A, B, C_1;

б) A, C, C_1?



2. Дали се сечат правите:
а) DB_1 и D_1C; в) A_1C и AC_1?
б) BB_1 и D_1C;
Види го цртежот.

3. Дали една рамнина е определена со правите:
а) AD и B_1C_1; б) DC и DB_1; в) BC и AA_1?
Види го цртежот.

4. Како се викаат две прави во просторот што не се паралелни и не се сечат? На цртежот најди два пара такви прави.

5. Дадена права p е нормална на две различни рамнини Σ_1 и Σ_2. Каква е заемната положба на Σ_1 и Σ_2?

6. Што е ортогонална проекција на отсечка врз една рамнина?

7. Колку рабови има една:
а) триаголна; в) шестаголна;
б) четириаголна; г) n – аголна призма?

8. Плоштината на дијагоналниот пресек на една коцка е $64\sqrt{2}$ cm^2. Најди го работ на коцката.

9. Пресметај ја дијагоналата на квадар со димензии 9 cm, 6 cm и 2 cm.

10. Плоштината на бочната површина на една правилна триаголна призма е $M = 180$ cm^2, а основниот раб $a = 10$ cm. Пресметај ги плоштината P и волуменот V на призмата.

11. Ромб со дијагонали 24 cm и 10 cm е основа на права призма со висина 5 cm. Пресметај ги P и V на призмата.

12. Основниот раб на правилна шестаголна пирамида е 3 cm, а бочниот раб е 4 cm. Пресметај го волуменот V на пирамидата.

13. Пресметај ги плоштината P и волуменот V на правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 10$ cm и апотема $h = 13$ cm.

14. Колку литри вода собира едно буре во форма на цилиндар, со плоштина на основата 30 dm^2 и висина 1 m?

15. Пресметај ги P и V на конус со радиус на основата $R = 0{,}5$ dm и висина $H = 1{,}2$ dm.

16. Пресметај ги P и V на топка чијшто главен голем круг има плоштина $56{,}25\pi$ cm^2.

ОДГОВОРИ И РЕШЕНИЈА

НА *задачите*

ТЕМА 1. СЛИЧНОСТ

1 ① а) 3 : 4; б) 3 : 2; в) 5 : 2. ② а) 4 : 3; б) 2 : 3; в) 2 : 5. ③ а) 1 : 2; б) 1 : 2; в) 3 : 10. Еднакви меѓу себе се под а), б) и г); в) и д). ④ а) 150 : 100 : 50; б) 3 : 2 : 1. ⑤ а) 15; б) 7,8; в) 0,5; г) $\frac{7}{5}$. ⑥ а) 1 : 3; б) 1 : 5; в) 1 : 6. ⑦ а) 3 : 1; б) 1 : 4. ⑧ 7,5 cm. ⑨ 2 : 1. ⑩ 3 : 2. ***Обиди се...*** а) 12 јајца; б) 3 кокошки.

2 ① а) 20; б) 6. ② На пример, 28 : 16 = = 2,1 : 1,2. ③ а) $\frac{4}{9}$ dm; б) $\frac{8}{3}$ m. ④ а) 3; б) 7,5; в) 16. ⑤ а) 4 cm; б) 24 cm; в) $7\sqrt{2}$ cm. ⑦ а) $x = 6$, $y = 7{,}5$; б) $x = 28$, $y = 1{,}5$.

3 ⑥ $\overline{MB} = 7\ 2$ dm; $\overline{AB} = 12$ dm. ⑦ За 8 cm. ⑧ $\overline{AM} : \overline{AB} = 3 : 5$; $\overline{AB} : \overline{MB} = 5 : 2$.

4 ① 6 cm. ② а) 16; б) 6. ③ $\frac{b}{a}$; cd; mn; $\frac{4}{k}$. ④ $\overline{A_1B_1} = 9$ cm, $\overline{B_1C_1} = 3$ cm. ⑤ а) Да; б) Не.

5 ① 5. ② $\overline{AB} \approx 14\ 3$ m. ③ $\overline{AD} = 13\ 5$; $\overline{BC} = 18$. ④ $x = 5$, $y = 10$. ⑦ *Помош*. Согледај дека $1 : a = a : x$. ⑧ *Помош*. а) $b : a = a : x$; б) $a : b = b : x$. ⑨ $x = 12$; $y = 16$. ⑩ а) *Решение*. На цртежот, AB е продолжена за (произволно) растојание BC, а произволна достапна точка E, од која се гледа A, сврзана е со C. Потоа е повлечена BD || AE. Според Талесовата теорема се добива $\overline{CB} : \overline{BA} = \overline{CD} : \overline{DE}$, т.е. $\overline{BA} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{\overline{CD}}$. б) 212,5 m. в) 300 m.

6 ① а) AB и RS, AC и RT, BC и ST; б) ∢A и ∢R, ∢B и ∢S, ∢C и ∢T. ② $\frac{3}{4}$. ③ $x = 8$, $y = 7{,}5$. ④ 18 и 4. ⑤ Да. Кај складните триаголници, соодветните агли се еднакви и соодветните страни се еднакви (па значи се пропорционални). ⑥ MN || AB (како средна линија на ΔABC), па соодветните агли им се еднакви; $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ и $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, па соодветните страни им се пропорционални.

