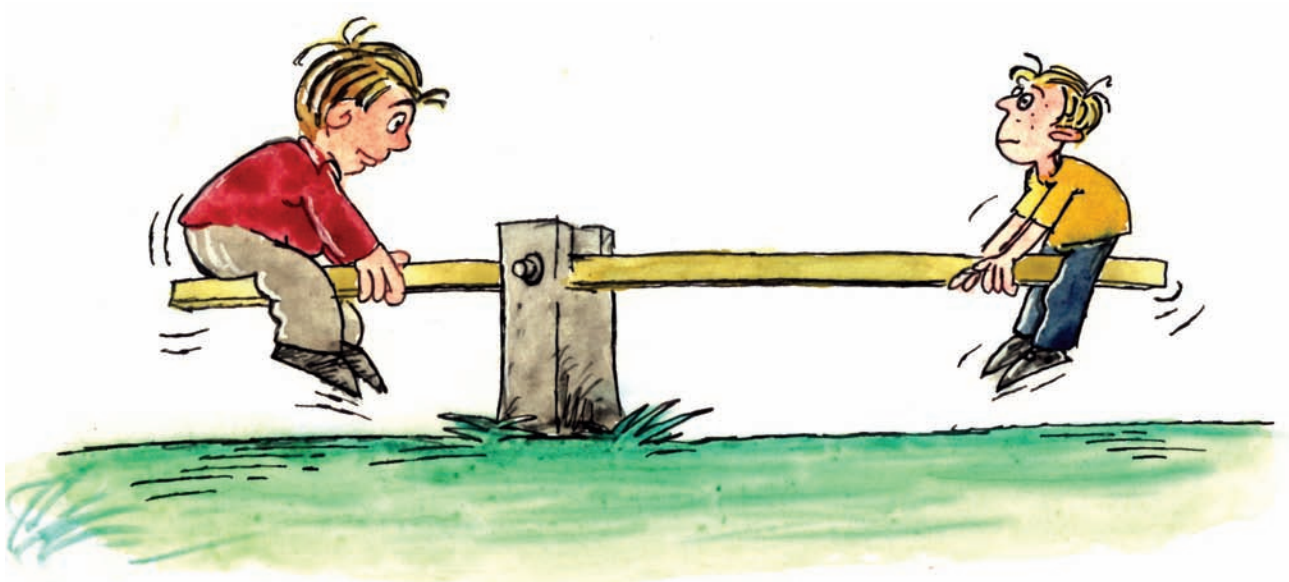


ЈОВО СТЕФАНОВСКИ
НАУМ ЦЕЛАКОСКИ

МАТЕМАТИКА

СЕДМО ОДДЕЛЕНИЕ

*Осумгодишно основно
образование*



ОСМО ОДДЕЛЕНИЕ

*Деветгодишно основно
образование*

2009
Скопје

Драг ученику!

Оваа книга ќе ти помогне да ги изучиш предвидените содржини во програмата. Ќе учиш нови интересни содржини за вектори, транслација и ротација. Ќе сфатеш важни знаења за синуси, корени и полиноми. Ќе ги прошириш знаењата по геометрија. Ќе пресметуваш плошина на фигури. Ќе сфатеш нови сознанија за функција и пропорционалност.

Книгата е поделена на пет тематски целини, а секоја од нив е поделена на поглавја.

Тематските целини започнуваат со содржина, а наставните единици во нив се нумерирани.

Во наставните единици има ознаки во боја и преку нив се истакани пораки, активности, обврски и други суштествени, и тоа:

Поисети се!

Наставните единици започнуваат со нешто што ти е познато. Треба да се поспомени и да ги решиш дадените барања. Тоа ќе ти користи при изучувањето на новото во лекцијата.



Со овие ознаки наставната единица е поделена на делови (порции) кои се однесуваат на новите поими.

1.

Со ваквите ознаки се означени активности, прашања и задачи што ќе ги решаваш самостојно или со помош на твојот наставник. Во овој дел го учиш новото во лекцијата, затоа треба да бидеш внимателен и активен за подобро да го научиш и разбереш. Најбитното е обоено со жолта боја.

2.

...

Треба да знаеш:

Најбитното од лекцијата е издвоено во вид на прашања, задачи или тврдења. Тоа треба да го паметиш и користиш во задачи и практични примери.



Провери се!

Овој дел содржи прашања и задачи со кои можеш да се провериш дали поголемиот дел од изученото го разбираш за да можеш да го применуваш и користиш во секојдневниот живот.

Задачи

Треба редовно и самостојно да ги решаваш овие задачи. Со тоа подобро ќе го разбереш изученото, а тоа ќе ти биде од голема полза.

Обиди се ...

Пошруди се да ги решаваш задачите и проблемите во овој дел (ова не е задолжително). Со тоа ќе знаеш повеќе и ќе бидеш побогат со идеи.



ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

На крајот од секоја тема имаш тест од прашања и задачи. реши го самостојно тестот и со тоа ќе ги провериш твоите знаења од изучената тема.

Кога ќе најдеш на шешкој при изучувањето на математиката не откажувај се, обиди се повторно, а уорноста ќе ти донесе резултат и задоволство.

Ќе не радува ако со оваа книга ја засакаш математиката повеќе и постигнеш одличен успех.

Од авторите

ВЕКТОРИ. ОПЕРАЦИИ СО ВЕКТОРИ

1. Насоченост на полуправите. Насока	4
2. Вектори	7
3. Еднаквост на вектори	11
4. Собирање на вектори	14
5. Одземање на вектори	19

ТРАНСЛАЦИЈА

6. Транслација	22
7. Својства на транслацијата	24
8. Примена на транслацијата	27
Провери го твоето знаење	30

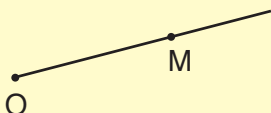


ВЕКТОРИ. ОПЕРАЦИИ СО ВЕКТОРИ

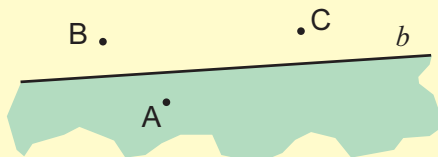
1 НАСОЧЕНОСТ НА ПОЛУПРАВИТЕ. НАСОКА

Поисети се!

- Нацртај права a и на неа означи точка O .
- Точката O ја дели правата a на два дела или две множества.
- Како се вика делот од правата кој ја содржи точката O и еден од двата дела на кои е разделена правата a со точката O ?
- На цртежот е нацртана полуправата OM со почетна точка O и произволна точка M .



- Нацртај полуправи AB и AC , така што точките A , B и C не лежат на иста права.
- Нацртај права a и на неа означи точки M и N . Што претставува пресекот на полуправите MN и NM ?
- Со правата b на цртежот рамнината е поделена на две полурамнини, од кои едната е обоена.



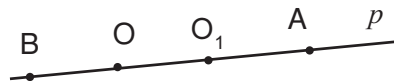
- Кои од означените точки лежат во иста полурамнина?
- Што е правата b за полурамнината?

2. Разгледај го цртежот; воочи ги паралелните прави a и b и на нив означените полуправи OA , O_1B и O_1C .

- Кои од полуправите лежат во иста полурамнина со гранична права OO_1 ?



1. На правата p воочи ги полуправите OA , O_1A , OB и O_1B .



- Која полуправа е подмножество на полуправата OA ?
- Која полуправа е подмножество на полуправата O_1B ?

Воочив дека:

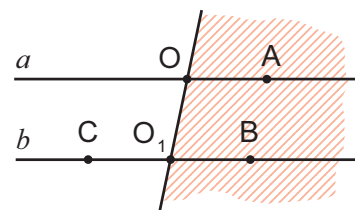
- Сите точки на полуправата O_1A припаѓаат на полуправата OA , т.е. $O_1A \subseteq OA$.
- Сите точки на полуправата OB припаѓаат на полуправата O_1B , т.е. $OB \subseteq O_1B$.



- За полуправите OA и O_1A велиме дека се **истонасочени**. И полуправите OB и O_1B се **истонасочени**.

- За полуправите OA и O_1B велиме дека се **спротивнонасочени**. И полуправите OA и OB се **спротивнонасочени**.

- Истонасочените полуправи ќе ги означуваме со знакот „ $\uparrow\uparrow$ “, а спротивнонасочените со знакот „ $\uparrow\downarrow$ “. Пример: $OA \uparrow\uparrow O_1A$; $OA \uparrow\downarrow O_1B$.





Воочив дека полуправите OA и O_1B лежат во иста полупрамнина со гранична права OO_1 .

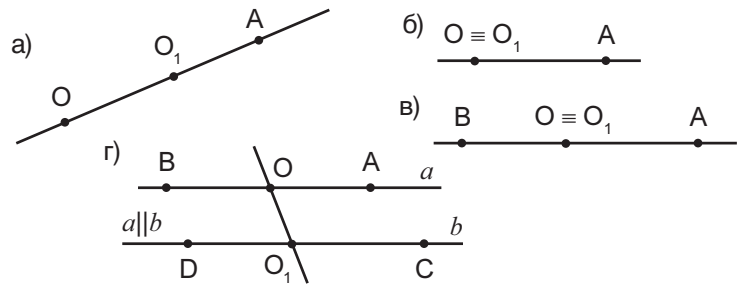
- За полуправите OA и O_1B велиме дека се **истонасочени**, т.е. $OA \uparrow \uparrow O_1B$.
- Полуправите OA и O_1C не лежат во иста полупрамнина со гранична права OO_1 и за нив велиме дека се **спротивнонасочени**, т.е. $OA \uparrow \downarrow O_1C$.

Важно и интересно

- За две полуправи велиме дека се **истонасочени** (или: имаат **иста насока**) ако лежат на една права и едната е подмножество од другата или ако лежат на паралелни прави и припаѓаат на иста полупрамнина со гранична права низ нивните почетни точки.
- За две полуправи кои лежат на иста права или на паралелни прави и не се истонасочени велиме дека се **спротивнонасочени** (или: имаат **спротивни насоки**).

3. Одреди како се насочени:

- а) полуправите OA и O_1A ;
- б) полуправите OA и O_1A ;
- в) полуправите OB и O_1A ;
- г) полуправите OB и O_1D ; O_1D и O_1C ; OB и O_1C .



Ова ти е познато

- На цртежот има сообраќајни знаци кои означуваат насока.



- Објасни што покажува секој од знаците.
- Зборот насока често го употребуваме; на пример: „ветерот дува во северна насока”, „авионот лета во насока Скопје – Охрид”, итн.



4. Нацртај полуправа OA и потоа:

- Нацртај две полуправи O_1A_1 и O_2B_2 истонасочени со полуправата OA .
- Како се насочени полуправите O_1A_1 и O_2B_2 ?
- Колку полуправи може да се конструираат во рамнината истонасочени со полуправата OA ?

■ Заклучив дека во рамнината постојат бесконечно многу полуправи истона-
сочени со дадената полуправа OA.

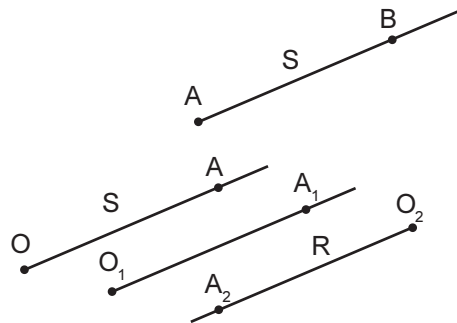


■ Множеството S од една полуправа и сите истонасочени полуправи на неа во рамнината се вика **насока**.

■ Насоката S ја претставуваме со една полуправа AB од множеството истонасочени полуправи и велиме полуправата AB има насока S.

5. Дадени се полуправите OA, O_1A_1 и O_2A_2 , така што $OA \uparrow \uparrow O_1A_1$; $O_1A_1 \uparrow \downarrow O_2A_2$. Со полуправата OA е определена насоката S, а со полуправата O_2A_2 насоката R.

● Што е точно: $O_1A_1 \in S$; $O_1A_1 \in R$?



Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш кои две полуправи имаат иста насока, односно спротивна насока;
- ◆ да објасниш што е насока и со што се претставува насока.

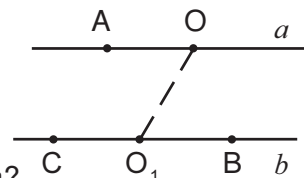


Провери се!

▲ На цртежот правите a и b се паралелни.

Кои од полуправите OA, O_1C и O_1B :

- се истонасочени;
- се спротивнонасочени;
- определуваат иста насока?



Задачи

1. Каква фигура може да биде пресекот на:
 - а) две истонасочени полуправи што лежат на една права;
 - б) две спротивнонасочени полуправи што лежат на една права?
2. Каква фигура може да биде унијата на:
 - а) две истонасочени полуправи што лежат на една права;
 - б) две спротивнонасочени полуправи што лежат на една права?
3. Нацртај правоаголник ABCD и нека O е пресечната точка на неговите дијагонали. Кои од полуправите: AB, DC, BA, AO, OC и DB се:
 - а) истонасочени;
 - б) спротивно насочени?
4. На правата a се дадени полуправите OA, O_1A и O_2A , такви што $OA \uparrow \uparrow O_1A$, а $O_1A \uparrow \downarrow O_2A$. Како се насочени полуправите OA и O_2A ?

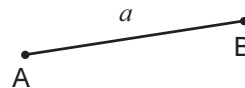
2 ВЕКТОРИ

Појсијте се!

- Со записот (a, b) означуваме **подреден пар**.
- Во подредениот пар точно се знае кој е прв, а кој втор елемент.
- За подредениот пар точки, (A, B) , точката A е прва компонента, а точката B е втора компонента.
- Нека подредениот пар $(5, 8)$ означува петти ред и осмо седиште во една кино сала. Дали подредениот пар $(8, 5)$ означува исто седиште?



1. Нека A и B се крајните точки на отсечката a .



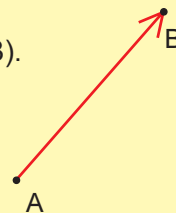
- Кое од следните тврдења е точно:
 - а) $\overline{AB} = \overline{BA}$;
 - б) AB и BA е истата отсечка;
 - в) $\{A, B\} = \{B, A\}$;
 - г) $(A, B) = (B, A)$?

Воочив дека:

- тврдењата под а), б) и в) се точни;
- тврдењето под г) не е точно, бидејќи кај подредените парови важи: $(A, B) \neq (B, A)$, кога $A \neq B$.

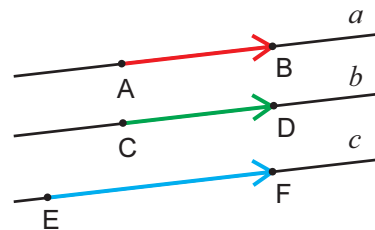


- Отсечката AB на која едната крајна точка се зема за почеток, а втората точка за крај се вика **насочена отсечка** и се означува со \overrightarrow{AB} .
- Крајните точки на насочената отсечка \overrightarrow{AB} претставуваат подреден пар (A, B) .
- Насочената отсечка \overrightarrow{AB} , на цртеж, се претставува со стрелка од почетната точка A кон крајната точка B .
- Точката A се вика **почеток**, а точката B **крај** на насочената отсечка \overrightarrow{AB} .



2. На цртежот полуправите AB , CD и EF лежат на паралелните прави a , b и c .

- Како се насочени полуправите: AB , CD и EF ?
- Спореди ги должините на отсечките: AB и CD ; AB и EF .
- Воочи ги насочените отсечки \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{EF} и во наредното исказување потруди се да сфатиш за кои две насочени отсечки се вели дека се еднакви.

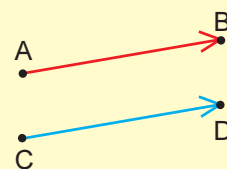


- Воочив дека полуправите AB , CD и EF се истонасочени; ■ $\overline{AB} = \overline{CD}$; $\overline{AB} < \overline{EF}$.

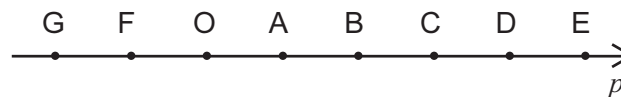


- Насоката што ја определува полуправата AB се вика **насока** на насочената отсечка \overrightarrow{AB} . Според тоа, насочените отсечки \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{EF} се истонасочени.
- Должината на отсечката AB се вика **должина** (или **интензитет**) на насочената отсечка \overrightarrow{AB} ; се означува со $|\overrightarrow{AB}|$. Според тоа, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$, а $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{EF}|$.
- Насочена отсечка чијшто почеток се совпаѓа со крајот (\overrightarrow{AA} , \overrightarrow{BB} , ...) се вика **нултна насочена отсечка**. Таа нема одредена насока, а нејзината должина е нула.

■ Насочените отсечки \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} се **еднакви**, ако имаат еднаква должина и иста насока, т.е. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$. Запишуваме: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



3. Нека точката O се помести за четири единици надесно по правата p , каде што $\overrightarrow{OA} = 1$.



- Во која точка ќе се помести, т.е. ќе се преслика точката O на правата p ?

Воочив дека точката O ќе се помести (ќе се преслика) во точката D .

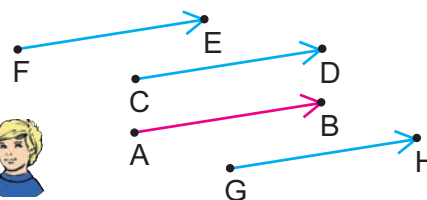


Точката O е почетна, а точката D крајна во ова поместување. Што претставуваат точките O и D ?

Точките O и D се крајни точки на насочената отсечка \overrightarrow{OD} . Тие претставуваат подреден пар (O, D) .



- Ова поместување на точка во рамнината е извршено во одредена насока и на одредено растојание. На цртеж, него го претставуваме со насочената отсечка \overrightarrow{OD} .
- Нека е претставена една насочена отсечка \overrightarrow{AB} . Колку насочени отсечки еднакви на \overrightarrow{AB} постојат?



Можам да нацртам многу насочени отсечки еднакви на \overrightarrow{AB} , а има бесконечно многу што се еднакви на неа.

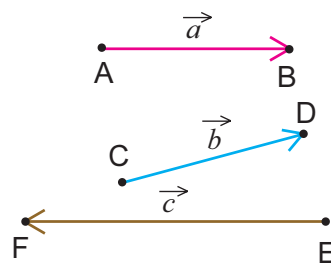


Воочи и зайомни!

- Множеството од една насочена отсечка и сите насочени отсечки еднакви на неа се вика **вектор**.
- Множеството од сите нулти насочени отсечки се вика **нулти вектор**.

Ова е важно!

- Векторот на цртеж ќе го претставуваме со една насочена отсечка, т.е. со еден претставник од множеството еднакви насочени отсечки.
Според тоа, **насочената отсечка** ќе ни претставува **вектор**.

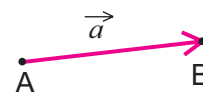


- Векторот ќе го означуваме со \overrightarrow{AB} или со мала буква и стрелка над неа. На цртежот се дадени векторите: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{EF} = \vec{c}$.

4. Означи четири точки A, B, C и D. Претстави ги векторите: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

- Тоа што го научи за насочените отсечки, може да се искаже и за векторите.

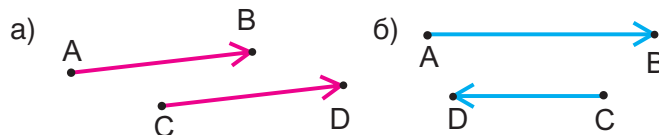
- Нека е даден вектор \vec{a} со насочената отсечка \overrightarrow{AB} .
Насоката на насочената отсечка \overrightarrow{AB} претставува **насока** на векторот \vec{a} .



- Должината на насочената отсечка \overrightarrow{AB} се вика **должина** (или **интензитет**) на векторот \vec{a} и се означува со $|\vec{a}|$ или со $|\overrightarrow{AB}|$.

5. Нацртај два вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , така што тие да се:
а) истонасочени; б) спротивнонасочени.

- Векторите \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} во барањата а) и б) можеш да ги претставиш како на цртежот.

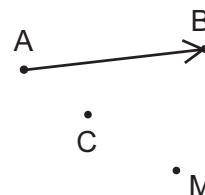


Забележав дека: насоката на вектор се определува на ист начин како и кај насочените отсечки, бидејќи вектор се претставува со насочена отсечка.



6. Нацртај вектор \overrightarrow{AB} и означи точки C и M (како на цртежот).

- Нацртај вектор \overrightarrow{CD} така што $\overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$.
- Нацртај вектор \overrightarrow{MN} така што $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$.



Воочи и зайомни!

- За векторите што имаат иста насока или спротивна насока велиме дека се **колинеарни**, т.е. векторите \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} се **колинеарни**, ако $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ или $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.
- За колинеарните вектори велиме дека имаат **ист правец**.

7. Нацртај два колинеарни вектори \vec{a} и \vec{b} , така што тие да лежат:

- на паралелни прави и $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$;
- на паралелни прави и $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;
- на иста права и $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;
- на иста права и $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, $|\vec{a}| = 3 \text{ cm}$, $|\vec{b}| = 5 \text{ cm}$.