7 ① а) 3 : 5; б) 7 : 3; в) 4 : 3. ② 5. ③ б) 6. ⑤ 17 m.

8 ③ 22,5. ④ Не. ⑥ Да, според вториот признак. ⑦ а) Да; б) Да. ⑧ 52 m. ⑨ 17,5 m.

9 ① 8 cm. ② 24 cm, 45 cm, 27 cm. ③ 30 cm и 12 cm. ④ $a_1 = 12$ cm, $b_1 = 16$ cm, $c_1 = 24$ cm. ⑤ 6,5 cm. ⑥ $b_1 = 5$, $h_1 = 10$. ⑦ *Помош*. Во ΔABC повлечи ја средната линија A_1B_1 || AB и разгледај го ΔA_1B_1C. ⑧ $a_1 = 18$, $h_1 = 9$. ⑨ $\frac{3}{5}$. ⑩ 0,69 ha.

10 ① а) z; z; б) n; в) z; г) m. ② а) 6; б) 121; в) $a = 12$, $b = \sqrt{180} \approx 13\ 4$. ③ а) 3,2; б) 5; в) 3; г) 4. ⑤ $c = 10$; $q = 3{,}6$; $b = 6$. ⑥ 150 cm^2. ⑦ *Помош.* Конструирај ја геометриската средина x на отсечките a и b. Тогаш $x^2 = a \cdot b$, па бараниот квадрат има страна x.

11 ① а) 37; б) 33; в) $c \approx 40$. ② а), в), г) Да; б) Не. ③ 1. ④ 19,4 dm. ⑤ 64. ⑥ ≈ 10,4.

⑦ $c = 37$, $b = 12$. *Решение.* $a^2 + b^2 = c^2$, за $a = 35$ и $b = 49 - c$ станува: $35^2 + (49 - c)^2 = c^2$, т.е. $1\,225 + 2401 - 98c + c^2 = c^2$, од каде што се добива $3626 = 98c$, па $c = 37$; потоа, $b = 49 - c = 12$.

⑧ 21 и 28.

12 ① 7 m. ② а) 40 cm; б) 1320 cm²; в) ≈ 51,9 cm. ③ $a \approx 32$ cm. ④ 44 cm. ⑤ 1260 cm². ⑥ 6 cm. ⑧ *Помош*. Искористи ја конструкцијата во задачата 5. ⑨ 92 cm (= 2 · (30 + 16) cm).

⑩ 6 m. *Помош.* Нека $(x + 2)m$ е висина на дрвото. Тогаш $(x + 2)^2 + 8 = 10^2$, $(x + 2)^2 = 36$, $x + 2 = 6$.

Обиди се... $P = \frac{\pi}{8}t^2$; за $t = 6$: $P = \frac{9\pi}{2}$.

Решение. $P = \pi\left[\quad {}^2 - \quad r_1^2 + r_2^2 \quad\right]$; $r_1 = \frac{1}{2} \qquad + x$,

$r_1^2 = \frac{1}{4} \quad {}^2 + 2 \quad x + x^2$; $r_2 = \frac{1}{2} \qquad - x$,

$r_2^2 = \frac{1}{4} \quad {}^2 - 2 \quad x + x^2$; $x^2 = \quad {}^2 - \frac{t^2}{4}$;

$r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{2} \quad {}^2 + x^2 \quad = \frac{1}{2} \quad {}^2 + \quad {}^2 - \frac{t^2}{4} \quad$;

$\mathrm{P} = \pi\left[\quad {}^2 - \frac{1}{2}\; 2 \quad {}^2 - \frac{t^2}{4} \quad\right] = \frac{\pi}{8}t^2$.

Тест: ① а) 3 : 2; б) 3 : 2; в) 9 : 4. Еднакви се под а и б. ② 1,5 cm. ③ а) 10; б) 9; в) 4. ④ 12. ⑥ а) 12; б) 35. ⑦ AC || BD, бидејќи $\overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{OD}}$. ⑧ *Помош.* Отсечката од 12 cm подели ја на три дела, во однос 3 : 5 : 6. ⑨ Да, според првиот признак (аглите на првиот триаголник: 40°, 60° и 80°, а аглите на вториот: 60°, 80° и 40°). ⑩ 10 m. ⑪ 3,2 cm. ⑫ L = 45 cm; P = 45 cm². ⑬ $c = 10$; $a = \sqrt{20}$; $b = \sqrt{80}$; $h = 4$. ⑭ 920. ⑮ а) и в) Да; б) Не. ⑯ 128. ⑰ 5,3 cm.

ТЕМА 2. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА, ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА И ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

1 ① Под а) и в). ② Под б) и в). ③ за $x = 2$. ④ Идентитет е $5(x - 1) = 5x - 5$. ⑤ Под а) и под б). ⑥ За $a = 3$.

2 ① а) Со 3 непознати; б) со една непозната; в) со 2 непознати. ② а) Од трет степен; б) од втор степен; в) од прв степен. ③ Под а) и под в). ④ Под а) и под в). ⑤ Под в) и под г).

3 ① Под б) и под в). ② за $a = 5$. ③ а) M = {2}; б) M = {3}; в) M = {4}. ④ Равенката под б). ⑤ Равенката под б). ⑥ Равенките под а) и под в).

4 ① Равенките се еквивалентни. ② На двете страни на равенката е додаден изразот $2x$. ③ Може да се изостават членовите $-3x$; -5 и се добива равенката $2x - 4 = 4$. ④ $3x - 2 + x = 5 + 2x - 3 \Leftrightarrow 3x + x - 2x = 5 - 3 + 2 \Leftrightarrow 2x = 4$. ⑤ $m = 5x$. ⑥ а). б). ⑦ а) −1; б) 4.

5 ① Исто множество решенија M = {2}. ② M = {2}. ③ а) Не; б) Да; в) Не. ④ $x = 2$. ⑤ а) M = {−1}; б) M = **R**. ⑥ $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{4} = \frac{2x}{3} \Leftrightarrow$ $6x - 6 + 3x + 3 = 8x \Leftrightarrow 6x + 3x - 8x = 6 - 3 \Leftrightarrow x = 3$.

Обиди се... Тапа 0,5 денари, шише 10,5 денари.

6 ① а) $2x - 4 = 0$; б) $2x - 6 = 0$. ② Под в). ③ а) $x = 2$; б) $x = 2$; в) $x = \frac{3}{2}$. ④ $2x - 8 = 1 - x$; $x = 3$. ⑤ а) $x = -3$; б) $x = 0$; в) $x = 6$. ⑥ а) $x = 3$; б) $x = 3$. ⑦ а) $x = 3$; б) $x = 8$; в) $x = 3$. ⑧ За $a = 4$.

Трик со домино... Помош. Да ги означиме со x и y „броевите“ на доминото и нека е избран бројот x. Тогаш: $(2x + 6) \cdot 5 + y - 30 = 10x + y$.

7 ① 28. ② 108 и 72. ③ $x = (x - 46) \cdot 4 + 7$; тоа се броевите 59 и 13. ④ $a = b - 2$; $b - 2 + 2b = 43$; $a = 13$ cm, $b = 15$ cm. ⑤ Ако бројот на монетите од 2 денари ги означиме со x, тогаш бројот на монетите од 5 денари се $25 - x$. Оттука имаме: $2 \cdot x + (25 - x) \cdot 5 = 80$, односно од 2 денари биле 15 монети, а од 5 денари 10 монети. ⑥ Ако бројот на зајаците го означиме со x, тогаш бројот на фазаните е $35 - x$. Оттука имаме: $4 \cdot x + (35 - x) \cdot 2 = 94$. Зајаци биле 12, а фазани 23. ⑦ $(x + 2) \cdot 35 = (x - 1) \cdot 50$; $x = 8$ часа. $\overline{AB} = 350$ km. ⑧ Првиот работник за 1 час ќе заврши $\frac{1}{6}$ од работата, а вториот $\frac{1}{12}$. Ако со x го означиме потребното време, тогаш $\frac{1}{6} \cdot x + \frac{1}{12} x = 1$, односно $x = 4$. ⑨ За $2\frac{2}{5}$ часа. ***Обиди се...*** 84 год.

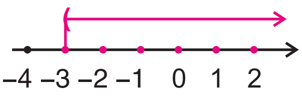
⑩ $\frac{1}{12}x - \frac{1}{20}x = 1$; втората цевка ќе го наполни празниот базен за 30 часа.

8 ① Под а) и под б). ② За $x = 0$ и $x = 2$. ③ Со една непозната се неравенките под а) и в), а со две непознати се неравенките под б) и под г). ④ Неравенката под а) е од втор степен, неравенките под б) и под в) се од прв степен, и неравенката под г) е од трет степен.

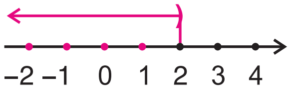
9 ① а) $R(3x + 1 > 2x + 1) = \{1, 2, 3\}$ и б) $R(2x + 3 > x + 3) = \{1, 2, 3\}$. ② Еквивалентни се сите три неравенки, бидејќи имаат исто множество решенија $\{0, 1, 2\}$.

③ а) $(-2, +\infty)$; б) $(-\infty, 0)$; в) $(-\infty, 1]$; г) $[-3, +\infty)$;

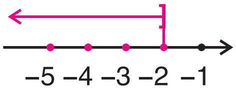
④ а) $(-3, +\infty)$.



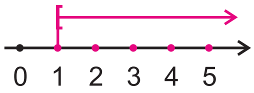
б) $(-\infty, +2)$.



⑤ а) $(-\infty, -2]$.



б) $[1, +\infty)$.



⑥ Под б).