■ Нулта насочена отсечка претставува **нулти вектор**; тој се означува со $\vec{0}$.

■ Нултиот вектор го сметаме за колинеарен со секој друг вектор и со должина еднаква на нула.

Треба да знаеш:

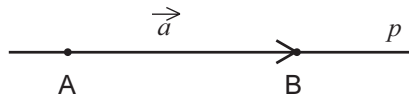
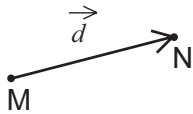
◆ да објасниш што е насочена отсечка и што е вектор;

◆ да одредиш (и објасниш за) вектори со: иста насока, спротивни насоки и колинеарни вектори.



Провери се!

▲ На цртежот правата p е паралелна со правата q . Кои вектори се претставени на цртежот?



- Каква насока имаат векторите: \vec{a} и \vec{b} ; \vec{a} и \vec{c} ; \vec{b} и \vec{c} ?
- Дали векторите \vec{a} и \vec{d} се колинеарни? Зошто?
- Дали векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} се колинеарни? Зошто?

Задачи

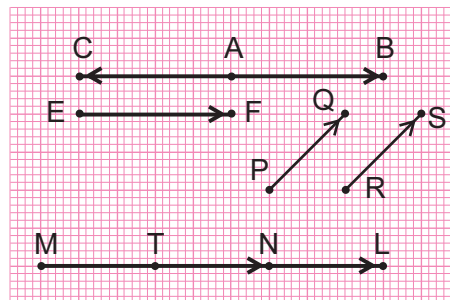
1. Запиши ги векторите што се определени со подредените парови точки: (A, B), (C, D), и (E, F).

2. Познато е дека векторите \vec{AB} и \vec{CD} се колинеарни. Дали се колинеарни векторите:

- \vec{AB} и \vec{DC} ;
- \vec{BA} и \vec{DC} ?

3. На цртежот се дадени вектори во квадратна мрежа. Како се насочени векторите?

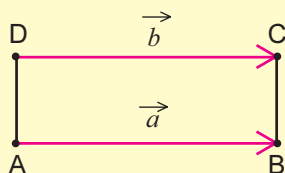
- а) \vec{AB} и \vec{AC} ;
- б) \vec{AB} и \vec{EF} ;
- в) \vec{AC} и \vec{EF} ;
- г) \vec{PQ} и \vec{RS} ;
- д) \vec{MN} и \vec{TL} ;
- ѓ) \vec{EF} и \vec{PQ} ?



3 ЕДНАКВОСТ НА ВЕКТОРИ

Појсетти се!

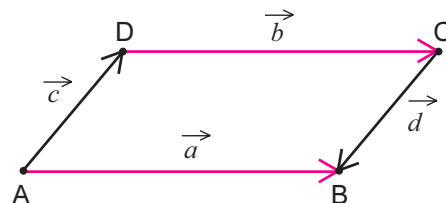
- За кои два вектори \vec{AB} и \vec{CD} велите дека имаат иста насока?
- Што претставува должина на векторот \vec{AB} ?
- На правоаголникот ABCD претставени се векторите $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{DC} = \vec{b}$. Спореди ги нивните должини и одреди како се насочени.



- Спротивните страни во секој паралелограм се паралелни и еднакви.



1. Во паралелограмот ABCD означени се векторите $\vec{AB} = \vec{a}$; $\vec{DC} = \vec{b}$; $\vec{AD} = \vec{c}$; $\vec{CB} = \vec{d}$.



- Спореди ги должините и одреди како се насочени векторите \vec{a} и \vec{b} , односно векторите \vec{c} и \vec{d} .

Воочив дека:

- векторите \vec{a} и \vec{b} имаат иста насока и еднакви должини;
- векторите \vec{c} и \vec{d} имаат спротивни насоки и еднакви должини.



Воочи и зайомни!

- Два вектори \vec{a} и \vec{b} се **еднакви** ако имаат иста насока и еднакви должини, т.е.

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ ако } 1. \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ и } 2. |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

- Два вектори \vec{c} и \vec{d} се **спротивни**, ако имаат спротивни насоки и еднакви должини. За векторот \vec{d} се вели дека е **спротивен** на векторот \vec{c} .

- Спротивен вектор на \vec{c} се означува со $-\vec{c}$, т.е. $\vec{d} = -\vec{c}$.

2. Нацртај вектор \vec{MN} еднаков на даден вектор $\vec{a} = \vec{AB}$.



- Прво ќе нацрташ вектор \vec{AB} и ќе означеш произволна точка M.
- Како ќе ја одредиш точката N за векторот \vec{MN} ?

Низ точката M ќе повлечам полуправа MD истонасочена со полуправата AB. На полуправата MD ќе одредам точка N така што $\vec{MN} = \vec{AB}$.



Воочи дека за даден вектор \vec{a} можеш да нацрташ безброј многу еднакви вектори на него.

Еден вектор \vec{a} е определен ако е дадена неговата насока S и должината $|\vec{a}| = r$ или ако е даден подредениот пар точки (A, B) – неговиот почеток A и крајот B .

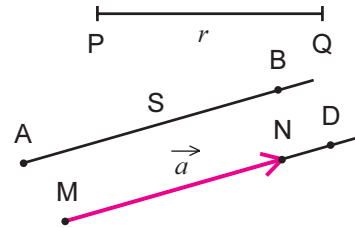
3. Нацртај вектор \vec{a} , ако е дадена неговата насока S и должината $|\vec{a}| = r$.

Воочи ја постапката и спореди го твоето решение.

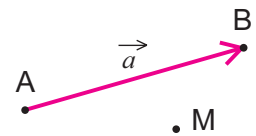
На цртежот е дадена насоката S со полуправата AB и должината $r = \overline{PQ}$ на векторот \vec{a} .

Од произволна точка M конструираме полуправа MD истонасочена со AB .

На полуправата MD одредуваме точка N , така што $\overline{MN} = r$.
Со тоа е определен векторот $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

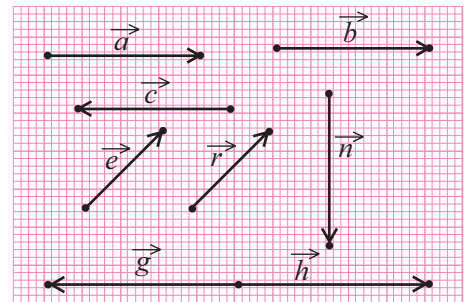


4. Даден е векторот $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и точката M . Нацртај вектор $\overrightarrow{MN} = -\vec{a}$.



5. Според цртежот, одреди кои од следните вектори се еднакви, односно спротивни:

- а) \vec{a} и \vec{b} ; г) \vec{e} и \vec{r} ;
 б) \vec{a} и \vec{c} ; д) \vec{g} и \vec{h} ;
 в) \vec{b} и \vec{c} ; е) \vec{c} и \vec{n} ;

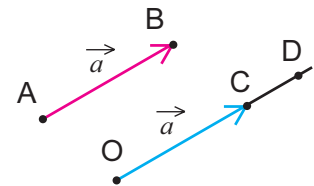


6. Даден е векторот $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и точката O . Конструирај вектор \overrightarrow{OC} еднаков на векторот \overrightarrow{AB} .

Разгледај го решението и образложи ја постапката.

На кој начин ја конструира прво полуправата OD ?

Како ја одреди точката C на векторот \overrightarrow{OC} ?



Воочи и зайомни!

Ако во рамнината е даден вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и произволна точка O , тогаш постои единствен вектор \overrightarrow{OC} со почеток во точката O којшто е еднаков на векторот \vec{a} .

Конструирањето на векторот \overrightarrow{OC} еднаков на векторот \vec{a} , го викаме **пренесување** на векторот \vec{a} во точката O .

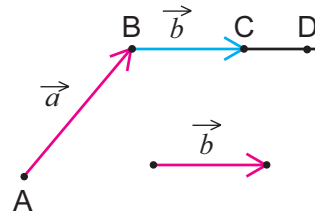
7. Избери четири точки O, A, B и C. Во точката O пренеси ги векторите \vec{AB} и \vec{BC} .

8. Дадени се векторите \vec{a} и \vec{b} . Во крајната точка на векторот \vec{a} пренеси го векторот \vec{b} .

Разгледај го решението и образложи ја постапката.

Прво конструирај ја полуправата BD со насока на \vec{b} .

Како ја одреди точката C за векторот \vec{BC} да е еднаков на \vec{b} ?



Воочи и зайомни!

За векторот \vec{a} и пренесениот вектор \vec{b} велиме дека се **надоврзани**.

Два вектори се **надоврзани** ако крајот на едниот вектор се совпаѓа со почетокот на другиот вектор.

Треба да знаеш:

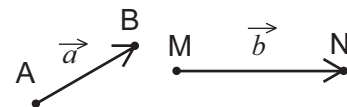
- да објасниш кои два вектори се еднакви, односно спротивни;
- да пренесеш даден вектор во дадена точка и на даден вектор да надоврзеш друг даден вектор.



Провери се!

На векторот \vec{a} надоврзи го векторот $-\vec{b}$.

Образложи ја постапката.



Задачи

- Нацртај два колинеарни вектори \vec{a} и \vec{b} и на векторот \vec{a} надоврзи го векторот \vec{b} .
- Нацртај два спротивни вектори \vec{a} и \vec{b} и на векторот \vec{a} надоврзи го векторот \vec{b} .
- Дали еднаквите вектори се колинеарни? Образложи!
- Дадени се две произволни точки A и B. Дали векторот \vec{BA} е спротивен на векторот \vec{AB} ? Образложи!
- Избери два вектори $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{CD}$. На векторот \vec{a} надоврзи го векторот \vec{b} .
- Дадени се векторите \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и точката O. Пренеси ги трите вектори во точката O.

4 СОБИРАЊЕ НА ВЕКТОРИ

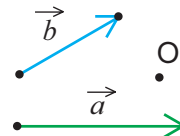
Појсетти се!

- Образложи ја постапката за пренесување на даден вектор \vec{a} во дадена точка O.
- На векторот \vec{a} надоврзи го векторот \vec{b} . Образложи ја постапката!



1. Дадени се векторите \vec{a} , \vec{b} и точката O во рамнината.

- Пренеси ги векторите \vec{a} и \vec{b} така што $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{AB} = \vec{b}$.



- Конструирај го векторот $\vec{c} = \vec{OB}$.

- Спореди го твоето решение со даденото и образложи ја постапката.

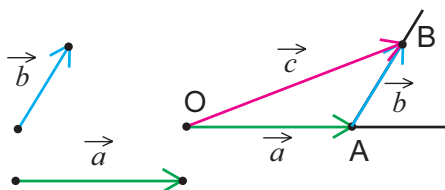
👉 Како го пренесе векторот $\vec{a} = \vec{OA}$ и векторот $\vec{b} = \vec{AB}$?

👉 Како го одреди векторот $\vec{c} = \vec{OB}$?

👉 Која е почетната, а која крајната точка на векторот \vec{c} ?

👉 Што претставува точката O за векторот \vec{a} и точката B за векторот \vec{b} ?

- Воочи и запомни дека вака конструираниот вектор \vec{c} се вика **збир** на векторите \vec{a} и \vec{b} .



Ова е важно правило за собирање на вектори!

- **Збир** на два надоврзани вектори \vec{a} и \vec{b} претставува векторот \vec{c} , чиј почеток се совпаѓа со почетокот на векторот \vec{a} , а крајот му се совпаѓа со крајот на векторот \vec{b} , т.е. ако $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\vec{b} = \vec{AB}$, тогаш $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$.

- Избери друга точка O_1 различна од O и пренеси го векторот $\vec{a} = \vec{O_1A_1}$ и $\vec{b} = \vec{A_1B_1}$. Што претставува векторот $\vec{O_1B_1}$ за векторите \vec{a} и \vec{b} ? Спореди ги векторите \vec{OB} и $\vec{O_1B_1}$.

Воочи и заклучи!

- Векторот $\vec{O_1B_1} = \vec{OB} = \vec{c}$.
- Збирот на два вектори е еднозначно определен и е независен од изборот на почетната точка O.

- 2. Нацртај два неколинеарни вектори \vec{a} и \vec{b} и конструирај го нивниот збир.



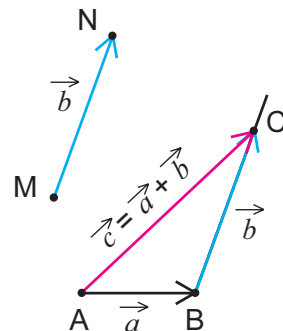
Како полесно ќе го извршиш со-бирањето на векторите \vec{a} и \vec{b} , бидејќи нивниот збир не зависи од изборот на почетната точка O?



Ќе го пренесам само векторот \vec{b} , односно на векторот \vec{a} ќе го надоврзам векторот \vec{b} , а потоа ќе го одредам нивниот збир.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

- 👉 Именувај ги дадените вектори со нивните почетни и крајни точки.
- 👉 Како е конструиран векторот $\vec{BC} = \vec{b}$?
- 👉 Што претставува векторот \vec{AC} за векторите \vec{a} и \vec{b} ?



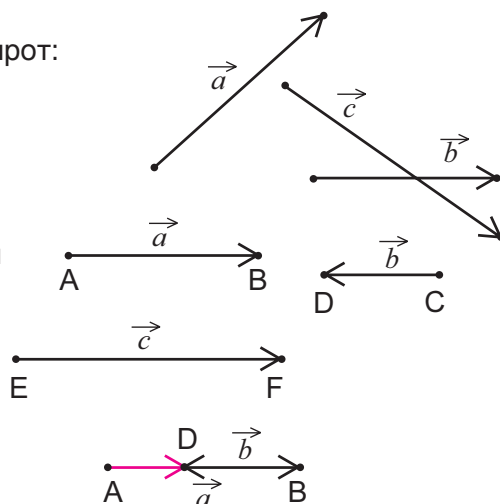
■ Воочи дека одредувањето збир на двата вектори се сведува на конструкцијата на триаголникот ABC. Затоа велиме, збирот на двата вектори е одреден по **правилото на триаголник**.

3. Дадени се векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Конструирај го збирот:

- $\vec{a} + \vec{b}$;
- $\vec{b} + \vec{c}$.

4. Дадени се колинеарните вектори $\vec{AB} = \vec{a}$; $\vec{CD} = \vec{b}$ и $\vec{EF} = \vec{c}$. Конструирај го збирот:

- а) $\vec{a} + \vec{b}$;
- б) $\vec{a} + \vec{c}$;
- в) $\vec{b} + \vec{c}$



■ Разгледај го решението под а).

$$\vec{AB} = \vec{a}; \vec{BD} = \vec{b} \text{ и } \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Воочи како е применето правилото за собирање на вектори. Образложи ја постапката.



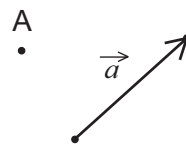
5. Одреди го збирот на нултиот вектор $\vec{0}$ и векторот \vec{a} .

■ Воочи дека за збирот на векторите $\vec{AA} = \vec{0}$; $\vec{AB} = \vec{a}$, според правилото за собирање на вектори важи: $\vec{0} + \vec{a} = \vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB} = \vec{a}$. Исто така: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} = \vec{a}$.

Важи и оишио

■ За секој вектор \vec{a} се точни равенствата: $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$.

6. Дадени се векторите \vec{a} и $\vec{AA} = \vec{0}$. Конструирај го векторот $\vec{0} + \vec{a}$.



7. Нацртај два спротивни вектори \vec{a} и $-\vec{a}$, а потоа одреди го нивниот збир.

■ Ако $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, тогаш според правилото за собирање на вектори следува: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Исто така: $(-\vec{a}) + \vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

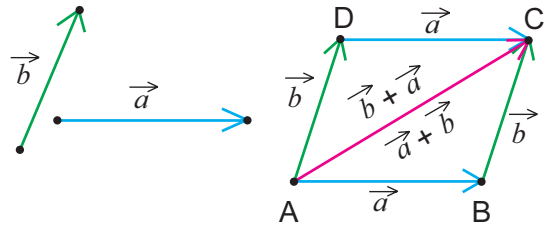
Важно и омишлено

■ За секој вектор \vec{a} се точни равенствата: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}$.

8. Нека се дадени два неколинеарни вектори \vec{a} и \vec{b} . Конструирај ги зборовите $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$. Спореди ги векторите $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$.

■ Спореди го твоето решение со даденото и воочи ја постапката.

👉 Избираме точка A. Векторот \vec{a} го пренесуваме со почеток во точката A и на него го надоврзуваме векторот \vec{b} , т.е. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$; добиваме: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



👉 Го конструираме паралелограмот ABCD, т.е. го одредуваме темето D.

👉 Бидејќи во паралелограмот спротивните страни се паралелни и еднакви, добиваме: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

👉 Тогаш: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$, па: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Важно и омишлено

■ За кои било два вектори \vec{a} и \vec{b} е точно равенството: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, т.е. собирањето на вектори го има **комутативното својство**.



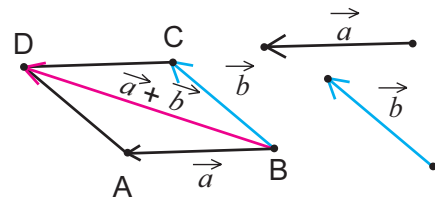
■ Според цртежот, можеш ли да воочиш друг начин за собирање на векторите \vec{a} и \vec{b} ?

Векторите \vec{a} и \vec{b} ќе ги пренесам во заеднички почеток ($\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$), а потоа ќе конструирам паралелограм ABCD. Векторот што го определува дијагоналата \overrightarrow{AC} е збирот $\vec{a} + \vec{b}$.



■ Ова правило за собирање на вектори е наречено **правило на паралелограм**.

9. Нацртај два неколинеарни вектори \vec{a} и \vec{b} и конструирај го нивниот збир по правилото на паралелограм.



- Спореди со твоето решение со даденото на цртежет и образложи ја постапката.

10. Даден е четириаголникот ABCD. Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$.

- Обиди се да покажеш дека $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

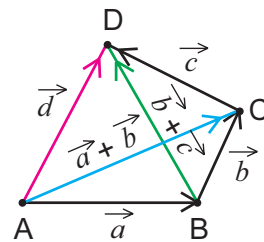
- Воочи на цртежет дека векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} се надоврзани.

- 👉 Од $\triangle ACD$ можеш да воочиш дека: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, т.е.

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{d}.$$

- 👉 Од $\triangle ABD$ следува: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, т.е. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{d}$.

- 👉 Според тоа, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.



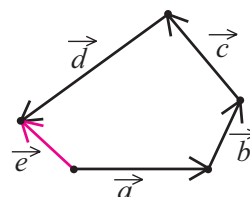
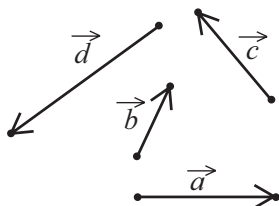
Важи и оишито

■ За секои три вектори \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} е точно равенството: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, т.е. за собирањето на вектори важи **асоцијативното својство**. Поради тоа, збирот на трите вектори може да се запише и без загради: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Воочи и зайомни

■ Збир на три или повеќе надоврзани вектори е вектор чиј почеток се совпаѓа со почетокот на првиот вектор, а крајот му се совпаѓа со крајот на последниот надоврзан вектор.

- На цртежет е конструиран збирот на векторите \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} , т.е. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{e}$.



- Нацртај три неколинеарни вектори \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , а потоа конструирај го нивниот збир.

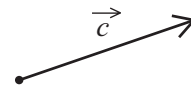
Треба да знаеш:

- ◆ да конструираш збир на два вектори по правилото на триаголник и на паралелограм;
- ◆ да ги искажеш и да ги примениш својствата на собирање на вектори.



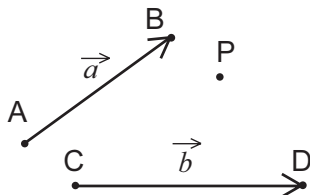
Провери се!

- ▲ Нацртај два вектори \vec{a} и \vec{b} , така што дадениот вектор \vec{c} да претставува нивен збир.



Задачи

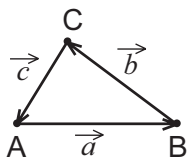
1. Дадени се векторите (како на цртежот) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.



Конструирај ги со почеток во дадена точка M, векторите:

- а) $-\vec{a}$; б) $-\vec{b}$; в) $\vec{a} + \vec{b}$;
 г) $\vec{a} + \vec{0}$; д) $-\vec{b} + \vec{0}$; е) $\vec{a} + (-\vec{a})$.

2. Даден е триаголникот ABC и векторите $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$. Кои од следниве равенства се точни?

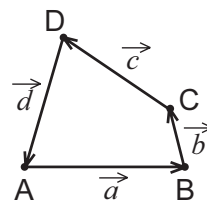


- а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$; б) $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$;
 в) $\vec{a} + \vec{c} = \vec{a}$; г) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$?