10 ① а) $x < 2$; б) $x > 2$. ② $2x - 3 < x - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x - 3 - 5x < x - 1 - 5x$. ③ а) $2x + 2 < x + 4$; б) $3x + 2 > 2x - 2 - 6$. ④ $x < 12$. ⑤ $x > -2$. ⑥ а) и б). Двете страни се помножени со –1.

11 ① а) $x > 3$; б) $x > -3$. ② а) $x \geq 4$; б) $x \leq 3$. ③ Не е. Решение е интервалот $(-\infty, -4)$. ④ а) $x < 3\frac{2}{5}$; б) $x > -3$. ⑤ $x < 5$. ⑥ $2a + 2(a - 3) < 54$, $a < 15$.

12 ① а) $(-3, 6)$; б) $(-3, -1)$. ② а) $\left(-\frac{5}{2}\ \ +\infty\right)$; б) $(-3, 4)$. ③ а) $[4, 8]$; б) $[-3, 4)$. ④ а) $\left(-\frac{1}{2}\ \ \frac{4}{3}\right)$; б) $(2, 4)$.

13 ① Линеарни функции се под: в), г) и д). ② а) $y = -2x + 3$; б) $y = -x + 2$; в) $y = -2x$; г) $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. ③ а) $k = 2$ и $n = -3$; б) $k = 2$ и $n = 0$; в) $k = -\frac{1}{3}$ и $n = 3$; г) $k = -\frac{1}{2}$ и $n = 0$. ④ а) $x = 2$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = \frac{5}{2}$; г) $x = 0$. ⑤ $k = \frac{3}{2}$. ⑥ $k = 3$ и $n = 6$.

14 ① Точките A и D. ② За $x = 1$.

③ $y = 3x$

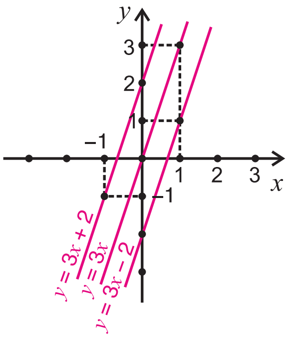
x	0	1
y	0	3

$y = 3x + 2$

x	0	–1
y	2	–1

$y = 3x - 2$

x	0	1
y	–2	1



④ (2, 0). ⑤ $n = 5$. ⑥ $k = 2$.

15 ① Функцијата $y = 3x - 2$.

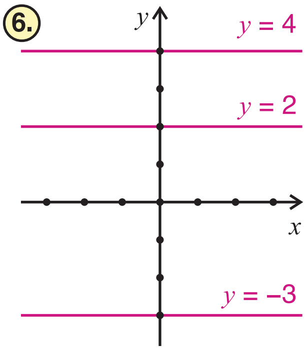
② $k = -3$.

③ $k = 2$ и $n = -3$.

④ $n = -1$.

⑤ $k = -2$ и $n = 2$.

⑥



16 ① Под а) и г). ② Под б) и г).

③ а) растечка за $k = \frac{1}{3}$ и $k = 3$; б) опаднувачка за $k = -2$ и $k = -\frac{1}{2}$.

④ а) $y = 4x - 1$

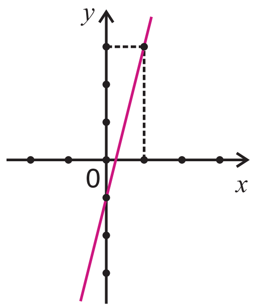
x	0	1
y	−1	3

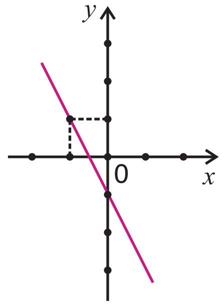
функцијата $y = 4x - 1$ е растечка.

б) $y = -2x - 1$

x	0	−1
y	1	1

функцијата $y = -2x - 1$ е опаднувачка.





⑤ а) $y = -3x + 1$

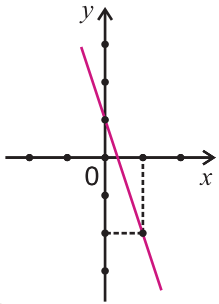
x	0	1
y	1	−2

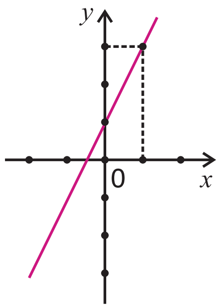
функцијата $y = -3x + 1$ е опаднувачка.

б) $y = 2x + 1$

x	0	1
y	1	3

функцијата $y = 2x + 1$ е растечка.





⑥ Од P(0, 2), $n = 2$. Од A(1, −1) имаме: $-1 = 1\cdot k + 2$, од каде што $k = -3$; функцијата е опаднувачка.