3. Даден е четириаголникот ABCD и векторите $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$.

Според цртежот одреди го збирот:

- а) $\vec{a} + \vec{b}$; в) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
 б) $\vec{d} + \vec{a}$; г) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

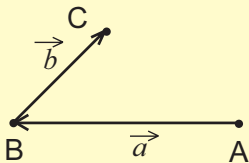


4. Нацртај три колинеарни вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , така што векторот \vec{b} да има спротивна насока од векторите \vec{a} и \vec{c} . Конструирај ги збирите:
- а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} + \vec{c}$;
 в) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

5 ОДЗЕМАЊЕ НА ВЕКТОРИ

Појси се!

- Дадени се векторите \vec{a} и \vec{b} .

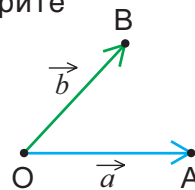


- Нацртај вектор \vec{c} , така што $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

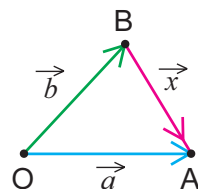


1. Дадени се векторите $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$.

- Конструирај го векторот \vec{x} , така што $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$.



- Разгледај го решението (на цртежот) и образложи го. Која е почетната, а која крајната точка на векторот \vec{x} ?



Воочив дека векторот \vec{x} треба да биде надоврзан на векторот \vec{b} , а крајот да му се совпаѓа со крајот на векторот \vec{a} , т.е. $\vec{x} = \vec{BA}$.



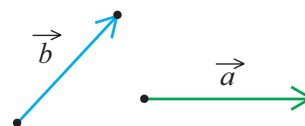
- 👉 Вака конструираниот вектор \vec{x} се вика **разлика на векторите** \vec{a} и \vec{b} ; тој се означува со $\vec{a} - \vec{b}$, т.е. $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$.

Воочи и зайомни

- Разлика на векторите \vec{a} и \vec{b} претставува векторот \vec{x} , таков што $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$, т.е. ако $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$, тогаш $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$.

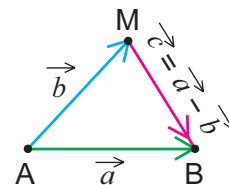
2. Дадени се векторите \vec{a} и \vec{b} .

- Конструирај го векторот $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



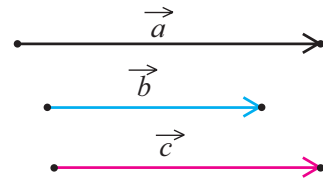
- Разгледај го решението и воочи ја постапката.

- 👉 За да ја конструираш разликата $\vec{a} - \vec{b}$ треба претходно векторите \vec{a} и \vec{b} да ги доведеш во произволна заедничка точка, но попрактично е едниот вектор да го пренесеш во почетокот на другиот вектор.



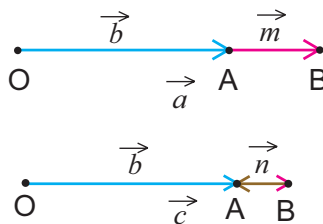
- 👉 Ако $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AM} = \vec{b}$, тогаш векторот $\vec{a} - \vec{b}$ го конструираш според заклучокот: $\vec{MB} = \vec{a} - \vec{b}$.

3. Дадени се колинеарните вектори \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .
 Конструирај го векторот:
 а) $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{n} = \vec{b} - \vec{c}$.



- Воочи го решението и образложи го.
 Според цртежот:

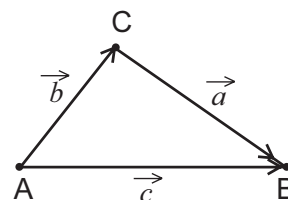
- а) $\vec{OB} = \vec{a}$; $\vec{OA} = \vec{b}$; $\vec{AB} = \vec{m} = \vec{a} - \vec{b}$;
 б) $\vec{OB} = \vec{c}$; $\vec{OA} = \vec{b}$; $\vec{BA} = \vec{n} = \vec{b} - \vec{c}$.



4. Нацртај два вектори \vec{a} и \vec{b} така што $|\vec{a}| = 5$ cm, а $|\vec{b}| = 3$ cm и конструирај го векторот $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

5. Според цртежот кое од следните равенства е точно:

- а) $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$; б) $\vec{c} - \vec{b} = \vec{a}$;
 в) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$; г) $\vec{c} - \vec{a} = \vec{b}$?



■ Ти се запозна со векторите, ги запозна нивните својства и некои операции со нив. Во понатамошното твое изучување на математиката, физиката и другите науки ќе ја согледаш нивната голема примена.

- Ако запишеш дека должината на училницата е 10 m или денеска температурата е $+12^\circ\text{C}$, тогаш со овие податоци наплно се одредени должината на училницата и температурата. Величините како што се на пример: должината, плоштината, волуменот, масата, температурата и др., целосно се определени со броеви. Такви величини се викаат **скаларни величини** или **скалари**.

6. Дали е доволен податокот ако речеме дека ветрот има брзина 20 km на час?

Не е доволен податокот. Ветрот се карактеризира и со својата насока која може да биде северна, јужна, источна итн.



- Природно е величините кои се карактеризираат, освен со својата бројна вредност, уште со својата насока да ги наречеме **векторски величини**.



Кои величини ти се познати како векторски величини?

Такви величини се: брзината, силата, забрзувањето и др.



7. Водата во една река тече со брзина од 4 m во секунда. Еден чамец тргнува од едниот брег, нормално на другиот брег, со сопствена брзина од 3 m во секунда.

- Одреди во која насока ќе се движи чамецот и со која брзина.

■ Размисли за решението, а потоа согледај ја следната постапка.

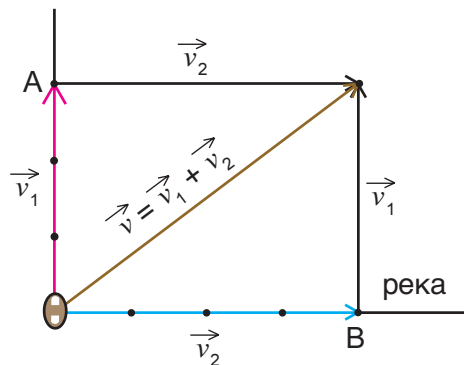
☞ Со векторот \vec{v}_1 ($|\vec{v}_1| = 3$ m) е претставена сопствената брзина на чамецот во мирна вода.

☞ Со векторот \vec{v}_2 ($|\vec{v}_2| = 4$ m) е претставена брзината на реката.

☞ Векторот $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ја претставува брзината на движењето на чамецот.

☞ Насоката на векторот \vec{v} е насока на движењето на чамецот, а должината на векторот \vec{v} претставува колку метри во секунда се движи чамецот.

☞ Измери колку метри во секунда се движи чамецот.

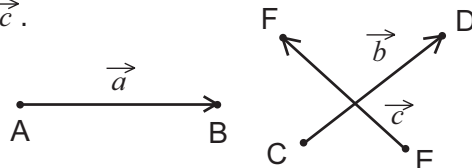


Треба да знаеш:

- ◆ да ја искажеш дефиницијата и начинот за одземање на два вектори;
- ◆ да конструираш разлика на два вектори;
- ◆ да објасниш кои се скаларни, а кои векторски величини.

Задачи

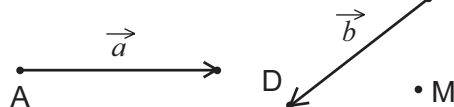
1. Дадени се векторите $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{EF} = \vec{c}$.



Конструирај ја разликата:

- а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{b} - \vec{c}$;
в) $\vec{a} - \vec{c}$; г) $(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c}$.

2. Дадени се векторите $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.



Конструирај го векторот:

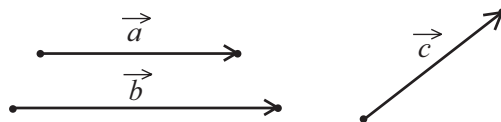
- а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{0}$;
в) $\vec{0} - \vec{a}$; г) $(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{0}$.



Провери се!

- ▲ Нацртај вектор \vec{a} , а потоа претстави го како разлика на два вектори.
- ▲ Нацртај два колинеарни вектори, а потоа одреди ја нивната разлика.

3. Дадени се векторите \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} така што \vec{a} и \vec{b} се колинеарни вектори.



Конструирај го векторот $(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}$.

4. Нацртај правоаголник ABCD и стави $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

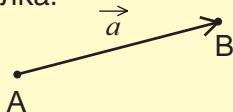
- Со векторите \vec{a} и \vec{b} изрази го векторот
а) \overrightarrow{AC} ; б) \overrightarrow{BD} .

ТРАНСЛАЦИЈА

6 ТРАНСЛАЦИЈА

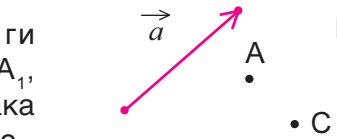
Појсетии се!

- Векторот го претставуваме со насочена отсечка, а насочената отсечка, на цртеж, се претставува со стрелка.
- На цртежот е претставен векторот $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.
- Со што е определена насоката на векторот \vec{a} ?
- Одреди ја должината на векторот \vec{a} .
- За кои два вектори \vec{a} и \vec{b} велиме дека се еднакви?

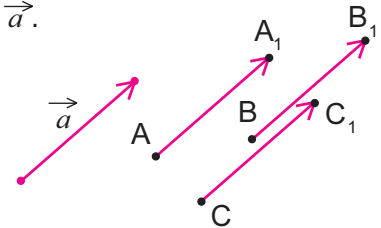


1. Во рамнината е даден векторот \vec{a} и точките A, B и C.

- Одреди ги точките A_1 , B_1 и C_1 , така што векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ да се еднакви на векторот \vec{a} .



- Спореди го твоето решение со даденото.



- Воочи дека точката A е поместена (пресликана) за векторот \vec{a} во точката A_1 , B во B_1 и C во C_1 .
- За точката A_1 велиме дека е **слика** на точката A при тоа поместување, а точката A е **оригинал** на точката A_1 .
- Која точка е слика на точката B, а која точка е оригинал на точката C_1 ?



Што претставуваат точките A и A_1 , односно B и B_1 , односно C и C_1 за векторот \vec{a} ?

Точката A е почетна точка, а сликата A_1 крајна точка на векторот \vec{a} . Соодветно важи и за точките B и B_1 , односно C и C_1 .



- Воочи дека секоја точка X од рамнината може да се помести (преслика), за даден вектор \vec{a} , во само една точка X_1 .

Треба да зайомниш

- Поместувањето (пресликувањето) во рамнината, при кое на секоја точка M одговара точката M_1 , таква што, векторот $\overrightarrow{MM_1}$ е еднаков на даден вектор \vec{a} , се вика **транслација** (или **паралелно поместување**) за вектор \vec{a} .

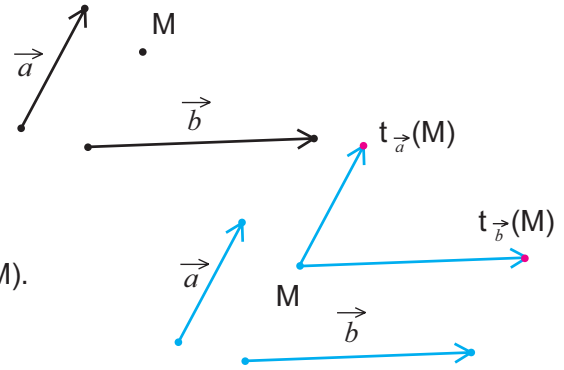


Дадениот вектор \vec{a} се вика **вектор на транслација**. Транслацијата за вектор \vec{a} симболички ја запишуваме со $t_{\vec{a}}$.

☞ За соодветните точки M и M_1 велíme: M_1 е **слика** на M , а M е **оригинал** на M_1 . Уште велíme дека на точката M сме извршиле транслација за векторот \vec{a} .

☞ Ако M_1 е слика на M запишуваме: $M \xrightarrow{\vec{a}} M_1$ или $M_1 = t_{\vec{a}}(M)$.

2. Дадени се векторите \vec{a} и \vec{b} и точката M во рамнината. Одреди ги точките $t_{\vec{a}}(M)$ и $t_{\vec{b}}(M)$.



■ Спореди го твоето решение со даденото.

☞ Во точката M пренеси ги векторите \vec{a} и \vec{b} .

☞ Крајот на пренесениот вектор \vec{a} е точката $t_{\vec{a}}(M)$.

● Како е одредена точката $t_{\vec{b}}(M)$?



- Кои транслации се извршени на точката M ?
- Колку транслации се определени со еден вектор \vec{a} ?

- На точката M се извршени транслациите $t_{\vec{a}}$ и $t_{\vec{b}}$.
- Еден вектор \vec{a} определува само една транслација.



■ Воочи дека една транслација е определена со вектор \vec{a} или со еден пар точки $(M, t_{\vec{a}}(M))$, т.е. со M – оригинал и $M_1 = t_{\vec{a}}(M)$ – нејзината слика.



Размисли каква транслација определува нултиот вектор.

■ Транслацијата за вектор $\vec{0}$ се вика **идентична транслација**.

Почетната точка на нултиот вектор се совпаѓа со крајната точка. Следува дека транслацијата за векторот $\vec{0}$, секоја точка M ја пресликува сама на себе.



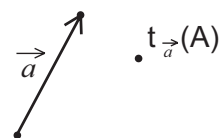
Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш што е транслација;
- ◆ со што е определена една транслација;
- ◆ да одредиш слика на дадена точка при транслација за даден вектор \vec{a} .



Провери се!

▲ Одреди ја точката A , ако е дадена нејзината слика $A_1 = t_{\vec{a}}(A)$ при транслација за вектор \vec{a} .

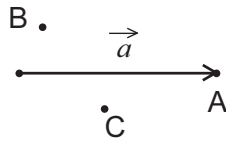


Транслација

23

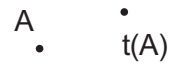
Задачи

1. Дадени се векторот \vec{a} и точките A, B и C.



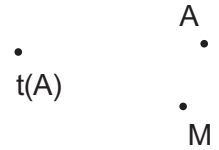
- Изврши транслација на точките A, B и C за векторот \vec{a} .

2. Даден е подредениот пар точки (A, t(A)).



- Конструирај го векторот \vec{a} на транслацијата t.

3. На дадена точка M изврши транслација t дадена со подредениот пар точки (A, t(A)).



7 СВОЈСТВА НА ТРАНСЛАЦИЈАТА

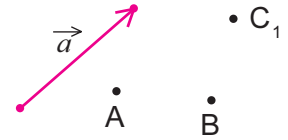
Поисејте се!

- Објасни какво поместување во рамнината е транслацијата.
- Со што е определена една транслација?
- За кои две фигури F_1 и F_2 се вели дека се складни?



1. Даден е векторот \vec{a} и различни-те точки A, B и C_1 .

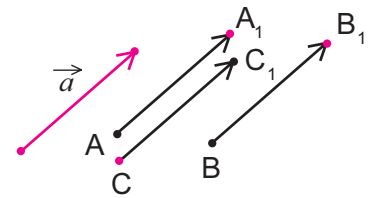
- Одреди ги точките $A_1 = t_{\vec{a}}(A)$ и $B_1 = t_{\vec{a}}(B)$.



- Размисли дали точките A_1 и B_1 може да се совпаѓаат при некоја транслација.
- Одреди точка C така што точката C_1 да е нејзината слика при транслација за вектор \vec{a} .
- Дали секоја точка од рамнината е слика на некоја точка при транслација за вектор \vec{a} ?

- Разгледај го решението и воочи:

- Бидејќи $\vec{AA_1} = \vec{a}$, $\vec{BB_1} = \vec{a}$ и точките A и B се различни, тогаш и точките A_1 и B_1 се различни.
- За избраната точка C_1 , можеш да конструираш вектор $\vec{CC_1} = \vec{a}$, т.е. да одредиш точка C така што C_1 да е нејзината слика при транслацијата $t_{\vec{a}}$.

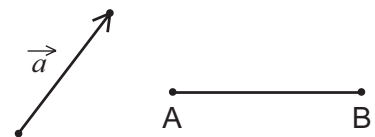


- Воочи дека секоја транслација го има следното својство.

- Различни точки A и B при транслација за вектор \vec{a} имаат различни слики и секоја точка C_1 од рамнината е слика на некоја точка при транслацијата $t_{\vec{a}}$.

2. Дадена е отсечката AB и векторот \vec{a} (на цртежот).

- Одреди ги точките $A_1 = t_{\vec{a}}(A)$ и $B_1 = t_{\vec{a}}(B)$.
- Покажи дека отсечката A_1B_1 е паралелна и еднаква со отсечката AB.



● Покажи дека отсечката A_1B_1 е слика на отсечката AB при транслацијата $t_{\vec{a}}$.

■ Разгледај го решението и воочи ја постапката.

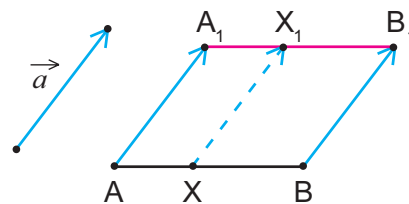
👉 Точките A , B и нивните слики A_1 , B_1 , добиени со транслација $t_{\vec{a}}$, формираат четириаголник ABB_1A_1 .

👉 Бидејќи $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a} = \overrightarrow{BB_1}$, следува дека четириаголникот ABB_1A_1 има две спротивни страни (AA_1 и BB_1) паралелни и еднакви, па четириаголникот ABB_1A_1 е паралелограм.

👉 Ако X е која било точка од отсечката AB , тогаш $X_1 = t_{\vec{a}}(X)$ е точка од отсечката A_1B_1 . (Зошто?)

Обратно: за која било точка X_1 од отсечката A_1B_1 има точка X на отсечката AB , таква што $t_{\vec{a}}(X) = X_1$.

Според тоа, отсечката A_1B_1 е слика на отсечката AB .



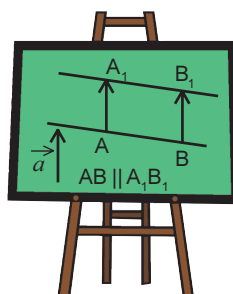
■ Го согледа следното својство.

👉 При секоја транслација отсечка се поместува (се пресликува) во еднаква и паралелна отсечка на неа, т.е. ако $t_{\vec{a}}(A) = A_1$ и $t_{\vec{a}}(B) = B_1$, тогаш $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ и $AB \parallel A_1B_1$.

■ Воочи дека при транслација растојанието помеѓу точките не се менува.



Ако наместо отсечката AB , нацрташ права AB , тогаш во што ќе се преслика правата AB при транслацијата $t_{\vec{a}}$?



Правата AB ќе се преслика во права A_1B_1 паралелна на неа.



■ Општо, важи својството:

👉 При секоја транслација права се поместува (се пресликува) во права паралелна на неа.

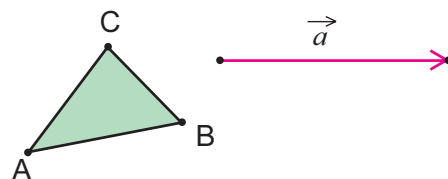
3. Нацртај отсечка AB , права CD и вектор \vec{a} . Изврши транслација на отсечката AB и на правата CD за вектор \vec{a} .

4. Нацртај права AB и изврши транслација на правата AB за вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Во што се пресликува правата AB ?

5. Даден е триаголникот ABC и векторот \vec{a} .

● Изврши транслација за вектор \vec{a} на темињата A , B и C . Нека $t_{\vec{a}}(A) = A_1$ и $t_{\vec{a}}(B) = B_1$ и $t_{\vec{a}}(C) = C_1$.

● Покажи дека $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.



■ На цртежот е прикажана транслацијата за вектор \vec{a} на $\triangle ABC$.

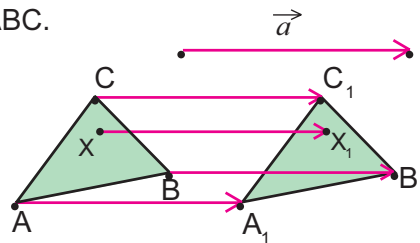
■ примени го својството на транслација на отсечка и признакот ССС за складност на триаголници. Со тоа ќе покажеш дека $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.


■ Според цртежот, можеш да си претставиш дека $\triangle ABC$ е поместен (пресликан) за вектор \vec{a} и се совпаѓа со $\triangle A_1B_1C_1$. За $\triangle A_1B_1C_1$ велíme дека е **слика** на $\triangle ABC$ при транслацијата $t_{\vec{a}}$.

■ Значи, сликата на даден триаголник при транслација е триаголник, складен со дадениот.

■ Општо, две фигури F и F_1 се складни ако постои пресликување $f: F \rightarrow F_1$, такво што секоја точка од F_1 е слика на барем една точка од F и за секои две точки $A, B \in F$ и $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, да следува $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$.

■ Важи следното својство.



 При транслација за вектор \vec{a} секоја фигура F се пресликува во фигура F_1 што е складна на неа.