17 ① а) $y = x - 2$

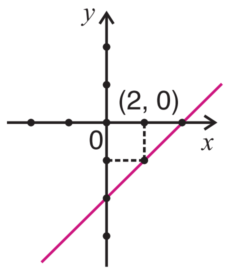
x	0	1
y	−2	−1

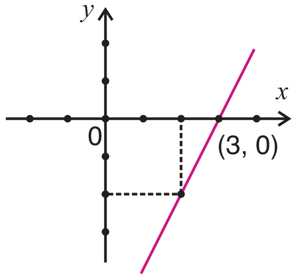
$x = 2$

б) $y = 2x - 6$

x	2	3
y	−2	0

$x = 3$



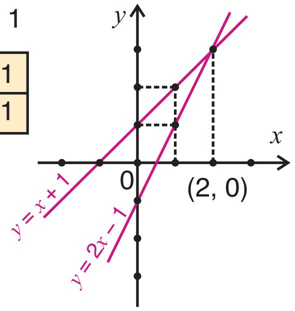


② а) $y = x + 1$ $y = 2x - 1$

x	0	1
y	1	2

x	0	1
y	−1	1

$x = 2$

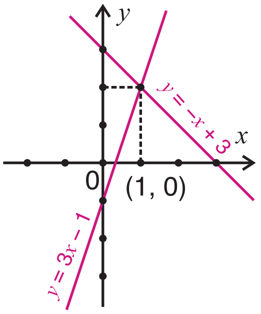


б) $y = 3x - 1$ $y = -x + 3$

x	0	1
y	−1	2

x	0	1
y	3	2

$x = 1$



③ $k = 2$. ④ $k = 2$ и $n = 3$.

Обиди се... 8 косачи.

Помош. Ако плоштината на големата ливада е означена со А, а малата со В, тогаш А = 2В. Нека k е бројот на косачите. За да се покоси А се потребни $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}$ работни денови, а за В: $\frac{x}{4}+1$.

Од А = 2В се добива равенката $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=2\left(\frac{x}{4}+1\right)$.

Оттука $x = 8$.

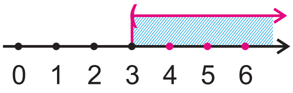
18 ① г, в, б, а. ② $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; 1; 0. ③ а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{1}{6}$; 5 картички; обиди се: 3 пати.

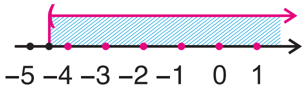
Тест: **1.** Да. **2.** б). **3.** а) $x = 2{,}1$; б) $x = 1$; в) $x = 3$. **4.** $a = 3$. **5.** Нека тие броеви се: x, $x + 1$ и $x + 2$. Имаме: $x + x + 1 + x + 2 = 84$, т.е. $x = 27$. Бараните броеви се: 27, 28 и 29.

6. Ако времето на движење на камионот е x, тогаш на лесната кола е $x - 2$. Двете возила поминале ист пат. Оттука имаме: $50x = 75(x - 2)$, т.е. $x = 6$ часа, а $\overline{AB} = 6 \cdot 50 = 300$ km. **7.** Да.

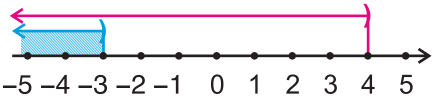
8. $2x - 1 > x - 2 \Leftrightarrow 3x + 1 > 2x - 3$, во D.

9. а) $(3, +\infty)$ б) $(-\frac{9}{2}, +\infty)$

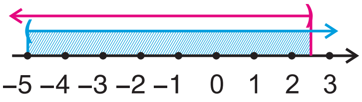




10. а) $(-\infty, -3)$



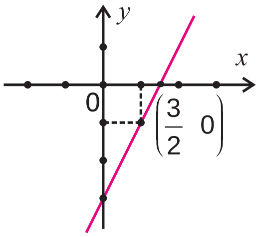
б) $(-5; 2{,}5)$



11.

x	0	1
y	−3	−1

$x = \frac{3}{2}$



12. A и C. **13.** $n = -3$. **14.** Растечки се функциите: $y = 2x - 3$ и $y = 3x - 2$, а опаднувачки се: $y = -3x + 1$ и $y = -x - 1$.

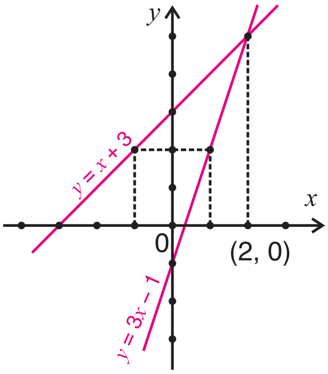
15. $y = 3x - 1$

x	0	1
y	−1	2

$y = x + 3$

x	0	1
y	−1	2

$x = 2$



ТЕМА 3. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

1 **1.** а) Коефициенти; 2, −1, 3; непознати: x, y.
б) Коефициенти: 2, 6, 1; непознати: x, y.
в) Коефициенти: 1, −2, −1; непознати: y, z.
г) Коефицинети: 5, 3, 16; непознати: u, v.

2. а) да; б) не. **3.** а) −1; б) $\frac{1}{2}$; в) 5. **4.** б).

5. (−2, 3); (−1, 1); (0, −1); (1, −3); (2, −5).

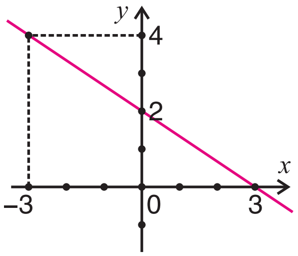
6. $x + 3y = -3$.

2 **1.** а) $\{(k, 3 - 2k) \mid k \in \mathbf{R}\}$; б) $\left\{\left(k\ \frac{1-2k}{6}\right)\ k \in \mathbf{R}\right\}$.

2. а) $x + 3y = -3$; б) $2x + 3y = 5$; в) $-13x + 5y = 24$; г) $19x + 33y = 124$.

3. а) $\left\{\left(k\ \ 2-\frac{2}{3}k\right)\ k \in \mathbf{R}\right\}$;

x	−3	0	3
y	4	2	0



б) $\{(k, 2k - 6) \mid k \in \mathbf{R}\}$;

x	−1	0	3
y	−8	−6	0

в) $\{(2, k) \mid k \in \mathbf{R})\}$; графикот е права паралелна со y–оска. **4.** $p = -2$.

3 **1.** а) Коефициенти: 2, 0, 6 и 0, 1, 2; непознати: x, y; б) Коефициенти: 1, 2, 0, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ 2; непознати: x, y; в) Коефициенти: 0,25; 0,04; 0; 4; 25; 641; непознати: x, y. **2.**

- $\begin{cases} x + y = 64 \\ x - y = 17; \end{cases}$
- $\begin{cases} \beta - \gamma = 18 \\ 52 + \beta + \gamma = 180; \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 440 \\ x - 180 = y + 180. \end{cases}$

3. а) да; б) да; в) не. **4.** На пример:

а) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2 \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x + 3y = 12. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y = 0. \end{cases}$

6. а) $(x, y) = (-2, 4)$; б) $(x, y) = (-3, 3)$.

7. Годините на Бојан се x, а на Дејан y; $\begin{cases} x+y=16 \\ x+\dfrac{y}{2}=12; \end{cases}$

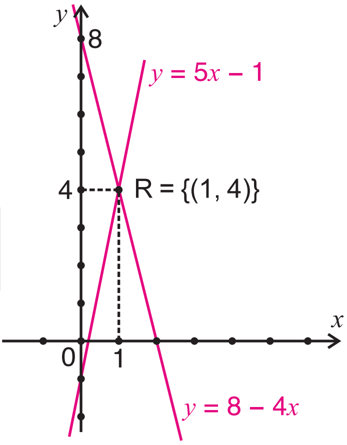
Бојан и Дејан се близнаци.

4 **1.** а) $y = 8 - 4x$

x	–2	0	1	2
y	16	8	4	0

$y = 5x - 1$

x	–2	0	1	2
y	–11	–1	4	9



2. а) Едно решение: $(x \;\; y)=\left(\dfrac{2}{3} \;\; \dfrac{1}{3}\right)$; б) бесконечно многу; в) едно решение: $(x, y) = (2, 2)$; г) едно решение: $(x, y) = (-2, 1)$. **3.** а) Графиците се паралелни прави; б) графиците се прави што се сечат; в) графиците се прави што се сечат; г) графиците се прави што се совпаѓаат.

5 **1.** а) $(x, y) = (2, 4)$; б) $(x, y) = (10, 5)$; в) $(x, y) = (0, 7)$. **2.** а) $(x, y) = (5, 3)$; б) $(x, y) = (4, 3)$; в) $(x, y) = (4, 1)$. **3.** а) $(x, y) = (1, 0)$; б) $(z, y) = (-1, 1)$. в) $(x, y) = (3, -1)$. **4.** а) $(x, y) = (7, -5)$; б) $(x, y) = (4, 12)$. **5.** а) $(x, y) = (-3, -1)$; б) $(x, y) = (-13, -1)$.

6 **1.** $(x, y) = (3,-2)$; $(x \;\; y)=\left(-7 \;\; -\dfrac{17}{3}\right)$.

2. $(x \;\; y)=\left(\dfrac{1}{2} \;\; -2\right)$; $(x, y) = (12, 4)$. **3.** $(x, y) = (5, 2)$. **4.** $(x, y) = (7, -2)$. **5.** $(x, y) = (6, 12)$; $(x, y) = (12, 12)$.

6. $(x, y) = (-2, -2)$; $(x, y) = (-4, -3)$.

7. а) $(x, y) = (3, 1)$; б) Нема решение; в) Бесконечно многу решенија.

7 **1.** $\begin{cases} x+y=72 \\ x-y=2 \end{cases}$; првиот број е 37, а вториот број е 35. **2.** Ознаки M–момчиња, D–девојчиња. $\begin{cases} \mathrm{M}+\mathrm{D}=28 \\ \mathrm{M}=\mathrm{D}+4 \end{cases}$ $\mathrm{R}=\{16 \;\; 12\}$. **3.** Брзината на бродот е 16,8 km/h, а на реката 4,2 km/h.

4. Топлата вода има 80 °C, а ладната 10 °C.

5. Јован купил 3 големи и 5 мали тетратки.

6. Мајката има 32 години, а ќерката 5 години.

7. Остриот агол има 72°, а тапиот 108°.