■ Воочи дека транслацијата за спротивниот вектор $-\vec{a}$, секоја точка X_1 од фигурата F_1 ја „враќа“ во почетната положба X , т.е. фигурата F е слика на фигурата F_1 при транслацијата $t_{-\vec{a}}$.

■ Транслацијата за векторот $-\vec{a}$ (спротивен на \vec{a}), претставува **инверзна транслација** на транслацијата за вектор \vec{a} .

Треба да знаеш:

- ◆ да ги искажеш и образложиш својствата на транслацијата за вектор \vec{a} ;
- ◆ да ги применуваш својствата на транслација во задачи.



Провери се!

- ▲ Нацртај отсечка AB и на неа изврши транслација за вектор $\vec{a} = \overline{AB}$.

Задачи

1. Нацртај отсечка AB и потоа изврши транслација на AB за:
а) даден вектор \vec{a} ;
б) за вектор $\vec{a} = \overline{BA}$.
2. Нацртај права p и вектор \vec{a} . Изврши транслација на правата p за векторот \vec{a} .
3. Нацртај агол AOB и вектор \vec{a} . Изврши транслација на аголот AOB за векторот \vec{a} .
4. Дадена е кружница k со центар O и радиус r и вектор \vec{a} , со $|\vec{a}| = 2r$. Изврши транслација на кружницата k за векторот \vec{a} .
5. Даден е $\triangle ABC$ и вектор \vec{a} . Изврши транслација на триаголникот ABC за:
а) векторот $-\vec{a}$; б) векторот $\vec{c} = \overline{AB}$.

8 ПРИМЕНА НА ТРАНСЛАЦИЈАТА

Појсиети се!

- Во каква фигура, при транслација, се пресликува:
 - а) точка; б) отсечка;
 - в) полуправа; г) права;
 - д) агол; е) триаголник;
 - ж) две прави што се сечат?
- Нацртај агол $\sphericalangle AOB$ и вектор \vec{a} . Изврши транслација на $\sphericalangle AOB$ за векторот \vec{a} . Какви се по големина $\sphericalangle AOB$ и неговата слика $\sphericalangle A_1O_1B_1$?

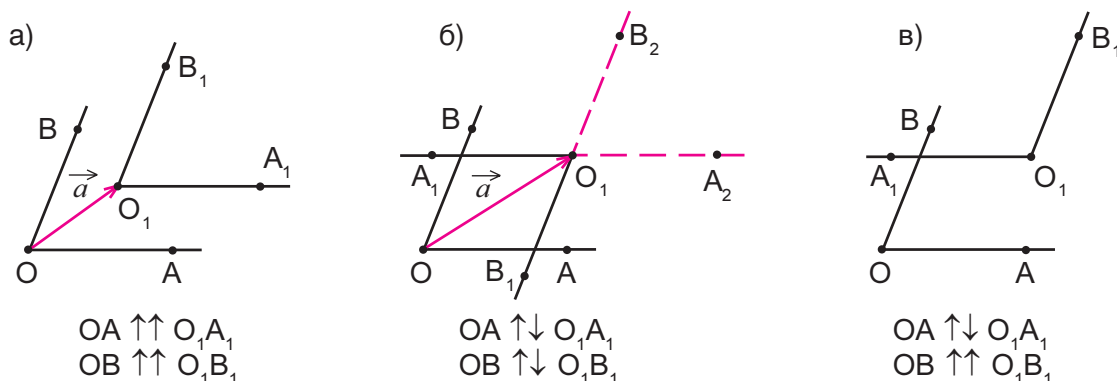


Со помош на транслацијата се докажуваат повеќе геометриски теореми и се решаваат задачи. Како се применува транслацијата – согледај на наредните примери.

1. Докажи дека:

- а) два агли со истонасочени краци се еднакви;
- б) два агли со спротивнонасочени краци се еднакви;
- в) два агли, такви што едниот пар краци им се истонасочени, а другиот пар спротивнонасочени, се суплементни.

Разгледај ги цртежите и воочи ја постапката при докажувањето.



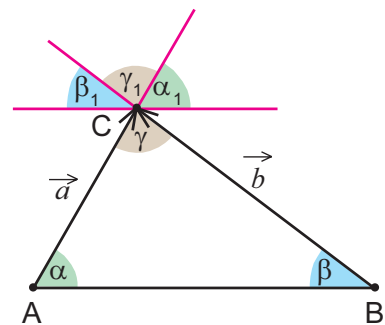
Примени го својството: при транслација, една фигура се пресликува во складна фигура на неа, па агол се пресликува во агол еднаков (складен) со него.

- а) Нека $\vec{OO_1} = \vec{a}$. При транслација за вектор \vec{a} аголот $\sphericalangle AOB$ се поместува во аголот $\sphericalangle A_1O_1B_1$, т.е. $t_{\vec{a}}(\sphericalangle AOB) = \sphericalangle A_1O_1B_1$. Според тоа $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1O_1B_1$.
- б) Нека $\vec{OO_1} = \vec{a}$. При транслација за вектор \vec{a} , $\sphericalangle AOB$ се поместува во аголот $\sphericalangle A_2O_1B_2$, т.е. $t_{\vec{a}}(\sphericalangle AOB) = \sphericalangle A_2O_1B_2$. Според тоа $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_2O_1B_2$.

Воочи дека $\sphericalangle A_2O_1B_2 = \sphericalangle A_1O_1B_1$ како накрсни агли. Можеш да заклучиш дека $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1O_1B_1$.

На сличен начин докажи го тврдењето в).

2. Со примена на транслагција докажи дека збирот на внатрешните агли на триаголник е 180° .



■ Воочи ја постапката и постапи според барањата.

1. Нека $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

2. На аголот α изврши транслагција за векторот \vec{a} , т.е. $t_{\vec{a}}(\alpha) = \alpha_1$.

3. Какви се аглие α и α_1 по големина?

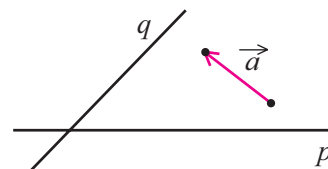
4. На аголот β изврши транслагција за векторот \vec{b} , т.е. $t_{\vec{b}}(\beta) = \beta_1$.

5. Какви се аглие β и β_1 по големина?

6. Темињата на аглие α и β се поместени во темето C. Образложи, во што се пресликани краците на аглие α и β .

7. Зошто $\gamma = \gamma_1$? 8. Зошто $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ$? 9. Образложи, зошто $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

3. Дадени се правите p, q и векторот \vec{a} . На правата q конструирај точка M_1 којашто е слика на некоја точка M од правата p при транслагцијата $t_{\vec{a}}$.



Анализа на решението

■ Претпостави дека задачата е решена (види го цртежот). Од анализата согледај ја постапката за конструкцијата на точките M и M_1 .

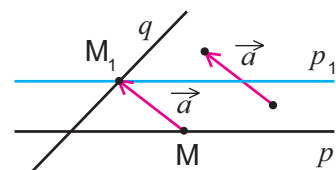
1. Нека M_1 е слика на точката M при $t_{\vec{a}}$.

2. $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$. Зошто?

3. Правата p_1 е слика на правата p при $t_{\vec{a}}$.

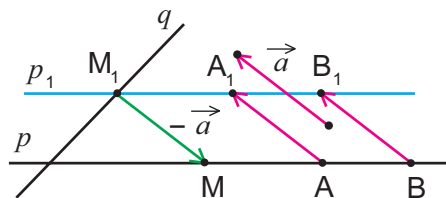
4. Точката M_1 можеш да ја конструираш како пресечна точка на p и p_1 .

5. Точката M можеш да ја конструираш како слика на точката M_1 при транслагција за векторот $-\vec{a}$.



Конструкција

- 1 Избери точки A и B на p и конструирај ја правата $p_1 = t_{\vec{a}}(p)$.
- 2 M_1 е пресечна точка на q и p_1 .
- 3 $M = t_{-\vec{a}}(M_1)$.



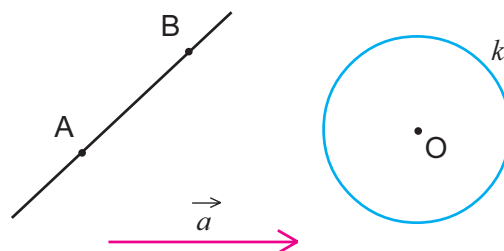
Треба да знаеш:

- ◆ да извршиш анализа на дадена задача и да процениш дали со примена на трансформација можеш да ја решиш.



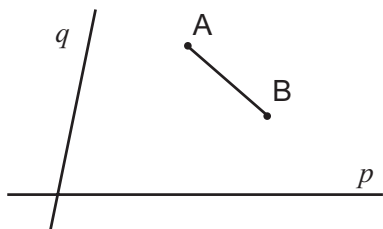
Провери се!

- ▲ Дадена е права AB , кружница k и вектор \vec{a} .
- На правата AB конструирај точка која се пресликува на кружницата k при трансформација за векторот \vec{a} .
- Колку такви точки може да има правата AB ?



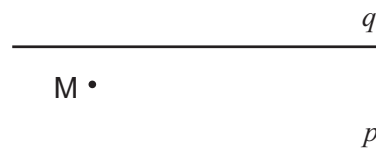
Задачи

1. Дадени се правите p, q и отсечка AB .



- Конструирај отсечка MN паралелна и еднаква на AB , чии крајни точки лежат на дадените прави p и q .

2. Конструирај кружница што минува низ дадена точка M и допира две паралелни прави p и q .





УЧЕШЕ ЗА ВЕКТОРИ И ТРАНСЛАЦИЈА. ПРОВЕРИ ГО ТВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. За кои две полуправи велиме дека се истонасочени?
2. Дадена е полуправата OA .
 - а) Нацртај полуправа O_1A_1 истонасочена со полуправата OA .
 - б) Нацртај полуправа O_2A_2 спротивнонасочена со полуправата OA .
3. За кои два вектори велиме дека се колинеарни?
4. Со почеток во дадена точка A конструирај вектор \vec{AB} , таков што има дадена насока S и $|\vec{AB}| = 3$ cm.
5. Дадени се векторите \vec{AB} , \vec{CD} и точката M . Конструирај вектор:
 - а) \vec{MN} еднаков на \vec{AB} .
 - б) \vec{MD} спротивен на \vec{CD} .
6. Нацртај два спротивни вектори \vec{a} и \vec{b} , а потоа на векторот \vec{a} надоврзи го векторот \vec{b} .
7. Нацртај два вектори \vec{a} и \vec{b} , а потоа конструирај го:
 - а) векторот $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;
 - б) векторот $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.
8. Дадени се векторите \vec{a} , \vec{b} и $\vec{MM} = \vec{0}$. Со почеток во дадена точката A конструирај го векторот:
 - а) $-\vec{a} + \vec{0}$;
 - б) $\vec{0} - \vec{b}$.
9. Дадени се: точката A и точката A_1 , што е слика на точката A при транслацијата t за вектор \vec{a} . Одреди го векторот \vec{a} на транслацијата t .
10. Дадена е отсечка AB и вектор $\vec{a} = \vec{AB}$. Изврши транслација t на отсечката AB за векторот $-\vec{a}$.
11. Дадени се кружниците $k(O, r)$, $k_1(O_1, r_1)$ и правата p . Конструирај права q паралелна на p , така што таа при сечење на кружниците образува еднакви тетиви.
12. Дадени се две кружници k_1 и k_2 што се сечат. Низ едната пресечна точка повлечи права p , така што тетивите на кружниците кои припаѓаат на p се еднакви.

СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ ПРИРОДЕН БРОЈ

- | | |
|---|----|
| 1. Степен | 32 |
| 2. Претставување број во вид на степен.
Пресметување броен израз | 35 |

ОПЕРАЦИИ СО СТЕПЕНИ

- | | |
|--|----|
| 3. Множење и делење на степени со еднакви основи | 39 |
| 4. Степенување на степен, производ и количник | 42 |

КВАДРАТ И КВАДРАТЕН КОРЕН НА РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

- | | |
|---|----|
| 5. Квадрат на број. Квадратен корен | 45 |
| 6. Пресметување квадратен корен – не е задолжително | 49 |

РЕАЛНИ БРОЕВИ

- | | |
|----------------------------|----|
| 7. Ирационални броеви | 52 |
| 8. Множество реални броеви | 54 |
| Провери го твоето знаење | 56 |



СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ ПРИРОДЕН БРОЈ

1 СТЕПЕН

Попамети се!

- Збир од исти собироци кратко се запишува како производ.

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$$

- Запиши ги следните зборови како производи:

$$36 + 36 = \blacksquare$$

$$120 + 120 + 120 + 120 = \blacksquare$$

- Производот од исти множители кратко се запишува како *степен*.

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$$

- Запиши ги следните производи како степени:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \blacksquare$$

$$18 \cdot 18 = \blacksquare$$

- Запиши го како производ на еднакви множители четвртото делење на амедата.
- Запиши го како степен четвртото делење на амедата.
- Колкав е бројот на амеди по четвртото делење?

Производот $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ кратко се запишува 2^4 (се чита „два на четврти“), а неговата **бројна вредност** е 16.

Општо

Производот од n еднакви множители еднакви на бројот a се означува со a^n и се вика

степен на a , т.е. $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-пати}} = a^n$.

По договор: $a^1 = a$.

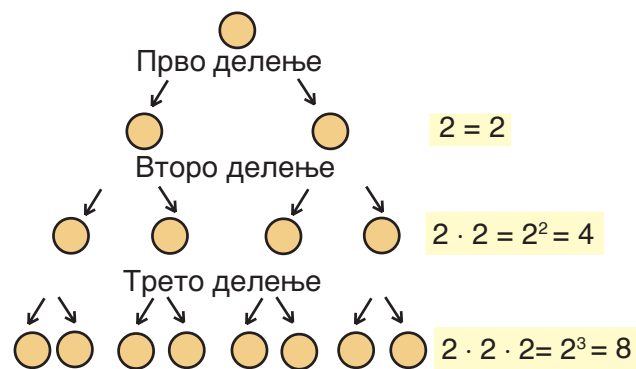
- Запиши го како степен производот: $(-3,2) \cdot (-3,2) \cdot (-3,2)$;



Амедата е едноклеточен жив организам. Таа се размножува со проста делба. Секоја амедата се дели на две нови амеди.

- Нека едно обоено крулче претставува една амедата.

- Воочи го бројот на амеди што се добива при размножувањето од една амедата.



Значи, степенот 2^4 е краток запис на производот од 4 множители, еднакви на бројот 2.



Степен

a^n

Експонент, степен показател

Основа на степенот

Се чита: a на енти.

- Степенот 3^4 запиши го како производ и пресметај ја неговата вредност.



Операцијата со која се пресметува бројната вредност на степенот на некој број се вика **степенување**.

- 3.** ■ Воочи ги примерите каде што е извршено степенување.

👉 $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 9 \cdot 9 = 81$
или $3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 27 = 81$

Користи го асоцијативното својство како што ти е најпогодно.

👉 $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$
 $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = 16 \cdot (-4) = -64$

Воочи го знакот на основата и знакот на вредноста на степенот, а особено дали експонентот е парен или непарен број.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^4 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{81}{256}$$

👉 $1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
 $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
 $(-1)^6 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

Колку е вредноста на степенот со основа 1, а колку на степенот со основа (-1) ?

👉 $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
 $0^{99} = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0}_{99 \text{ нули}} = 0$

Дали вредноста на степенот со основа 0, зависи од експонентот?

- Пресметај ја вредноста на секој од степените:

$$(1,2)^3 = \square; (-5)^4 = \square; (-3)^3 = \square; \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \square; 0^{18} = \square; 1^6 = \square; 7^1 = \square.$$

- Следнава табела ќе ти помогне да процениш каков број е вредноста на степенот зависно од основата на степенот и експонентот на степенот.

Основа на степенот	Експонент	Вредност на степенот
Позитивен број →	Кој било природен број	→ Позитивен број
1 →		→ 1
0 →		→ 0
Негативен број ↗ ↘	Парен број	→ Позитивен број
	Непарен број	→ Негативен број
Кој било број	1	Самиот тој број

4. Користејќи ги правилата од табелата одреди каков број ќе биде вредноста на секој од степените:

$$6^3; (-6)^3; \left(\frac{1}{4}\right)^5; \left(-\frac{1}{4}\right)^4; 6^1; (-0,23)^1; 2^{60}; 1^{103}; 0^{20}.$$



5. Воочи, бројната вредност на степенот $(-2)^3$, е пресметана со дигитрон:

$$-2 \text{ [y}^x \text{] } 3 \text{ [=]} \text{ [-8]}$$

Ако калкулаторот има y^x или x^y на тастатурата.

$$-2 \text{ [\cdot] } \text{ [=]} \text{ [4] } \text{ [=]} \text{ [-8]}$$

Ако калкулаторот нема y^x или x^y на тастатурата.

- Со калкулатор пресметај:

$$3^3 = \text{■}; 0,5^{10} = \text{■}; (-1,2)^4 = \text{■}; (-136)^3 = \text{■}; 15^2 = \text{■}.$$

Треба да знаеш:

- ◆ што е степен, основа на степенот и експонент (степенов показател);
- ◆ да одредиш бројна вредност на степен;
- ◆ да ја процениш бројната вредност на степенот.



Провери се!

- ▲ Одреди што е точно за степенот a^n :
 - а) a е експонент, а n е основа на степенот;
 - б) n покажува колку пати бројот a е земен за множител;
 - в) вредноста на a^n е позитивен број ако $a < 0$ и n е непарен број.
- ▲ Тврдењата што за a^n не се точни, коригирај ги и запиши ги.

Обици се да одговорим:

- Изразот $-4x^6$ не е степен, а изразот $(-4x)^6$ е степен. Зошто?



Запиши го секој од изразите како производ. Воочи ја разликата меѓу записите.

Проблем со алгите



- Во една чаша има алги. Алгите се такви што за еден ден нивниот број се зголемува двапати. Биле потребни 10 дена за чашата да се наполни со алги.
- За колку дена чашата била до половина полна со алги?
- Образложи го својот одговор.

Задачи

1. Одреди ги основата и експонентот за секој од степените:
 6^3 ; 3^6 ; $4,26^7$; $(3p)^m$; $(-x + 4)^p$; $(-p^8)^4$; $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3$; 0^{20} .
2. Запиши ги како степен производите:
 $(-2,5) \cdot (-2,5) = \square$;
 $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = \square$;
 $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = \square$;
 $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = \square$;
 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \square$;
 $(x + 6) \cdot (x + 6) = \square$.
3. Запиши ги како производ степените:
 $6^4 = \square$; $(-x + 3)^3 = \square$;
 $(-2)^4 = \square$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \square$;
 $\left(\frac{1}{11}\right)^6 = \square$; $(m^3)^4 = \square$.
4. Пресметај ја вредноста на секој од степените:
 $(-2)^5 = \square$; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \square$;
 $(-5)^2 = \square$; $(-0,6)^7 = \square$;
- Провери го твојот резултат со калкулатор.

2

ПРЕТСТАВУВАЊЕ БРОЈ ВО ВИД НА СТЕПЕН. ПРЕСМЕТУВАЊЕ БРОЈНА ВРЕДНОСТ НА ИЗРАЗ

Поисети се!

- Производот $10 \cdot 10 \cdot 10$, запишан како степен е 10^3 .
 - Одреди ги основата и експонентот на степенот 10^3 .
 - Запиши го степенот 10^6 како производ на еднакви двоцифрени множители.
- Спореди ги: бројот на нулите во секоја декадна единица, бројот на множителите во производот и експонентот во записот како степен.



1. Во табелата некои декадни единици се запишани како производ од исти множители и како степени со основа 10.

Декадна единица	Производ	Степен
100	$10 \cdot 10$	10^2
10 000	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10^4
100 000	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10^5
1 000 000	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10^6

Воочив дека бројот на нулите во декадната единица е еднаков на показателот во нејзиниот запис во вид на степен со основа 10.



2. Запиши ги во вид на степен броевите што се среќаваат во секоја од речениците:

● Масата на Нептун е околу $\underbrace{1000\dots0}_{26 \text{ нули}}$ кило-

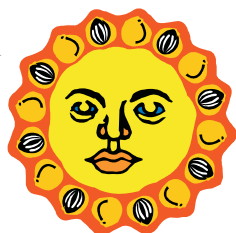
грами.

● Масата на Месечината е околу $\underbrace{1000\dots0}_{23 \text{ нули}}$

килограми.

● Масата на Сонцето е околу десет милиони пати поголема од масата на Месечината. Запиши ја масата на Сонцето во вид на степен.

Јас имам 10^7 пати поголема маса



3. ● Запиши ги како производ степените: 10^9 ; 10^{11} ; 10^{10} .

● Запиши ја декадната единица што е еднаква на степенот 10^7 .



Броевите што може да се запишат како производ од број и декадна единица, може да се запишат и како производ од број и степен со основа 10. На пример: $265\,000\,000 = 265 \cdot 1\,000\,000 = 265 \cdot 10^6$.