8. $P = 60\text{ cm}^2$. Состави систем и определи ги должините на страните. Преку Питагоровата теорема одреди ја висината. **9.** Фазани има 23, а зајаци има 12.

Тест: **1.** Секој подреден пар од реални броеви за кои равенката поминува во точно бројно равенство. **2.** $k = 1$. **3.** Нацртај график според табелата:

x	–2	0	1	2
y	–8	0	4	8

4. Подреден пар од реални броеви кој е решение на двете равенки.

5. $\begin{cases} 4x-y=-20 \\ x-2y=11. \end{cases}$ **6.** Нацртај графици на равенките. Одреди ги координатите на нивниот пресек $R = \{(1, 3)\}$. **7.** $(x, y) = (2, 3)$.

8. $(x, y) = (-7, 1)$. **9.** а) едно; б) бесконечно многу. **10.** Таткото има 34 години, а синот 12 години.

ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

1 **1.** а) A, B, C, D; б) A, B, C, B_1. **2.** 1.

3. $A_1B_1C_1D_1$ и CDD_1C_1. **4.** $A_1B_1C_1D_1$.

2 **1.** Една или три. **2.** а) AB_1 и BA_1, AB_1 и CB_1, BA_1 и BC_1, BC_1 и CB_1; б) ни еден; в) AB_1 и BC_1, BA_1 и CB_1. **3.** Ни една, ако се разминуваат; само една ако се паралелни или се сечат.

4. Некомпланарните точки A, B, C, D, определуваат четири рамнини: ABC, ABD, ACD и BCD.
5. AB и AC се сечат, па според тоа тие определуваат единствена рамнина Σ на која лежат сите точки од правата AB и сите точки од правата CD.

3 **2.** Само една. **3.** а) да; б) да; в) да.
5. Σ_1 и Σ_2: или се совпаѓаат или се сечат со пресечна права AB.

4 **2.** в). **3.** Не. **4.** Не. A', B', C' се колинеарни и кога рамнината определена со неколинеарните точки A, B, C е паралелна со проектирачкиот правец s. **5.** Направи цртеж и разгледај го трапезот ABB'A'. CC' е средна линија на тој трапез. Зошто? **6.** Да, ако рамнината определна со M и a е паралелна со s.

5 ***Обиди се...*** а) 1; б) 6; в) 12; г) 8; д) 0.

6 **1.** 7; правоаголници. **2.** $n + 2$. **3.** $2s = r$.
4. Да. **5.** а) Не; б) да, шестаголна; в) да, единаесетаголна. **6.** а) Ниедна; б) 2; в) 3.

7 **1.** а) 17,08 dm²; б) 37,5 cm². **2.** $a = 7$ cm, $d = 7\sqrt{3}$ cm. **3.** 8 cm. **4.** а) $B = 20{,}25$ dm²; $M = 151{,}2$ dm²; $P = 191{,}7$ dm². б) $B = 144$ cm²; $H = 9$ cm; $P = 720$ cm². в) $B = 64$ cm²; $M = 352$ cm²; $H = 11$ cm. г) $a = 7$ cm; $M = 336$ cm²; $P = 434$ cm². д) $a = 9$ cm; $M = 180$ dm²; $H = 5$ dm. ѓ) $a = 6{,}5$ dm; $B = 42{,}25$ dm²; $P = 292{,}5$ dm². е) $P = 192$ dm²; $a = 6$ dm; $H = 5$ dm. ж) $B = 81$ cm²; $a = 9$ cm; $H = 5$ cm. **5.** Деветпати. **6.** б) $B = 4\sqrt{3}$; $H = 9$; $P = 8\sqrt{3} + 108 \approx 121\,84$. в) $B = 36\sqrt{3}$; $M = 144\sqrt{3}$; $H = 4\sqrt{3}$. д) $a = 6$; $H = 15$; $P = 18\sqrt{3} + 270 \approx 301\,14$. ѓ) $a \approx 10$; $H \approx 8$. **7.** 288 cm². **8.** 1, 3, 6 и 7.
Обиди се... Пајакот ќе најде пат до мувата. На мрежата од призмата повлечи отсечка МП.

8 **1.** 27 cm³. **2.** 4 dm. **3.** 6 cm. **4.** 112 cm³.
5. 1 152 cm³. **6.** 96 cm². **7.** ≈ 5,8 m. **8.** 48 cm³.

9 **1.** 8 dm. **2.** $240\sqrt{3}$ cm³. **3.** 2 400 cm³; 1 280 cm². **4.** 640 dm³. **5.** а) $72\sqrt{3}$ cm³; б) $a^3\sqrt{3}$. **6.** ≈ 13,5 cm. **7.** 33 600 m³. **8.** а) $B = 25$, $H = 8$, $P = 210$, $V = 200$. б) $B = 9$, $H = 4$, $M = 48$, $V = 36$. в) $P = 240$, $a = 6$, $H = 7$, $V = 252$. г) $a = 11$, $B = 121$, $M = 616$, $P = 858$. д) $a = 13$, $B = 169$, $P = 1118$, $V = 2535$. ѓ) $H = 8$, $a = 5$, $B = 25$, $P = 210$.