4. ● Брзината на светлината е 300 000 километри во секунда. Запиши ја брзината на светлината како производ од број и степен со основа 10.

● Патот што го поминува светлината за една година се вика **светлосна година**. Колку километри има една светлосна година?

Појсетти се!

1 година = 365 дена; 1 ден = 24 часа;
1 час = 60 минути; 1 минута = 60 секунди;

1 светлосна година = $300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 =$

● Запиши ја светлосната година како производ на два броја од кои едниот е степен со основа 10 и показател 8.



Досега согледа дека големите броеви може да се запишат како производ на два броја, од кои едниот е степен со основа 10.

На сличен начин, малите броеви може да се запишат како степен со основа 0,1 или производ на број и степен со основа 0,1.



5. Во табелата воочи ги децималните броеви што се запишани како производ на еднакви множители и како степени со основа 0,1.

Број	Запис како производ	Степен
0,01	$0,1 \cdot 0,1$	$0,1^2$
0,001	$0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1$	$0,1^3$
0,0001	$0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1$	$0,1^4$
0,00001	$0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1$	$0,1^5$

- Спореди го бројот на децималните места по записката во бројот, со експонентот во записот на бројот како степен.

Воочив дека експонентот во записот како степен е еднаков со бројот на децимални места по записката во бројот.



6. ● Запиши ги како степен со основа 0,1 броевите: 0,0000000001 и 0,0000001.
- Степенот со основа 0,1 запиши го како децимален број: $0,1^1 = \square$; $0,1^9 = \square$.



Секој децимален број може да се запише како производ од два множителя така што едниот е степен од 0,1.

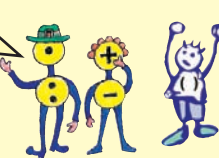
7. ■ Воочи го примеров: $0,007 = 7 \cdot 0,001 = 7 \cdot (0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1) = 7 \cdot 0,1^3$

- Запиши ги како производ од цел број и степен со основа 0,1 броевите:

$0,3 = \square$; $0,0008 = \square$; $0,000362 = \square$; $1,05 = \square$.

Појсетеи се!

Точкиите одаи прео цртичкиите.



Но, прво во заградите.

- Пресметај: $3 + \left(\frac{5}{6} + 2 : \frac{1}{2}\right) - 2 = \square$.

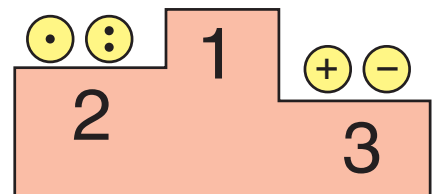


Операцијата степенување е операција од трет ред.

8. ■ Воочи го преместувањето на бројната вредност на изразот $(816 - 6) : (-3)^4 - (6^3 : 8) \cdot 2$.

Ред на операцијата	Броен израз
	$(816 - 6) : (-3)^4 - (6^3 : 8) \cdot 2$
Загради	$810 : (-3)^4 - (6^3 : 8) \cdot 2 =$
Трет ред	$= 810 : 81 - (216 : 8) \cdot 2 =$
Втор ред	$= 10 - 27 \cdot 2 =$
Прв ред	$= 10 - 54 =$
Резултат	$- 44$

Јас сум од трет ред, но на прво место.





При пресметувањето на бројната вредност на изразот, операцијата степенување се извршува пред операциите од втор ред (множење и делење), а на крајот се операциите од прв ред (собирање и одземање). Се разбира, треба да се внимава на заградите.

- Одреди ја бројната вредност на изразот:

а) $620 + 3 \cdot 5^2 - 147 : (-7)^2 = \blacksquare$; б) $32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 16 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 20 : (-1)^{123} = \blacksquare$.

Треба да знаеш:

- да запишуваш големи и мали броеви во вид на степен;
- да го применуваш редоследот на операциите при пресметување бројна вредност на израз.



Провери се!

- Плоштината на Земјата, којашто изнесува околу $510\,000\,000\text{ km}^2$, запиши ја како производ на два множители од кои едниот е степен со основа 10.
- Запиши го редоследот по кој се извршуваат операциите собирање, одземање, множење, делење и степенување во броен израз.

Задачи

1. Запиши ги како производ од два множители, така што едниот да е степен на бројот 10 (или обратно) броевите што се среќаваат во секоја од речениците:

Масата на Јупитер е околу $19\underbrace{0000\dots0}_{23 \text{ нули}}$ тони.

- Марс има маса околу $6,4 \cdot 10^{20}$ тони.
- Во човековото тело има околу $0,1 \cdot 10^{15}$ клетки.

2. Пресметај:

$435 \cdot 10^4 = \blacksquare$; $26783 \cdot 10^2 = \blacksquare$;
 $6,9 \cdot 10^2 = \blacksquare$; $0,45 \cdot 10^3 = \blacksquare$;
 $15 \cdot 0,1^3 = \blacksquare$; $0,392 \cdot 0,1^2 = \blacksquare$.

3. Одреди ја бројната вредност на изразот:

$(16 - 13)^2 : 3 = \blacksquare$; $4^3 + 4 \cdot (8 : 2^3) = \blacksquare$;

$\frac{9^2 - 9}{4^2 - 10} = \blacksquare$; $\frac{3^2 + (3 \cdot 2)^2}{4 \cdot 5 - 5} = \blacksquare$.

4. Воочи го бројниот израз $6 : 3 + 3 \cdot 3^2$. Каде треба да се запишат загради така што да биде точна неговата бројна вредност?

$6 : 3 + 3 \cdot 3^2 = 45$;
 $6 : 3 + 3 \cdot 3^2 = 9$;
 $6 : 3 + 3 \cdot 3^2 = 29$.

ОПЕРАЦИИ СО СТЕПЕНИ

3 МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА СТЕПЕНИ СО ЕДНАКВИ ОСНОВИ

Појсетти се!

- Степенот a^n во вид на производ се запишува

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n; \quad a^1 = a.$$

- Претстави ги како производ на еднакви множители степените:

$$7^3 = \square; \quad (-2)^2 = \square.$$



1. Разгледај ја табелата за множење на степени.

Множење на степени	Запис на степените како производи	Производ на степените
$2^3 \cdot 2^2$	$(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$2^{3+2} = 2^5$
$(-3)^2 \cdot (-3)$	$((-3) \cdot (-3)) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$	$(-3)^{2+1} = (-3)^3$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{4+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$
$5^4 \cdot 5^2$	$(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$	$5^{4+2} = 5^6$

- Воочи дека при множењето на два степени со еднакви основи:

👉 основата на резултатот е иста како и на множителите;

👉 степеновиот показател на резултатот е збир од показателите на множителите.

- Кој е степеновиот показател што недостасува во последниот од случаите дадени во табелата?



Производот на степени со еднакви основи е степен со истата основа како основите на множителите и показател еднаков на збирот од показателите на множителите.

Полесно е за помнење:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$



2. ● Одреди ги производите: $a^4 \cdot a^5$; $(-2)^7 \cdot (-2)^2$; $(a-3) \cdot (a-3)^6$.

- Запиши го резултатот од множењето на степените:

$$x^5 \cdot x^6 = \square; \quad (-k)^p \cdot (-k)^m = \square.$$

3. ■ Воочи како е пресметан производот

$$(x^2 \cdot x^4) \cdot x^3.$$

$$(x^2 \cdot x^4) \cdot x^3 = (x^{2+4}) \cdot x^3 = x^6 \cdot x^3 = x^{6+3} = x^9$$

- Претстави ги во вид на степен производите:

$$b^3 \cdot (b^7 \cdot b^2) = \square. \quad \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \square.$$

И ова е лесно, основата ја препишувам, а степените показатели ги собирам.

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$



4. ● Разложи го степенот 6^9 на три множители. Воочи дека има повеќе решенија, но ти запиши само две.
- Производот на еден множител и на a^7 е еднаков на a^{97} . Кој е тој множител?
- Кој број е степеновиот показател што недостасува во множењето: $6^3 \cdot 6^{\square} = 6^{12}$?

Појсејти се!

- Ако a, b и n се природни броеви и n е делител на a и b , тогаш

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$$

- Скрати ги дробките:

$$\frac{6}{8}; \frac{12}{21}; \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}; \frac{6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6}$$

Пример: $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$ или

$$\frac{6}{8} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{4 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{4}$$



5. Разгледај ја табелата за делење на степени со еднакви основи.

Делење на степени	Запис на степените како делење на производи	Количник на степените
$2^5 : 2^2$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{2 \cdot 2}}{\cancel{2 \cdot 2}} = 2 \cdot 2 \cdot 2$	$2^{5-2} = 2^3$
$(-3)^2 : (-3)$	$\frac{(-3) \cdot \cancel{(-3)}}{\cancel{(-3)}} = (-3)$	$(-3)^{2-1} = (-3)$
$5^7 : 5^3$	$\frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5}} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$	$5^{7-3} = 5^4$
$9^6 : 9$	$\frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cancel{9}}{\cancel{9}} = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$	$9^{6-1} = 9^5$

- Воочи дека при делењето на два степени со еднакви основи важи следното:
- 👉 основата на количникот е иста како основата на деленикот и делителот;
- 👉 степеновиот показател на количникот е разликата од показателите на деленикот и делителот.
- Кој број е степеновиот показател што недостасува во последниот пример даден во табелата?



Количникот од степени со еднакви основи (различни од 0) е степен со истата основа и показател еднаков на разликата од показателите m и n , $m > n$, на деленикот и делителот.

Полесно е за помнење:

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \quad a \neq 0, \quad m > n$$



6. ■ Воочи го пресметувањето на количникот $(-6)^5 : (-6)^3 = \square$.

$$(-6)^5 : (-6)^3 = \frac{(-6)^{3+2}}{(-6)^3} = \frac{(-6)^3 \cdot (-6)^2}{(-6)^3} = (-6)^{3+2-3} = (-6)^2$$

■ Или скратено: $(-6)^5 : (-6)^3 = (-6)^{5-3} = (-6)^2$.

- Пресметај: $16^9 : 16^3 = \square$; $(-3,5)^7 : (-3,5)^2 = \square$; $106^{100} : 106^{99} = \square$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{18} : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \square$.

7. ■ Воочи го делењето на степени со еднакви основи кога деленикот и делителот имаат исти експоненти.

☞ Ако $a \neq 0$, тогаш $a^n : a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1$, бидејќи броителот и именителот се еднакви.

☞ Ако го примениш правилото за делење на степенот со еднакви основи, ќе добиеш:
 $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$.

■ Согледај дека во првиот случај доби 1, а во вториот a^0 . ■ Ќе сметаме дека $a^0 = 1$.

● Одреди го количникот:

$$(-6)^3 : (-6)^3 = \square; \quad 12,02^{100} : 12,02^{100} = \square; \quad (a-1)^5 : (a-1)^5 = \square; \quad \left(\frac{1}{6}\right)^{41} : \left(\frac{1}{6}\right)^{41} = \square.$$

8. ■ Воочи го делењето на степени со еднакви основи кога показателот на деленикот е број што е помал од показателот на делителот.

$$(-2)^6 : (-2)^8 = \frac{(-2)^6}{(-2)^8} = \frac{(-2)^6}{(-2)^6 \cdot (-2)^2} = \frac{1}{(-2)^2}.$$

● Пресметај: $(-13)^4 : (-13)^7 = \square; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \square;$

Треба да знаеш:

◆ да ги искажеш и применуваш правилата:

☞ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, за $m, n \in \mathbf{N}$;

☞ $a^m : a^n = a^{m-n}$, за $a \neq 0$ и $m > n$;

☞ $a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$, за $a \neq 0$ и $m < n$;

☞ $a^n : a^n = a^0 = 1$, за $a \neq 0$ и $n \in \mathbf{N}$.

Задачи

1. Пресметај ги производите на степените:

● $x^5 \cdot x^{15} = \square; \quad y^{100} \cdot y^2 = \square; \quad 6^{15} \cdot 6^{100} = \square;$

● $x^3 \cdot x^5 \cdot x^2 = \square; \quad (-b) \cdot (-b)^5 \cdot (-b)^{10} = \square.$

2. Што треба да се запише во секое од квадратчињата да бидат точни равенствата:

● $a^6 \cdot \square^9 = a^{15}; \quad \bullet \quad 7^{\square} \cdot 7^{100} = 7^{135};$

● $p^4 \cdot p^{\square} \cdot \square^4 = p^{10}?$



Провери се!

- ▲ Искажи го правилото за множење степени со еднакви основи.
- ▲ Објасни како се делат степени со еднакви основи.
- ▲ Кој број е количникот при делењето на два степени со еднакви основи (различни од нула) и еднакви експоненти?
- ▲ Која е бројната вредност на степен со која било основа $a \neq 0$ и експонент 0?

3. Пресметај ги количниците на степените:

● $17^4 : 17^2 = \square; \quad 1,1^4 : 1,1 = \square;$

● $x^9 : x^{12} = \square; \quad 3^5 : 3^{18} = \square;$

● $12^6 : 12^6 = \square; \quad a^3 : a^3 = \square.$

4. Пресметај ја бројната вредност на секој од изразиве:

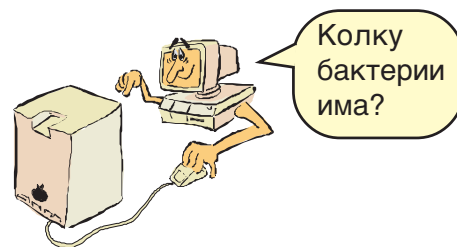
$$\frac{4^5 \cdot 4^3}{4^7} = \square; \quad \frac{3^5 \cdot 3^8}{3^{20}} = \square;$$

$$2 \cdot 3^2 - 6 \cdot \frac{3^5}{3^3} + 5 \cdot (7^5 : 7^2) = \square.$$

5. Пресметај го количникот $\frac{k^{97}}{k^{95}}$ за $k = 2$ и за $k = -2$.

6. Бројот на бактерии во некој производ двапати се зголемува секои 6 минути.

- Колку бактерии ќе има во производот за 1 час, ако на почетокот имало една бактерија?



4 СТЕПЕНУВАЊЕ НА СТЕПЕН, ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

Појсијте се!

■ Степенот a^3 се запишува како производ вака:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

● Запиши ги како производ степените:

а) $(-6)^2 = \blacksquare$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \blacksquare$;

в) $(x + y)^3 = \blacksquare$;

● Запиши го правилото за множење степени со еднакви основи.



1. Записот $(2^3)^4$ претставува степен.

- Што е основа, а што експонент на степенот?

■ Воочи дека 2^3 претставува основа на степенот, а записот $(2^3)^4$ – степенуван степен.

● Запиши го степенот $(2^3)^4$ како производ од еднакви множители.

■ Степенот запишан како производ е:
 $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$.



Можеш ли степенот $(2^3)^4$ да го запишеш како степен со основа 2?
Можеш ли да согледаш скратен начин за степенување на степенот $(2^3)^4$?

Лесно е!

$$\begin{aligned} (2^3)^4 &= 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \\ &= 2^{3+3+3+3} = 2^{12}. \\ \text{Или } (2^3)^4 &= 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}. \end{aligned}$$



■ Степен се степенува така што основата на степенот се степенува со производот од степеновите показатели.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Значи, основата се препишува, а експонентите се множат.



2. ■ Воочи го примеров: $(x^4)^2 = x^{4 \cdot 2} = x^8$.

● Степенувај ги степените: $(0,2^3)^2 = \blacksquare$; $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right)^3 = \blacksquare$; $((ab)^2)^4 = \blacksquare$.

3. ■ Разгледај го примеров: $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3 \cdot 2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1+6} = \left(\frac{1}{3}\right)^7$.

● Упрости ги изразите: $\frac{(3^2)^2 \cdot 3^5}{3^7} = \blacksquare$; $(-4)^8 : ((-4)^2)^4 = \blacksquare$.



4. ● Одреди ја бројната вредност на:

а) $(3 \cdot 5)^2 = \blacksquare$ и б) $3^2 \cdot 5^2 = \blacksquare$.

● Спореди го твоето решение со даденово:

а) $(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 15 \cdot 15 = 225$. б) $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = 9 \cdot 25 = 225$.

● Што заклучи за бројните вредности на а) и б)?

■ Воочи дека $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$.



Општо, степен на производ е еднаков на производот од степенуваните множители со дадениот показател, т.е.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Значи, производ степенувам така што го степенувам секој множител и добиените степени ги množам.



5. ■ Разгледај ги примериве: а) $(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$; б) $(p^4 \cdot k)^2 = (p^4)^2 \cdot k^2 = p^8 \cdot k^2$.

● Степенувај ги производите:

а) $(a \cdot b \cdot c)^{10} = \blacksquare$; б) $(4xy)^2 = \blacksquare$; в) $(-ax)^4 = \blacksquare$;

г) $-(ab)^6 = \blacksquare$; д) $(7x^2)^6 = \blacksquare$; ф) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot p\right)^7 = \blacksquare$.



6. ● Одреди ја бројната вредност на:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \blacksquare$ и б) $\frac{2^3}{3^3} = \blacksquare$.

● Спореди го твоето решение со даденово:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$.

б) $\frac{2^3}{3^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$.

● Што заклучи за бројните вредности на а) и б)?

■ Воочи дека $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$ или $(2 : 3)^3 = 2^3 : 3^3$.



Општо, степен на количник е еднаков на количникот од степенувањето деленик и делител со дадениот показател, т.е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad b \neq 0.$$

Значи, кога степенувам количник ги степенувам деленикот и делителот (или броителот и именителот) посебно и добиените степени ги делам.



7. ■ Разгледај ги примериве: а) $\left(\frac{1}{x}\right)^9 = \frac{1^9}{x^9} = \frac{1}{x^9}$; б) $\left(\frac{k^3}{2p}\right)^2 = \frac{(k^3)^2}{(2p)^2} = \frac{k^{3 \cdot 2}}{2^2 \cdot p^2} = \frac{k^6}{4p^2}$.

● Степенувај ги количниците:

а) $\left(\frac{x}{y}\right)^{16} = \square$; б) $\left(\frac{2}{x}\right)^4 = \square$; в) $(c : 2)^3 = \square$; г) $(x^3 : y^7)^2 = \square$; д) $(2m : 3n)^4 = \square$.

8. ■ Воочи го упростувањето на изразот $(x^4)^3 : x^2$ со примена на операциите со степени.

$$(x^4)^3 : x^2 = x^{4 \cdot 3} : x^2 = x^{12} : x^2 = x^{12-2} = x^{10}.$$

● Упрости ги изразите:

а) $\frac{a^4 \cdot a^3}{(a^3)^2} = \square$; б) $(y^{13} \cdot y) : (y^7)^2 = \square$; в) $(b^4)^3 : (b^4 \cdot b^3 \cdot b^2) = \square$; г) $(2 \cdot 3)^4 : 6^3 = \square$.

9. ■ Пресметај ја вредноста на бројните изрази:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot (3^2)^3 = \square$; б) $(2 \cdot 3)^4 : 3^3 = \square$; в) $((-4)^8 : (-4)^4) : (-4)^2 = \square$.

10. ■ Дадените изрази запиши ги како степени со основа 2, но претходно разгледај го решениот пример.

а) $2^7 : 4^2 = \square$; б) $\frac{2^5 \cdot 4^3}{8^2} = \square$.

Пример:

$$16^4 : 8^3 = (2^4)^4 : (2^3)^3 = 2^{4 \cdot 4} : 2^{3 \cdot 3} = 2^{16} : 2^9 = 2^{16-9} = 2^7.$$

Треба да знаеш:

◆ да ги искажеш правилата за степенување на производ, количник и степен

Степенување на производ	Степенување на количник	Степенување на степен
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(a : b)^n = a^n : b^n; \quad b \neq 0$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

◆ да ги примениш постапките за степенување производ, количник и степен во задачи.



Провери се!

▲ Изврши степенување во секој од изразите:

● $(x^3 y^4)^5 = \square$; ● $\left(\frac{1}{x}\right)^3 = \square$; ● $\left(\frac{2^3 \cdot 2^5}{2^2}\right)^4 = \square$.

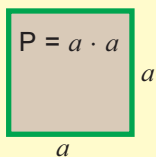
Задачи

1. Степенувај ги производите:
 $(a^3b)^2 = \square$; $(x^4y^3)^7 = \square$;
 $(ay^3b^5)^2 = \square$; $(7a^6b^4)^9 = \square$.
2. Степенувај го секој количник:
 $\left(\frac{x^3y^2}{a^2}\right)^5 = \square$; $\left(\frac{a^2c^4}{b^3}\right)^5 = \square$.
3. Запиши го количникот како степен:
 $\frac{a^9}{b^9} = \left(\frac{a}{b}\right)^\square$; $\frac{1}{p^7} = \left(\frac{1}{p}\right)^\square$; $\frac{(2x)^{15}}{y^{15}} = \square$.
4. Запиши го степенот a^{18} , како степен со основа:
а) a^2 ; б) a^6 ; в) a^9 .
5. Одреди ја вредноста на изразите:
а) $\left(\frac{a^3 \cdot a^2}{a^5 \cdot a}\right)^3$ за $a = 3$; б) $\left(\frac{x^4 \cdot x}{x^2 \cdot x}\right)^3$ за $x = 2$.
6. Дадените производи од степени, запиши ги како степен од производи.
а) $a^2b^2 = \square$; б) $3^6x^6 = \square$;
в) $x^8y^4z^{12} = \square$; г) $8x^9y^6 = \square$.