10 **1.** 4; тетраедар. **2.** $\left(150\sqrt{3} + 390\right)$ cm².
3. 2,5 dm. **4.** 3 cm. **5.** ≈ 101,1 cm². **6.** 25 dm².
7. а) $B = 144$; $M = 240$; $P = 384$; $H = 8$. б) $B = 196$; $h = 25$; $M = 700$; $P = 896$. в) $P = 800$; $a = 16$; $h = 17$; $H = 15$. г) $a = 40$; $B = 1600$; $M = 2320$; $P = 3920$. д) $M = 738$; $a = 9$; $h = 41$; $H \approx 40{,}75$. ѓ) $B = 784$; $a = 28$; $h = 50$; $H = 48$.

11 **1.** 1920 cm³. **2.** 96 cm². **3.** 1 536 cm²; 3 072 cm³. **4.** 24 cm; 1440 cm². **5.** 360 dm³.
6. 27 cm; ≈ 491,2 cm². **7.** а) $s = 26$, $V = 1200\sqrt{3}$. б) $a = 7$; $H = 24$. в) $h \approx 24{,}8$; $V = 588\sqrt{3}$. г) $a = 7$, $s = 25$.

12 **1.** 312π cm²; 720π cm³. **2.** а) 600π cm²; 2 000π cm³. б) 6π dm²; 2π dm³. **3.** ≈ 20 cm.
4. 66π cm²; 72π cm³. **5.** 6 750π cm³. **6.** $b : a$.

13 **1.** 90π cm²; 100π cm³. **2.** ≈ 1 130,4 cm²; ≈ 2 512 cm³. **3.** а) ≈ 34,2 cm²; б) ≈ 63,8 cm³; в) ≈ 67,36 cm². **4.** 27π cm²; $9\pi\sqrt{3}$ cm³.
5. 600π cm². **6.** 10 cm.

14 **1.** 144π cm²; 288π cm³. **2.** ≈ 1 256 cm²; ≈ 4 186,7 cm³. **3.** 8 cm. **4.** (500 : 3)π cm³; 25π cm².
5. $R = 3$ cm; $P = 36\pi$ cm². **6.** $R_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $R_2 = \frac{a}{2}$; $P_1 : P_2 = 3 : 1$, $V_1 : V_2 = 3\sqrt{3} : 1$. **7.** Волуменот V на отпадокот е: $V = V_К - V_Т = 4^3 - \frac{4}{3} \cdot 2^3\pi = 64 - 32 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 30{,}5$; $V \approx 30{,}5$ cm³; ≈ 48%. **8.** а) $a \approx 13$ пати. б) ≈ 49 пати.

Тест: **1.** а) D_1; б) A_1. **2.** а) не; б) не; в) да.
3. а) да; б) да; в) не. **5.** $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. **7.** а) 9; б) 12; в) 18; г) $3n$. **8.** 8 cm. **9.** 11 cm.
10. $10\left(5\sqrt{3} + 18\right)$ cm² $150\sqrt{3}$ cm³. **11.** 500 cm², 600 cm³. **12.** $18\sqrt{3}$ cm³. **13.** 360 cm², 400 cm³.
14. 300 ℓ. **15.** 90π cm², 100π cm³.
16. 225π cm², 562,5π cm³.

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИ

Издавач:
МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И
НАУКА НА РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА
ул. Мито Хаџи – Василев Јасмин, бб
Скопје

Рецензенти:
Д–р Јорданка Митевска, редовен професор на ПМФ – Скопје
Жанета Шумкоска, професор во ОУ „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје
Агим Букла, професор во ОУ „Пашко Васа“ – Групчин

Со Решение на Министерот за образование и наука на
Република Македонија број од година,
се одобрува употребата на овој учебник.

Јово Стефановски, Д-р Наум Целакоски

Рецензенти:
Д-р Јорданка Митевска, редовен професор на ПМФ - Скопје
Жанета Шумкоска, професор во ОУ „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
Агим Букла, професор во ОУ „Пашко Васа“ - Групчин

Уредник на изданието:
Јово Стефановски

Јазичен лектор:
Сузана Стојковска

Компјутерска обработка и дизајн:
Драган Шопкоски

Коректура:
Авторите

Подготовка за печат:
Јово Стефановски, Драган Шопкоски

Издавач:
Министерство за образование и наука за Република Македонија

Печати:
Графички центар дооел, Скопје

Тираж:
16.600

Со решение на Министерот за образование и наука на Република Македонија бр.22-2321/1 од 21.04.2010 година се одобрува употребата на овој учебник

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека “Св.Климент Охридски” , Скопје
373.3.016:51 (075.2)=163.3
СТЕФАНОВСКИ, Јово
Математика за осмо одделение : осумгодишно основно образование / Јово Стефановски, Наум Целакоски . - Скопје : Министерство за образование и наука на Република Македонија, 2010.
- 219 стр. : илустр. ; 25 см
ISBN 978-608-4575-88-7
1. Целакоски, Наум [автор]
COBISS.MK-ID 84078858