КВАДРАТ И КВАДРАТЕН КОРЕН НА РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

5 КВАДРАТ НА БРОЈ. КВАДРАТЕН КОРЕН

Поисети се!



- Измери ја и запиши ја должината на страната на квадратот на цртежот.

- Пресметај ја плоштината на квадратот и запиши ја во mm^2 .
- Пресметај ја плоштината на квадрат со страна $2\frac{1}{2}$ см.



1. Пресметај ги производите:

$$5 \cdot 5 = \square; (-4) \cdot (-4) = \square; \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \square.$$

- Запиши ги како степен производите:

$$\begin{aligned} \text{а) } 7 \cdot 7 \cdot 7 &= \square; & \text{б) } \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} &= \square; \\ \text{в) } 6 \cdot 6 &= \square; & \text{г) } (-0,5) \cdot (-0,5) &= \square; \\ \text{д) } x \cdot x &= \square; & \text{ф) } ab \cdot ab &= \square. \end{aligned}$$

Воочи

- Производот од два еднакви множители се вика **квадрат** на тој множител.

- Одредувањето на бројната вредност на квадратот на број се вика **квадрирање**.
- Општо, за кој било рационален број x , производот $x \cdot x$, кратко се запишува како степен x^2 .

$$x \cdot x = x^2 \text{ (се чита: „икс на квадрат“)}$$

- x^2 е квадрат на рационалниот број x .

2. ● Запиши го во вид на производ од два еднакви множители:

$$3^2 = \square; \quad 4^2 = \square; \quad (-5)^2 = \square; \quad (0,5)^2 = \square; \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \square.$$

● Пресметај: $6^2 = \square$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \square$; $(0,1)^2 = \square$; $(-0,1)^2 = \square$.

● Квадрирај го секој од броевите: 2; -2; 1; $\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; -10.

3. ● Пресметај ги запишаните квадрати:

$$3^2 = \square; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \square; \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \square; \quad 0^2 = \square.$$



Воочи дека во секој од примерите резултатот е позитивен број или нула.

Зайомни:

- За кој било рационален број x различен од нула, бројот x^2 е позитивен број, а е 0 за $x = 0$.



4. ■ Воочи ги примерите за квадрирање со калкулатор:

а) $7^2 = \square$

7 \cdot = 49

б) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \square$

1 \div 5 \pm \cdot -0.2 = 0.04

● Квадрирај со калкулатор: а) $123^2 = \square$; $-46^2 = \square$; б) $(0,3)^2 = \square$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \square$.

● Пресметај ги вредностите на бројните изрази, а потоа изврши проверка со калкулатор.

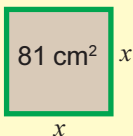
а) $412^2 - 5 \cdot 79^2 = \square$. б) $40,4^2 - 10 \cdot 2,28^2 = \square$.



5. ▶ Плоштината на еден квадрат е 81 cm^2 .

- Одреди ја должината на страната на квадратот.

Воочи го илустрирај



- Нека должината на страната на квадратот е x . Плоштината на квадратот е $P = x \cdot x$ или $P = x^2$.



Плоштината на квадратот е $x^2 = 81$. За да ја пресметаш страната на квадратот треба да ја решиш равенката $x^2 = 81$.

Значи треба да одредам вредност за x , така што $x \cdot x = 81$.
За $x = 9$, точно е дека $9 \cdot 9 = 81$, но и за $x = (-9)$ е точно дека $(-9) \cdot (-9) = 81$.
Бидејќи должината секогаш е позитивен број, следува дека страната на квадратот е 9 cm.



- 6. ■ Разгледај го примеров:
Броевите 4 и -4 се решенија на равенката $x^2 = 16$, затоа што $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ и $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$.

- Провери дали броевите $\frac{3}{4}$ и $(-\frac{3}{4})$ се решенија на равенката $x^2 = \frac{9}{16}$.

- 7. Одреди ги решенијата на:

а) $x^2 = 1$; б) $x^2 = \frac{16}{25}$.



Јас имам две решенија.

$= a$

Јас сум позитивен.

- 8. Одреди ги само позитивните решенија на равенките: а) $x^2 = 25$; б) $x^2 = 9$; в) $x^2 = 144$.

Воочи



Не негативното решение на равенката $x^2 = a$; $a \geq 0$, се вика **квадратен корен** на a и се запишува \sqrt{a} .

Знакот $\sqrt{\quad}$ е знак за квадратен корен, а во записот \sqrt{a} , бројот a е **основа на коренот** или **поткоренова величина**.

- Разгледај го примеров: $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ затоа што $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$.

- 9. Кој број е квадратен корен од: 49, 25, 16 и $\frac{1}{169}$?

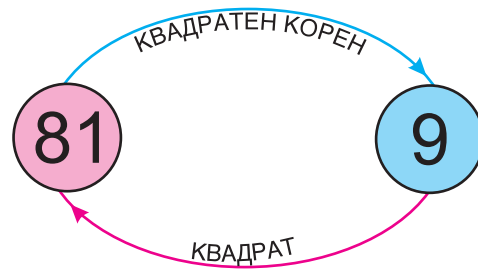
- 10. Докажи дека се точни равенствата:

а) $\sqrt{400} = 20$; б) $\sqrt{121} = 11$; в) $\sqrt{0,04} = 0,2$; г) $\sqrt{0,25} = 0,5$.



Запомни! $\sqrt{a} = b$ ($a \geq 0$), ако $b^2 = a$ ($b \geq 0$).

11. Воочи ја и образложи ја дадената шема.



Значи, за да пресметам квадратен корен од a треба да определам ненегативен број b чиј квадрат е еднаков на бројот a .



12. Пресметај ја бројната вредност на изразите:

• $4 \cdot \sqrt{4} = \square$; $-2 \cdot \sqrt{9} = \square$; • $\frac{\sqrt{10000}}{5} = \square$; $\sqrt{\frac{36}{49}} + \sqrt{100} = \square$.

13. Разгледај ги примерите за одредување квадратен корен со калкулатор.



а) $49 \sqrt{\quad} \rightarrow 7$; б) $6,25 \sqrt{\quad} \rightarrow 2,5$.

• Пресметај со калкулатор:

$\sqrt{25} = \square$; $\sqrt{625} = \square$; $\sqrt{5184} = \square$; $\sqrt{2,56} = \square$; $\sqrt{0,0625} = \square$.

• Изврши проверка на резултатите со квадрирање.

Треба да знаеш:

- ◆ да одредиш квадрат на рационален број;
- ◆ да одредиш решенија на равенка од видот $x^2 = a$;
- ◆ со калкулатор да пресметаш квадрат и квадратен корен на број.



Провери се!

▲ Пресметај:

$3^2 = \square$; $(1,6)^2 = \square$; $(-0,3)^2 = \square$.

▲ Провери дали $\frac{1}{7}$ е решение на равенката

$x^2 = \frac{1}{49}$.

▲ Провери дали е точно: $\sqrt{5,29} = 2,3$.

Задачи

1. Пресметај:

а) $(16 - 13)^2 : 2 = \square$;

б) $8^2 + (4 \cdot 8 : 4) = \square$;

в) $\frac{3^2 + 3 \cdot 2}{4 \cdot 5 - 5} = \square$.

2. Одреди го x во равенките:

а) $x^2 = 144$; б) $2x^2 = 72$; в) $\frac{x^2}{2} + 2 = 20$.

3. Пресметај ја должината на страната на квадрат со плошина 324 cm^2 .



Јас знам да пресметам квадрат на број на друг начин!

- Воочи како се пресметани квадратите:

$$2^2 = 3 \cdot 1 + 1 = 4; \quad 3^2 = 4 \cdot 2 + 1 = 9; \quad 4^2 = 5 \cdot 3 + 1 = 16; \quad 5^2 = 6 \cdot 4 + 1 = 25.$$

- Откриј го правилото на пресметување.
- Запиши: 6^2 , 7^2 и 8^2 на овој начин.
- Пресметај 19^2 , 31^2 и 99^2 користејќи ја дадената постапка.
- Провери ги своите резултати со квадрирање.

6 ПРЕСМЕТУВАЊЕ КВАДРАТЕН КОРЕН - не е задолжително

Појсеејте се!

- Во табелата се дадени вредности за бројот a . Одреди ги квадратите на тие броеви.

a	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25	100
a^2													

- Користејќи ги вредностите од табелата пресметај:

$$\sqrt{144} = \blacksquare; \quad \sqrt{225} = \blacksquare; \quad \sqrt{400} - \sqrt{256} = \blacksquare; \quad \sqrt{361} \cdot \sqrt{169} = \blacksquare.$$



Треба да знаеш да процениш колку цифри ќе има квадратен корен на даден број.

1. Согледај ги податоците во табелата.

- Колку цифри има квадратниот корен на бројот:
 - а) 5625 ; б) 1 000 000 ;
 - в) $625 \cdot 10^8$?
- Пресметај со дигитрон и провери го својот одговор за броевите а) и б).

Број a	Квадратен корен \sqrt{a}	Пример
Едноцифрен или двоцифрен	едноцифрен	$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{25} = 5$
Трицифрен или четирицифрен	двоцифрен	$\sqrt{121} = 11$ $\sqrt{3600} = 60$
Петцифрен или шестцифрен	трицифрен	$\sqrt{10201} = 101$ $\sqrt{640000} = 800$
...		



Внимателно проследи го примерот 1. Ќе научиш да пресметуваш квадратен корен на број без дигитрон.

Пример 1.

$$\sqrt{119716}$$



Дадената поткоренова величина се дели на класи оддесно налево по две цифри во класа (првата класа одлево може да има и една цифра).

$$\sqrt{11|97|16}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{11|97|16} = 3 \\ - 9 \\ \hline 2 \end{array}$$



Првата цифра на коренот од бројот е цифрата 3 и се добива како број чиј квадрат е најблиску до 11 и помал од 11 (првата класа одлево). Потоа од првата класа се одзема квадратот на бројот 3, т.е. $3 \cdot 3 = 9$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{11|97|16} = 34 \\ - 9 \\ \hline 297 : 64 \cdot 4 \\ - 256 \\ \hline 41 \end{array}$$



До добиената разлика 2 ($11 - 9 = 2$) оддесно се запишува наредната класа (97) и се добива бројот 297 од кој се одвојува последната цифра (7).
Двоцифрениот број 29 се дели со двојниот производ на првата цифра од резултатот, $3 \cdot 2 = 6$.
Притоа $29 : 6 = 4$ и бројот 4 е втора цифра од резултатот. Цифрата 4 се допишува до 6 (се добива 64) и така добиениот број се множи со 4, а добиениот производ се одзема од 297.

$$\begin{array}{r} \sqrt{11|97|16} = 346 \\ - 9 \\ \hline 297 : 64 \cdot 4 \\ - 256 \\ \hline 4116 : 686 \cdot 6 \\ - 4116 \\ \hline 0 \end{array}$$



До разликата од одземањето ($297 - 256 = 41$) се запишува наредната класа (16).
Се добива бројот 4116 од кој се одвојува последната цифра – цифрата 6 (се добива бројот 411) и така добиениот број се дели со двојниот производ на бројот од првата и втората цифра на коренот ($34 \cdot 2 = 68$).
Притоа се добива ($411 : 68 = 6$) третата цифра на коренот. Таа се допишува до 68 и така добиениот број се помножува со неа; се добива ($686 \cdot 6 = 4116$) производ кој се одзема од дадениот број. Остатокот од ова делење е 0.

Пример 2.

$$\begin{array}{r} \sqrt{5|56,96} = 23,6 \\ - 4 \\ \hline 156 : 43 \cdot 3 \\ - 129 \\ \hline 2796 : 466 \cdot 6 \\ - 2796 \\ \hline 0 \end{array}$$



Постапката е слична за децимален број.

Единствената разлика е што делењето на класи е во две насоки: од децималната запирка налево по две цифри и надесно по две цифри.

Ако последната класа оддесно има само една цифра, се допишува 0.

■ Воочи дека пред да се спушти првата класа од децималите, во резултатот се става запирка.

- Ако по спуштањето на последната класа има остаток, постапката може да продолжи, така што додаваш класа од две нули, а во резултатот ставаш запирка.
- Со понатамошно додавање на класа од две нули постапката може да продолжи.
- Квадратен корен на број пресметуваш до одреден број децимали.

Пример 3.

$$\begin{array}{r} \sqrt{6155} = 25,59 \approx 25,6 \\ - 4 \\ \hline 25 \underline{5} : 45 \cdot 5 \\ - 22 \underline{5} \\ \hline 300 \underline{0} : 505 \cdot 5 \\ - 252 \underline{5} \\ \hline 4750 \underline{0} : 5109 \cdot 9 \\ - 4598 \underline{1} \\ \hline 1519 \end{array}$$

2. ● Пресметај:

а) $\sqrt{21316} = \square$; $\sqrt{55225} = \square$; б) $\sqrt{31,9225} = \square$; $\sqrt{10,6276} = \square$;

в) $\sqrt{15} = \square$; $\sqrt{27,3} = \square$; $\sqrt{5} = \square$.

- Во случајот под в) заокружи го резултатот на една децимала.

Треба да знаеш:

- ◆ да одредиш квадратен корен на даден позитивен број.



Провери се!

▲ Пресметај: $\sqrt{49} = \square$; $\sqrt{256} = \square$.

▲ Колку цифри има бројот што е квадратен корен од петцифрен број?

▲ Одреди $\sqrt{0,16}$ и провери го резултатот со калкулатор.

Задачи

- Одреди ги броевите чиј квадрат е меѓу:
а) 4 и 9; б) 9 и 16.
● Образложи го одговорот.
- Запиши по два цели броја што се најблиску до вредноста на следните квадратни корени:
● $\sqrt{60}$; ● $\sqrt{20}$; ● $\sqrt{110}$.
- Провери дали е точно $\sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10}$.
- Провери кое од равенствата е точно:
а) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$;
б) $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$;
в) $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$;
г) $\sqrt{169 - 144} = \sqrt{169} - \sqrt{144}$.
- Колку е периметарот на квадрат чија што плоштина е 25 cm^2 ?

РЕАЛНИ БРОЕВИ

7 ИРАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Појсетти се!

- Рационални броеви се броевите што може да се запишат во вид на дропка $\frac{a}{b}$, каде a и b се цели броеви и $b \neq 0$. Множеството рационални броеви се означува со \mathbf{Q} и $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\}$.
- Секој рационален број може да се претстави како конечен децимален број или како периодичен децимален број.
- Броевите:
 - а) 15; 4,27 се конечни децимални броеви;
 - б) $\frac{5}{3} = 1,666\dots$; $\frac{5}{18} = 0,2777\dots$ се периодични децимални броеви.



1.

Еден квадрат има плошина 2 cm^2 . Колку е должината на неговата страна?

- Воочи го решавањето. Бидејќи $P = a^2$, бројната вредност на должината на страната е број таков што $a^2 = 2$, т.е. $a = \sqrt{2}$.
- Но, дали $\sqrt{2}$ е цел број?
- $1 < \sqrt{2} < 2$ затоа што $1^2 = 1$ и $2^2 = 4$. Според тоа, $\sqrt{2}$ не е цел број.
- Со проценување и проверка може да се одреди:
 $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $1,41 < \sqrt{2} < 1,42, \dots$
Значи, должината на страната на квадратот е „број“ меѓу 1,41 и 1,42.
- Со калкулатор може да се пресмета дека $\sqrt{2} \approx 1,4142135\dots$, т.е. $\sqrt{2}$ е бесконечно непериодичен децимален број.

- Бидејќи секој рационален број се претставува како конечен децимален број или бесконечен периодичен децимален број, заклучуваме дека $\sqrt{2}$ не е рационален број.



Секој децимален број што има бесконечно децимали и е непериодичен се вика **ирационален број**.

Така, $\sqrt{2}$ е ирационален број.

И броевите: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ итн. се прикажуваат како бесконечни децимални броеви што се непериодични, па и тие се ирационални броеви.



- Ирационалните броеви во децимален запис ги запишуваме со приближна вредност.
- 2. Со калкулатор одреди ги приближните вредности на ирационалните броеви во децимален запис со две децимали.
 $\sqrt{3} = \square$; $\sqrt{5} = \square$; $\sqrt{8} = \square$; $\sqrt{11} = \square$.
- Множеството на ирационалните броеви се означува со буквата \mathbf{I} .

3. Користејќи ги вредностите на $\sqrt{4}$ и $\sqrt{9}$ процени ја вредноста на $\sqrt{7}$ и провери ја својата проценка со калкулатор.

4. Провери дали важи неравенството $10 < \sqrt{110} < 11$.

5. Одреди ја приближната вредност на:

- $\sqrt{5}$ со точност на 1 децимално место;
- $\sqrt{10}$ со точност на 2 децимални места.

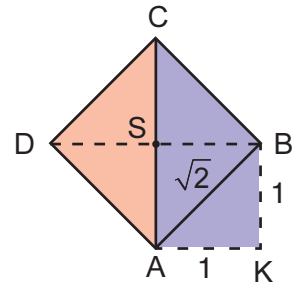
6. Дали постои отсечка чијашто должина има мерен број $\sqrt{2}$?

■ Разгледај го цртежот и следи го објаснението.

☞ Страната на квадратот АКBS има должина 1 cm, па плоштината му е $P_{AKBS} = 1 \cdot 1 = 1$.

☞ Дијагоналата на квадратот АКBS е страна на квадратот ABCD.

☞ Може да се покаже дека квадратот ABCD има двапати поголема плошина од плоштината на квадратот АКBS, т.е. $P_{ABCD} = 2 \cdot P_{AKBS} = 2 \cdot 1 = 2$.



● Одреди ја должината на страната на квадратот ABCD, ако плоштината му е 2 cm^2 .

■ Потсети се на задачата 1. Квадрат со плошина 2 има страна со должина $\sqrt{2}$.

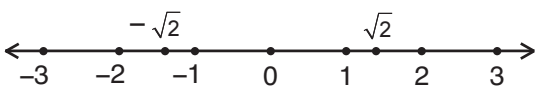
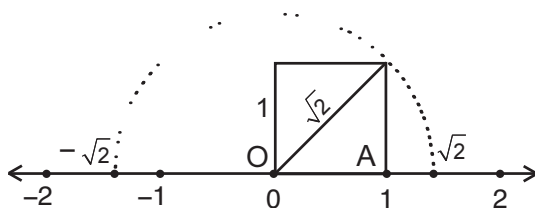


Значи, постои отсечка со должина $\sqrt{2}$, а таа е AB.



Ако сакаш повеќе да знаеш...

7. Воочи како е претставен на бројна права ирационалниот број $\sqrt{2}$.



☞ Над отсечката $\overline{OA} = 1$ се конструира квадрат. Неговата плошина е 1.

☞ Дијагоналата на квадратот (нејзината должина) се пренесува на бројната права.

Растојанието од О до добиената точка во позитивна насока е $\sqrt{2}$, а во негативна насока е $-\sqrt{2}$.

☞ Воочуваш дека

$$1 < \sqrt{2} < 2; \quad -2 < -\sqrt{2} < -1.$$

Треба да знаеш:

- кој број се вика ирационален број.

Задачи

1. Кои од броевите $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$;

$\sqrt{\frac{16}{36}}$; $\sqrt{169}$ се ирационални?

- Провери го решението со пресметување на квадратните корени со калкулатор.

2. Претстави ги на бројна права броевите:
 -3 ; $-\sqrt{2}$; 0 ; $0,5$; $\sqrt{2}$; 2 ; 3 и 4 .



Провери се!

- Запиши 4 броеви што се ирационални.

3. Ирационалните броеви што се дадени во бројните изрази заокружи ги на две децимални места.

- Одреди ја бројната вредност на изразите:

а) $4 + \sqrt{9} = \square$;

б) $\sqrt{36} + \sqrt{3} = \square$;

в) $3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} = \square$;

г) $\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = \square$.

8 МНОЖЕСТВО РЕАЛНИ БРОЕВИ

Појсетти се!

- \mathbf{N} е множество природни броеви:
 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
- \mathbf{Z} е множество цели броеви:
 $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- \mathbf{Q} е множество рационални броеви:
 $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$.



Досега научи да собираш, одземаш, множиш и делиш броеви, да одредиш степен и квадратен корен на број.

1. Пресметај:

а) $106 - 95 = \square$; б) $47 \cdot 102 = \square$; в) $316 + 316 = \square$;

г) $9 - 15 = \square$; д) $135 : 5 = \square$; е) $816 - 816 = \square$;

ж) $6^3 = \square$; з) $1 : 3 = \square$.

- Одреди на кое множество броеви припаѓа вредноста на секој од бројните изрази.
- Воочи дека:
 - вредностите на изразите а), б), в), д) и ж) се елементи на \mathbf{N} ;
 - вредностите од а) до е) и ж) се елементи на множеството \mathbf{Z} ;
 - вредностите на сите изрази од а) до з) се елементи на множеството \mathbf{Q} .

2. Одреди го решението на равенката $x^2 = 3$.
Дали равенката $x^2 = 3$ има решение што е елемент на множеството \mathbf{Q} ?

- Воочи дека $x^2 = 3$ има решение $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}$ е ирационален број и не е елемент на \mathbf{Q} .

- Во кое множество припаѓаат броевите: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$?

3. Според елементите на множествата: **N** – природни броеви, **Z** – цели броеви, **Q** – рационални броеви и **I** – ирационални броеви, одговори на прашањата:

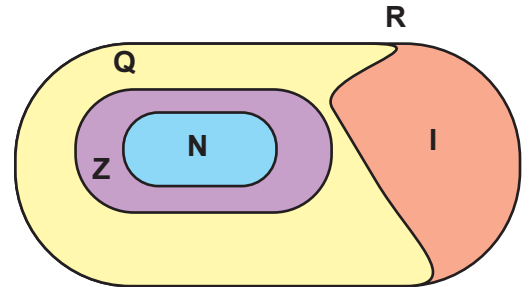
- Дали секој елемент од **N** припаѓа и на **Z**?
- Дали секој елемент од **Z** припаѓа и на **Q**?
- Дали секој елемент на **N** припаѓа и на **Q**?
- Дали секој елемент на **Q** припаѓа и на **I**?
- Дали некои елементи на **Q** припаѓат и на **I**?

■ Воочи го веновиот дијаграм:

☞ За множествата **N**, **Z**, **Q** и **I** важи:
 $N \subset Z \subset Q$ и $Q \cap I = \emptyset$

■ Множеството чии елементи се сите рационални броеви и сите ирационални броеви се вика множество на **реални броеви** и се означува со **R**.

$$R = Q \cup I$$

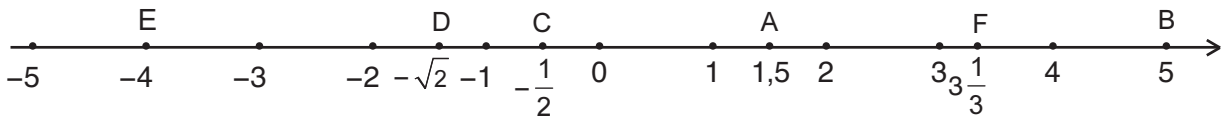


4. Одреди на кое множество припаѓа секој од броевите: 2; 106; -53; 0,002; $\sqrt{3}$; $-\frac{3}{4}$; 6,6666; -1028937.



За секој реален број има точка на бројната права.

5. На бројната права се означени точки. Која од нив е придружена на рационален, а која на ирационален број?



6. На бројна права претстави ги броевите: -2; $-\sqrt{2}$; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; 2; $3\frac{1}{2}$; 4,5.

Треба да знаеш:

- ◆ кои броеви се елементи на множеството **R**;
- ◆ да наведиш примери на реални броеви.



Провери се!

▲ Дали е точно тврдењето: Ако бројот a е елемент на множеството цели броеви **Z**, тогаш тој број е елемент и на **Q** и на **R**. Образложи!

Задачи

1. Дадени се броевите:

$$-\sqrt{3}; -\frac{3}{4}; -2; -\sqrt{2}; -\frac{1}{2}; 0; 1; 2; \sqrt{5}.$$

- Кои броеви се елементи на **N**?
- Кои броеви се елементи на **Z**?
- Кои броеви се елементи на **Q**?
- Кои броеви се елементи на **R**?

2. Што од наведеното е точно:

- а) $\sqrt{0,64}$ е ирационален број;
- б) $-\sqrt{2}$ е реален број;
- в) $\sqrt{7}$ е ирационален и рационален број;
- г) 7 е природен број, е цел број, е рационален број и е реален број.



УЧЕШЕ ЗА СТЕПЕНИ. КВАДРАТЕН КОРЕН. ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

- 1.** Кој број е основа, а кој експонент на степенот 5^3 ?
- 2.** а) Претстави ги во вид на степени производите:
 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \blacksquare$;
 $(a - 1)(a - 1)(a - 1) = \blacksquare$;
 б) Претстави ги во вид на производ степените:
 $x^7 = \blacksquare$; $(-2)^3 = \blacksquare$; $(x - y)^5 = \blacksquare$.
- 3.** Пресметај ја вредноста на степенот со основа (-5) и експонент:
 а) 4; б) 3; в) 1; г) 0.
- 4.** Запиши го бројот во вид на производ од природен број и степен со основа 10.
 а) 25 000 = \blacksquare ; б) 7 050 000 = \blacksquare .
- 5.** Запиши го бројот во вид на производ од природен број и степен со основа 0,1.
 а) 0,00025 = \blacksquare ; б) 2,103 = \blacksquare .
- 6.** Одреди ја бројната вредност на изразот:
 а) $8 - 2^2 \cdot 3 + 4 = \blacksquare$;
 б) $3^2 - (2^3 + 1) + 200 \cdot 0,1^2 = \blacksquare$.
- 7.** Одреди го производот на степените:
 а) $x^7 \cdot x^3 = \blacksquare$; б) $(a + 1)^3 \cdot (a + 1) = \blacksquare$.
- 8.** Одреди го количникот на степените:
 а) $a^{15} : a^5 = \blacksquare$; б) $\frac{x^{12}}{x^3} = \blacksquare$.
- 9.** Изврши степенување на степенот.
 а) $(5^3)^4 = \blacksquare$; б) $(0,2^3)^2 = \blacksquare$;
 в) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^7 = \blacksquare$.
- 10.** Изврши степенување на производите и количниците:
 а) $(ab)^3 = \blacksquare$; б) $(2x^3y)^4 = \blacksquare$;
 в) $(x^2 : y)^3 = \blacksquare$; г) $\left(\frac{1}{a}\right)^4 = \blacksquare$.
- 11.** Изразот $\frac{x^3 \cdot x^5}{x^4}$ запиши го како степен со основа x .
- 12.** Пресметај ја бројната вредност на изразот:
 а) $-2^2 \cdot \sqrt{9} = \blacksquare$;
 б) $15 - 2^3(3^2 - 3\sqrt{9}) - 7\sqrt{4} = \blacksquare$.
- 13.** Реши ја равенката:
 а) $3x^2 = 48$; б) $x^2 + 15 = 96$.
- 14.** Пресметај со калкулатор:
 а) $\sqrt{2401} = \blacksquare$; б) $\sqrt{29,16} = \blacksquare$.
- 15.** Дадени се броевите:
 -3 ; $-\frac{2}{3}$; 0,5 ; $\sqrt{4}$; $\sqrt{5}$; 3,2(7) ; 12.
 Кои од броевите припаѓаат на:
 а) **N** ; б) **Z** ; в) **Q** ; г) **I** ; д) **R** .

ТЕМА 3. ПОЛИНОМИ

МОНОМИ И ПОЛИНОМИ

1. Изрази	58
2. Мономи	63
3. Собирање и одземање на мономи	67
4. Полиноми	69
5. Множење и степенување на мономи	73
6. Собирање и одземање на полиноми	74
7. Множење на полином со моном	76
8. Множење на полиноми	78
9. Производ од збир и разлика на два изрази	81
10. Квадрат на бином	83
11. Делење на мономи. Делење на полином со моном	86

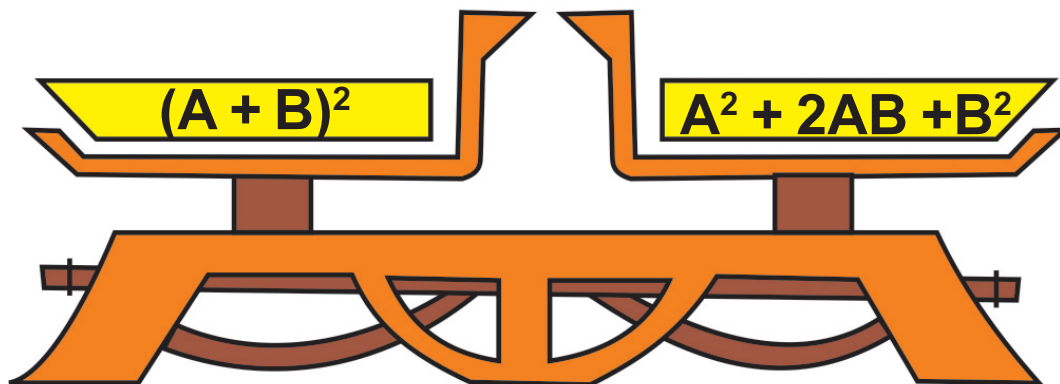
12. Делење на полином со полином	88
13. Рационални изрази	90

РАЗЛОЖУВАЊЕ ПОЛИНОМИ НА МНОЖИТЕЛИ

14. Разложување полином со извлекување заеднички множител пред загради и со групирање	93
15. Разложување на полином од видот $A^2 - B^2$ на прости множител	95
16. Разложување на полином од видот $A^2 + 2AB + B^2$ и $A^2 - 2AB + B^2$ на прости множител	97

РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

17. Прибирање податоци	99
Провери го твоето знаење	102



МОНОМИ И ПОЛИНОМИ

1 ИЗРАЗИ

Попусти се!

- Записите: $5 \cdot 4 - 2$; $7,5 - 3,8 : 2 + 2^2$; $3 - 1,75 : 0,5 + 3,8 \cdot 2$ се **бројни изрази**.



1. Пресметај ја вредноста на изразите:

- $3 \cdot 8 - 2,5 \cdot 6 + 8 : (-4)$;

- $\frac{24 - 2 \cdot 6}{8 : 4 + 2}$.



По кој редослед ќе ги извршуваш операциите во дадените бројни изрази?

Во дадените изрази прво ќе ги извршам операциите множење и делење, а потоа операциите собирање и одземање.



- Спореди го твоето решавање со даденото.

☞ $3 \cdot 8 - 2,5 \cdot 6 + 8 : (-4) = 24 - 15 - 2 = 9 - 2 = 7$, т.е. вредноста на изразот е 7;

☞ $\frac{24 - 2 \cdot 6}{8 : 4 + 2} = \frac{24 - 12}{2 + 2} = \frac{12}{4} = 3$, т.е. вредноста на изразот е 3.

- Бројот што се добива откако ќе се извршат сите операции во даден броен израз се вика **бројна вредност** на изразот.

2. Пресметај ја бројната вредност на изразот $\frac{15 - 2 \cdot 4}{10 : 2 - 5}$.



Колку е вредноста на изразот во именителот? Дали со тој број можеш да извршиш делење?

Вредноста на изразот $10 : 2 - 5 = 0$, со нула не се дели, т.е. делењето со нула нема смисла.



- За броен израз во кој има делење со нула се вели дека нема бројна вредност или дека нема смисла.

3. Одреди кој од наведените изрази нема бројна вредност:

- $36 - 9 \cdot 4$
- $(3 \cdot 5 - 15) : 8$;
- $\frac{23 - 3^2}{24 - 3 \cdot 8}$;
- $\frac{33}{28 - 4 \cdot 7}$.

4. Пресметај ја бројната вредност на следниве изрази:

а) $12 - 2 \cdot 5 + 30 : 6$; б) $6 - 4 : 2 + 7$; в) $5^2 - 3 \cdot 8 + 18 : 3$.

- Кои од дадените изрази имаат еднакви бројни вредности?

■ Воочи дека изразите а) и в) имаат еднакви бројни вредности.

■ За бројните изрази коишто имаат еднакви бројни вредности се вели дека се **еднакви бројни изрази**.

5. Даден е бројниот израз $15 - 3^2 + 2,4 \cdot 5 - (3,6 - 1,2) : 2$. Од што е составен дадениот броен израз?

■ Согледај дека овој броен израз (и други бројни изрази што си ги изучувал) е составен од броеви, од знаците за операциите: собирање, одземање, множење и делење и степенување со експонент природен број, како и од загради.

■ Броевите: 15, 3; 2,4; 5; 3,6 се константи. Константи се и: $\sqrt{2}$, правиот агол, {1, 2, 3, 4}. Може да се каже дека **константи** се точно определени математички објекти.

Појсејти се!

- Периметарот на рамностран триаголник се пресметува со помош на изразот $3 \cdot a$.
- Со кои симболи е образуван овој израз? Што означува секој од симболите?
- Може ли a да биде: 5; 27; 3,2; $\frac{4}{5}$?



6. Нека во $\triangle ABC$: $b = 9$ cm и $c = 5$ cm.

- Колкава може да биде должината на страната a ?
- Кои броеви ги заменува буквата a , ако нејзиниот мерен број е природен број?

Кои неравенства важат за страните a , b и c во триаголникот? При решавањето на задачата примени ги нив.



За страните во триаголникот важат неравенствата: $a < b + c$ и $a > b - c$.



👉 Спореди го твоето решавање со даденото.

$a < 9 + 5$, $a < 14$; $a > 9 - 5$, $a > 4$.

■ Воочи дека буквата a е замена за броевите: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13.

7. Нека x е ознака за елементите на множеството {1, 2, 3, 4, 5}.

- Кои константи ги заменува буквата x ?

■ Воочи дека буквата x е замена за броевите 1, 2, 3, 4 и 5. Секој од тие броеви е нејзина вредност.

- **Променлива** е симбол (најчесто буква) којашто претставува заедничка ознака за елементите на дадено множество.
- Множеството се вика **домен** на променливата (најчесто се означува со D), а секој негов елемент претставува **вредност** на променливата.
- Ако не е зададен доменот на променливата ќе сметаме дека тој е множеството \mathbf{R} на реалните броеви.

8. Одреди го доменот на секоја од променливите во претходните две задачи.

Воочи и зайомни

- Константите: $1, 2, 0, \frac{1}{8}, -9, \sqrt{2}, \dots$ се **изрази**.
- Променливите: $x, y, z, \dots, a, b, c, \dots$ се **изрази**.
- Записите: $3 + 5 \cdot 2, x + y^2, x \cdot (y - 4), \frac{3x - 2}{x - 1}$ и други, образувани од константи и променливи со помош на знаци за операции, се **изрази**.
- Ако во изразот има променлива, тогаш тој се вика **израз со променлива**.

9. Кој од следниве изрази е израз со променлива:

- $3 \cdot 8 - 4^2$;
- $5x - 2$;
- $\frac{x}{2} - 3y$;
- $\frac{12}{7 - 2^2}$.

■ Изразот со променлива $5x - 2$ може да се означи со $A(x) = 5x - 2$.



10. Пресметај ја вредноста на изразот $A(x) = x^2 - 2x - 3$ за $x = -2$.

■ Спореди го твоето решавање со даденото.

$$x^2 - 2x - 3 = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5,$$

т.е. бројот 5 е вредност на изразот $x^2 - 2x - 3$ за $x = -2$ или $A(-2) = 5$.

■ На даден израз со променлива му одговара соодветен броен израз, ако променливата се замени со одредена вредност; вредноста на бројниот израз е **бројна вредност** на изразот со променлива.

11. Пресметај ја вредноста на изразот:

- $5x - 2$ за $x = 2$;
- $2x - y$ за $x = 7,2$ и $y = 6,8$.



12. Нека се дадени изразите: $A(x) = x^2 - 4x - 5$ и $B(x) = \frac{x+4}{x-2}$.
Одреди ги вредностите на $A(x)$ и $B(x)$ за $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} = D$.

- Воочи го во табелата решавањето на оваа задача.

x	-2	-1	0	1	2
$A(x)$	7	0	-5	-8	-9
$B(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-5	нема вредност

- Од табелата воочуваш дека множеството вредности на изразот $A(x) = x^2 - 4x - 5$ во доменот на променливата $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ е множеството $M = \{7, 0, -5, -8, -9\}$.
- Множеството вредности на изразот $B(x) = \frac{x+4}{x-2}$ за $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$ е $N = \{-\frac{1}{2}, -1, -2, -5\}$.
- За која вредност на $x \in D$ изразот $B(x)$ нема вредност?

13. Нека се дадени изразите: $A(x) = x^2 + 2x$ и $B(x) = x(x + 2)$.

- Одреди ги множествата вредности на $A(x)$ и $B(x)$, ако $x \in \{-2, -1, 1, 2\} = D$.
- Спореди ги множествата вредности на $A(x)$ и $B(x)$. Што забележуваш?
- Согледај го во табелава решавањето на оваа задача.

x	-2	-1	1	2
$A(x)$	0	-1	3	8
$B(x)$	0	-1	3	8

- Воочуваш дека за секоја вредност на $x \in D$, $A(x) = B(x)$.
- Изразите со променлива што имаат еднакви бројни вредности за секоја вредност на променливата од доменот се викаат **идентични изрази**.

14. Дадени се изразите $A(x) = x^2 - 3x$ и $B(x) = x(x - 3)$, со домен $D = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Провери дали изразите $A(x)$ и $B(x)$ се идентични.
- Ако два идентични изрази се сврзат со знакот за еднаквост (=) се добива равенство што се вика **идентитет**.

15. Запиши го идентитетот од задачата 14.

Треба да знаеш:

- ◆ да пресметаш вредност на броен израз;
- ◆ да разликуваш броен израз од израз со променлива;
- ◆ што е: константа, променлива и домен на променлива.



Провери се!

- ▲ Пресметај ја бројната вредност на следниве изрази:

$$\bullet \frac{15 + 2 \cdot 6}{17 - 2^3}; \quad \bullet \frac{35 - 4^2}{15 : 3 - 5}.$$

- ▲ Дадени се изразите: $A(x) = 6x - 3x^2$ и $B(x) = 3x(2 - x)$, со домен $D = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Покажи дека равенството $A(x) = B(x)$ е идентитет.

Задачи

1. Пресметај ја бројната вредност на следниве изрази:

а) $5 + 3 \cdot 2^2 - 12$; б) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16} - 2,5$;

в) $\frac{3,6 \cdot 5 + 2}{2^2 - 1}$; г) $\frac{2,8 + 6 \cdot 0,7}{7,8 - 7,6 : 2}$.

2. Одреди кој од следниве бројни изрази нема бројна вредност;

а) $\frac{15 - 2 \cdot 3}{2^3 - 4}$; б) $\frac{6}{3^2 - 9}$;

в) $\frac{6,5 \cdot 3,2 - 14,5}{6 - 2 \cdot 3}$ г) $\frac{3,84 : 2,8}{2 + 4 \cdot 8}$.

3. Кои од следниве изрази се изрази со променлива:

а) $a + 2$; б) $3^2 \cdot 2 - 1$;

в) $\frac{x-1}{x+1}$; г) $\frac{x^2-1}{2}$?

4. Пресметај ја бројната вредност на изразот $x^2 - 3x + 5$ за $x = -2$.

5. За која вредност на x изразот $\frac{5x^2 - 2}{x - 5}$ нема вредност?

6. Во множеството $D = \{1, 2, 3, 4\}$ се задани изразите: $A(x) = 2x^2 - 4x$ и $B(x) = 2x(x - 2)$. Покажи дека изразите $A(x)$ и $B(x)$ се идентични.

7. Покажи дека равенството $4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1)$, за $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, е идентитет.

8. Дадени се изразите: $A(x) = 3x - 6$, $B(x) = 3(x - 2)$ и $C(x) = 3(x - 6)$, при што $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Одреди кое од равенствата: $A(x) = B(x)$, $A(x) = C(x)$ или $B(x) = C(x)$ е идентитет.

2 МОНОМИ

Појсетти се!

- $3a$; $2x^3y^2$; $x^3 - 5$; $\frac{1}{3}xy^3$; $\frac{x}{2y}$; $\frac{5-x}{x^2-1}$ се изразени со променлива.
- Кои се константи, а кои променливи во изразите: $2x$; $3x^2y$; $\frac{1}{2}x$; z ?



1. Дадени се изразите: $5x^2$; $\frac{3}{4}x^2y^2$; $-2ab^2$; y^3 ; 8 ; z .

- Од кои константи и променливи е формиран секој од изразите?
- Кои операции се застапени во дадените изрази?

- Воочи дека некои изрази се само константни, а некои само променливи.
- Во другите изрази меѓу константите и променливите има само операција множење.
- Некои променливи се запишани во вид на степен.
- Дадените изрази претставуваат **МОНОМИ**.

Општо

- **Мономи** се: константи, променливи и изрази што се производ од константи и степени на променливи.

2. Одреди кои од следните изрази се мономи и образложи го одговорот.

$$2x^2y; \frac{2x^2}{y}; \frac{3}{4}(ab)^3; x + 2; 4(z - 3)^2; \frac{3}{5}; y.$$

Појсетти се!

- Производот на степени со исти основи е степен со истата основа и експонент еднаков на збирот од експонентите на множителите.
- Одреди ги следниве производи:
 $a^4 \cdot a^2$; $x^3 \cdot x^5 \cdot x$.
- Помножи ги степените со исти основи во мономот $2a^2a^3b^2b$.





3. Даден е мономот $4xy^3x^2y^2$.

- Од кои множителите е составен мономот?
- Со кои множителите во мономот може да се изврши операцијата множење?
- Изврши го множењето со тие множителите.

- Ако примениш комутативно и асоцијативно својство на множителите во дадениот моном и го извршиш множењето ќе добиеш **идентичен моном** на дадениот.


■ Спореди го твоето решавање со даденото.

 $4x \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y^2 = 4(x \cdot x^2) \cdot (y^3 \cdot y^2) = 4x^3y^5.$

 Воочи дека добиениот моном $4x^3y^5$ има само еден броен множител и нема степени со еднакви основи.

■ Ако во еден моном е извршена операцијата множење со неговите множителите за кои тоа е можно, велиме дека тој моном е сведен во **нормален вид**.

4. Воочи како се сведува мономот $-3x^2y^22x^3y^2$ во нормален вид.

 $-3x^2y^22x^3y^2 = (-3 \cdot 2)(x^2 \cdot x^3) \cdot (y^2 \cdot y^2) = -6x^5y^4.$

5. Запиши ги во нормален вид следниве мономи:

● $5a^2b^32a^4b^2;$ ● $-2x^2y^33y^2x^2;$ ● $2x^3y3xy^2(-3)xy.$

6. Даден е мономот $-6x^5y^3$.

● Кои множителите во мономот се константи, а кои се променливи?

■ Воочи дека во мономот $-6x^5y^3$ множителот -6 е константа, а променливи се x и y .

■ Бројниот множител во нормалниот вид на мономот (во случајов: -6) се вика **коэффициент на мономот**, а производот од променливите (во случајов: x^5y^3), се вика **главна вредност на мономот**.

7. Одреди ги коефициентот и главната вредност на следниве мономи:

● $3a^2b^3;$ ● $-2x^2y^5;$ ● $-5x^2y^32x^3y.$

■ Мономите: x ; x^2y ; ab имаат коефициент еден. Единицата како коефициент не ја запишуваме.

● Која е главната вредност на овие мономи?

■ Мономите: $-x^2$; $-ab$; $-x^2y$ имаат коефициент -1 .

● Запиши ја главната вредност на овие мономи.



8. Дадени се мономите $-3x^3y^2$ и $4x^3y^2$. Воочи ги коефициентите и главните вредности на двата монома.



Што е заедничко за двата монома?

Двата монома имаат еднакви главни вредности.



■ Мономи кои имаат еднакви главни вредности се викаат **СЛИЧНИ МОНОМИ**.

9. Одреди кои од следниве мономи се слични.

- $2x^5y^2$; ● $\frac{3}{4}a^2b^5c^3$; ● $\frac{1}{2}x^5y^2$; ● $-3a^2b^5c^3$; ● $-2x^5y^2$; ● $7x^5a^2$.

Појсеејте се!

■ Два рационални броја со иста апсолутна вредност и спротивни знаци се викаат **спротивни броеви**.

● Запиши го спротивниот број на секој од броевите: а) -5 ; б) $7,8$; в) $-2\frac{1}{3}$; г) $9,25$.

10. Дадени се сличните мономи: $-3x^2y^3$ и $3x^2y^3$.

● Какви се меѓу себе коефициентите на дадените мономи?

■ Воочи дека коефициентите на мономите: $-3x^2y^3$ и $3x^2y^3$ се спротивни броеви.

■ Два слични монома чишто коефициенти се спротивни броеви се викаат **спротивни мономи**.

11. Запиши го спротивниот моном на момот: ● $5a^2x^3y$; ● $-7a^3b^2$.

12. Одреди кои од следниве мономи се спротивни. ● $-7a^2bc^3$; ● $7ab^2c^3$; ● $7a^2bc^3$.



■ Во момот $5x^3y^2z$ променливата x е од трет степен, y од втор степен и z од прв степен. Збирот на степените од сите променливи е $3 + 2 + 1 = 6$; затоа се вели дека момот $5x^3y^2z$ е од шести степен.

13. Одреди го степенот на секоја од променливите во следниве мономи:

- $5x^3y^2z$; ● $2a^3b^3c^2$.

Воочи и зайомни

■ **Степен на моном** претставува збирот од експонентите на променливите во момот. Ако момот е константа, тогаш се смета дека тој има **нулти степен**.

👉 На пример, момот $4a^5bc^2$ е од осми степен, бидејќи $5 + 1 + 2 = 8$, а момот 7 е од нулти степен.

14. Одреди го степенот на секој од мономите:

- $-2x^3$; ● $5a^2b$; ● $-4x^2yz$; ● $8a^2b^2c^5$.

Треба да знаеш:

- ◆ да сведуваш моном во нормален вид;
- ◆ да одредиш коефициент и главна вредност на моном;
- ◆ да дефинираш слични и спротивни мономи;
- ◆ да одредиш степен на моном.



Провери се!

- ▲ Запиши го во нормален вид мономот $-2x^2y^3 \cdot (-3)xy^2$ и одреди ги коефициентот и главната вредност на мономот;
- ▲ Даден е мономот $-4x^3y^2z$.
 - Запиши еден сличен моном на дадениот.
 - Запиши го спротивниот моном на дадениот.
 - Одреди го степенот на дадениот моном.

Задачи

- Запиши ги во нормален вид мономите:
● $-3a^3b^42a^2c$; ● $\frac{1}{3}x^2y \frac{1}{2}xy^3$.
- Одреди ги коефициентите и главните вредности на следните мономи:
● $-4x^2y^3$; ● $\frac{1}{2}a^2b^3c$.
- Запиши моном со коефициент $-0,5$ и главна вредност a^2b^3 .
- Одреди кои од следниве мономи се слични:
● $-3a^2b^2c$; ● $\frac{1}{2}xy^2z^3$;
● $2xy^2z^3$; ● $5a^2b^2c$.
- Одреди кои од следниве мономи се спротивни:
● $\frac{1}{2}a^2b^3c$; ● $2a^2b^3c$;
● $-2ab^2c^3$; ● $-\frac{1}{2}a^2b^3c$.
- Запиши го спротивниот моном на мономот $\frac{1}{3}a^2b^3c$.
- Одреди го степенот на секој од следниве мономи:
● $3a^2bc^3$; ● $-2x^2y$; ● $-5a$; ● $4x^3yz$.
- Запиши два мономи со коефициент -3 и променливи a и b , така што едниот да биде од четврти степен, а другиот од петти степен.

3

СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА МОНОМИ

Појсетти се!

- Збирот $-5 + 12 + 3 - 10 - 7$ се пресметува на следниов начин:

$$-5 + 12 + 3 - 10 - 7 = (-5 - 10 - 7) + (+12 + 3) = -22 + 15 = -7.$$

- Пресметај го збирот:
 - $9 - 4 - 15 + 2 + 8 - 6$;
 - $-6,5 + 2,4 + 3,1 - 4,8 - 0,5$.



1. Дадени се мономите:
 $5x^2y$; $-2x^2y$ и $3x^2y$.

- Дали се слични тие мономи? Образложи го својот одговор.
- Запиши ги мономите во збир и размисли како ќе го пресметаш тој збир.
- Воочи ја постапката за собирање на дадените слични мономи.

ПОСТАПКА		РЕШАВАЊЕ
1	Запишување на збирот на мономите:	$5x^2y + (-2x^2y) + 3x^2y$
2	Ослободување од заградите:	$5x^2y - 2x^2y + 3x^2y$
3	Според дистрибутивното својство:	$(5 - 2 + 3)x^2y$
4	Собирање на коефициентите:	$6x^2y$

- Дали мономот што е резултат од собирањето е сличен со мономите – собироци?

2. Одреди го збирот на мономите: $-9a^3b^2$, $2a^3b^2$ и $-4a^3b^2$.

Воочи и зайомни

- Збирот** на слични мономи е моном сличен на мономите што се собираат, со коефициент еднаков со збирот од коефициентите на мономите–собироци.

3. Одреди го збирот на мономите: $5x^2y^3$, $4x^3y^2$, $-2x^2y^3$ и $-2x^3y^2$.



Во задачава има мономи што не се слични: како ќе го извршиш собирањето во ваков случај?

Во ваков случај ќе ги групирам сличните мономи и потоа ќе ги одредам збирите.



- Спореди го твоето решавање со даденото.

$$\begin{aligned} 5x^2y^3 + 4x^3y^2 - 2x^2y^3 - 2x^3y^2 &= (5x^2y^3 - 2x^2y^3) + (4x^3y^2 - 2x^3y^2) = (5 - 2)x^2y^3 + (4 - 2)x^3y^2 = \\ &= 3x^2y^3 + 2x^3y^2. \end{aligned}$$

Поисети се!

- Да се одземе рационалниот број b од рационалниот број a значи: на бројот a да му се додаде спротивниот број на бројот b , т.е. $a - b = a + (-b)$.
- Пресметај ја разликата на броевите:
 - 9 и 4;
 - 9 и -4 ;
 - -9 и -4 .



4. Од мономот $9a^2b^4$ да се одземе мономот $-4a^2b^4$.

- Воочуваш дека мономите што треба да се одземат се слични мономи.
- Воочи ја постапката за одземање на слични мономи.

1	Запишување на разликата:	$9a^2b^4 - (-4a^2b^4) = 9a^2b^4 + (+4a^2b^4)$
2	Ослободување од заградите:	$9a^2b^4 + 4a^2b^4$
3	Примена на дистрибутивното својство:	$(9 + 4) a^2b^4$
4	Операција со коефициентите:	$13a^2b^4$

- Дали мономот што е разлика е сличен на мономите намаленик и намалител?
- Да се одземе мономот B од мономот A значи на мономот A да му се додаде спротивниот моном на мономот B , т.е. $A - B = A + (-B)$. Мономот $A - B$ се вика **разлика** на мономите A и B .

5. Од мономот $4a^2b$ одземи го мономот $7a^2b$.

■ Воочи ја постапката: $4a^2b - (+7a^2b) = 4a^2b + (-7a^2b) = 4a^2b - 7a^2b = (4 - 7)a^2b = -3a^2b$.

6. Од мономот $7a^2x^3$ одземи го мономот: а) $4a^2x^3$; б) $-4a^2x^3$.

Треба да знаеш:

- ◆ да одредуваш збир на два и повеќе мономи;
- ◆ да ја пресметаш разликата на два слични мономи.

Задачи

1. Одреди го збирот на мономите:
а) $-3a^2b$ и $5a^2b$; б) $2x^2y^5$, $-5x^2y^5$ и x^2y^5 .
2. Одреди го збирот на мономите:
а) $6a^2b$, $-5a^2b^2$, $-2a^2b$ и $-a^2b^2$
б) $5x^2$, $-2x^3$, $-3x^2$, $-x^3$ и $6x^3$.



Провери се!

- ▲ Одреди го збирот на мономите: $-5x^3y^2$, $-2x^3y^2$, $-3xy^2$, $4x^3y^2$ и $-2xy^2$.
- ▲ Од збирот на мономите: $-2x^2y^3$ и $5x^2y^3$ одземи го мономот $-x^2y^3$.
- 3. Од мономот $3ay^3$ одземи го мономот $-5ay^3$.
- 4. Од збирот на мономите $-3x^2y$ и $-2x^2y$ одземи го мономот $-7x^2y$.
- 5. Од збирот на мономите $5a^2b^3$ и $-2a^2b^3$ одземи ја нивната разлика.

Појсетти се!

- Што е моном?
- Кои мономи се викаат слични мономи?
- Запиши ги во збир мономите:
 $2a^2b$, $-3ab^2$, $3a^2b$, ab^2 .
- Одреди го збирот на сличните мономи.
- Колку мономи има во збирот на дадените мономи?

- Изразот $3a^3 - 2a^2b + ab^2$ е збир на мономите: $3a^3$, $-2a^2b$ и ab^2 , кои не се слични. Збир од три мономи, кои не се слични, се вика **трином**.

2. Одреди кој од наведените изрази е бином, а кој е трином:
 $5x^2y - 3xy^2$; $5x^2 - 3x + 5$; $ax^2 - 3a^2y$; $3x^2y - 2xy^2 + y^3$; $5x^2y^3$; $7x^3 - 2x^2 - 3x - 7$.

- Мономите, биномите и изразите кои се збир на три или повеќе мономи се викаат **полиноми**.
- Мономите од кои е образуван полиномот се викаат **членови на полиномот**.

3. Колку членови има секој од следниве полиноми:

- $a^2b - 2ab^2 + 3$;
- $x^3 + 2y^3$;
- $3x^2y$?

Појсетти се!

- Запиши ги во нормален вид следниве мономи: $5xy^23x^3y^2$; $-2x^4y^23xy^2$.
- Мономи што имаат еднакви главни вредности се викаат **слични мономи**.
- Запиши два монома што се слични на мономот $-2x^3y^2$.



1. Дадени се изразите:
 $5x^2y - 3xy^2$ и $3a^3 - 2a^2b + b^3$.

- Од колку мономи е формиран секој од дадените изрази?
- Има ли слични мономи во секој од дадените изрази?
- Воочуваш дека во изразот $5x^2y - 3xy^2$, собироци се мономите: $5x^2y$ и $-3xy^2$, кои не се слични.
- Збир од два монома кои не се слични се вика **бином**.



4. Разгледај го полиномот
 $3x^2y + 2x^2x^2y^2 - 2xy^2x^2y - 5$.

- Воочи ги членовите на полиномот што не се запишани во нормален вид.
- Запиши ги сите членови на полиномот во нормален вид.
- Воочи ја постапката на запишување на членовите на полиномот
 $3x^2y + 2x^2x^2y^2 - 2xy^2x^2y - 5$
во нормален вид.


$3x^2y + 2x^2x^2y^2 - 2xy^2x^2y - 5 = 3x^2y + 2x^4y^2 - 2x^3y^3 - 5$.

5. Даден е полиномот $4x^3y^2 - 2x^2y(3xy^2) - 3x^3y^2xy$. Запиши го полиномот така што сите негови членови да бидат мономи во нормален вид.

6. Даден е полиномот $3x^2y - 2xy^2 - 3x^3y^3 - 4xy^2 + x^2y$.

- Дали во дадениот полином има членови кои се слични мономи?
- Групирај ги сличните мономи во полиномот, а потоа на сличните мономи изврши ги операциите (собирање, односно одземање).

■ Спореди го твоето решение со даденото и воочи ја постапката.

 $3x^2y - 2xy^2 - 3x^3y^3 - 4xy^2 + x^2y = (3x^2y + x^2y) + (-2xy^2 - 4xy^2) - 3x^3y^3 = 4x^2y - 6xy^2 - 3x^3y^3.$

● Дали има слични мономи во така добиениот полином?

■ Ако во еден полином некои членови ги сведеш во нормален вид или извршиш собирање (или одземање) на членови што се слични мономи, тогаш се вели дека на тој полином е извршена **идентична трансформација**.

■ Воочуваш дека во полиномот $4x^2y - 6xy^2 - 3x^3y^3$ сите членови се запишани во нормален вид и нема слични мономи.

Општио

■ Ако во еден полином сите членови се запишани во нормален вид и нема слични мономи, се вели дека полиномот има **нормален вид**.

7. Одреди кои од следниве полиноми се во нормален вид.

● $5x^2 + 3xy + 2y^2$; ● $2x^2 - 3xy + y^2 + 3x^2$; ● $7a^2b - 2abb^2 - 3a^2bab^2$; ● $3x^3y - 2x^2y^2 + xy^3$.

8. Трансформирај го во нормален вид полиномот $7x^3y^2 - 2x^2y^3 - 2x^3y^2 - 3x^2y^3$.

9. Даден е полиномот $2x^2 - 3xy + 5y^2$.

- Одреди го коефициентот на секој член на дадениот полином.

■ Воочи дека коефициенти на членовите на полиномот $2x^2 - 3xy + 5y^2$ се броевите: 2, -3 и 5.

■ Во полиномот $ax^3 - bx^2 + cx - 5$ со променлива x коефициенти на негови членови се: a , $-b$, c и -5 .

■ Коефициентите на мономите што се членови на полиномот се викаат **коефициенти на полиномот**.

10. Одреди ги коефициентите на следниве полиноми со променлива y .

- $4y^2 - 2y - 5$; ● $ay^4 - 2by^2 - 4$.

Поисејти се!

- За кои два монома се вели дека се спротивни мономи?
- Запиши го спротивниот моном на мономот $-3x^2y^3$.
- Степен на моном претставува збирот од експонентите на променливите во него.
- Одреди го степенот на мономот $2x^3y^2z^3$.



11. Дадени се полиномите:

$$6x^3y - 2x^2y^2 - 3x \text{ и } -6x^3y + 2x^2y^2 + 3x$$

- Воочи ги сличните мономи во двата полинома.
- Какви мономи се сличните мономи од двата полинома?



Воочи ги спротивните мономи во двата полинома.

Спротивни се мономите: $6x^3y$ и $-6x^3y$; $-2x^2y^2$ и $2x^2y^2$, $-3x$ и $3x$.



- За полиномите: $6x^3y - 2x^2y^2 - 3x$ и $-6x^3y + 2x^2y^2 + 3x$ се вели дека се *спротивни полиноми*.

Ошишто

- За два полинома се вели дека се **спротивни** ако сите членови од едниот полином се спротивни мономи со членовите на другиот полином и обратно.

12. Запиши го спротивниот полином на полиномот $7x^2y^3 - 2x^3y^2 + 5xy$.



13. Даден е полиномот $-3x^3y^5 + 2x^4y^2 + 5x^3y - 6$.

- Одреди го степенот на секој од членовите на полиномот.
- Кој член на полиномот има најголем степен?
- Од кој степен е членот -6 ?
- Воочуваш дека првиот член ($-3x^3y^5$) е од осми степен, вториот ($2x^4y^2$) е од шести степен, третиот ($5x^3y$) е од четврти степен и четвртиот член (-6) е од нулти степен бидејќи во него нема променлива.
- Најголем степен (осми) има првиот член. За полиномот $-3x^3y^5 + 2x^4y^2 + 5x^3y - 6$ се вели дека е од *осми степен*.

■ **Степен на полином** во нормален вид е најголемиот од степените на мономите што се членови на полиномот.

14. Одреди го степенот на секој од следниве полиноми:

- $2x + 3$; ● $7x^3y^2 + xy^3 - 2xy$; ● $3a^2b - ab^3$; ● $5x - 7y + 2$.

Треба да знаеш:

- ◆ да одредиш дали даден полином е во нормален вид;
- ◆ да доведеш полином во нормален вид;
- ◆ да објасниш кои полиноми се спротивни;
- ◆ да одредиш степен на полином и да ја објасниш постапката за одредување степен.



Провери се!

- ▲ Доведи го во нормален вид полиномот:
 $3x^2y - 5x^2y^2x^3y + 2x^2y$.
- ▲ Запиши го спротивниот полином на полиномот: $1 + 5x - 2x^2 - 3x^3$.
- ▲ Подреди ги по големина на степените, почнувајќи од најголемиот, членовите на полиномот $5x^3y - 2x^2y^3 - 3x^5y + 8$.
Одреди го степенот на дадениот полином.

Задачи

1. Сведи ги во нормален вид членовите на полиномот:
 - $2x^2yxy^2 - 3x^3yy^3x^2$;
 - $-5a^3b^2b^2 + 3a^2b^4b - 8a^2b^2$.
2. Сведи го во нормален вид полиномот.
 - $2x^2y^3 - 3x^3y^2 + 3x^2y^3 - 5x^3y^2$
 - $7x^3 + 2x^2 - 3x - 2x^3 + 2x^2$
3. Трансформирај го во нормален вид полиномот:
 - $2x^3y^2y^2 + 5x^2y^3 - 2x^2y^3 - 2x^2x^2y$,
 - $-2x^2y^2 + 3x^3y - 2x^3y + 2x^2y^2 + 7xy^3$.
4. Одреди ги коефициентите на полиномот по променливата x :
 $5x^3 - 2ax^2 + bx - 3$.
5. Запиши го спротивниот полином на полиномот:
 - $4a^2b - 2ab^2 + 3ab$; ● $-x^2y^3 + 3xy^2 - 2xy$.
6. Пресметај ја бројната вредност на полиномот $x^3 + 6x^2 - 5x - 3$ за $x = -2$.
7. Одреди го степенот на полиномот:
 - $9x^5y^2 - 2x^3y^2 + 2x^2y^4$;
 - $-4a^8b + 2a^7b - 3a^6b$.
8. Во полиномот $5x^2y - 2x^3y^2 + 3x^2y^4 - 7$ подреди ги неговите членови според големината на степените.

5

МНОЖЕЊЕ И СТЕПЕНУВАЊЕ НА МОНОМИ

Појси се!

- Производот на степените a^m и a^n е

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

- Пресметај ги следниве производи:

- $x^5 \cdot x^3$; ● $a^3 \cdot a$.

- Степен се степенува на тој начин што основата на степенот се степенува со производот на показателите, т.е.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

- Пресметај: а) $(x^2)^3$; б) $(a^2)^5$.

- Производ се степенува со природен број така што се степенуваат со тој број сите множители.

На пример: $(a^3 \cdot b^2)^2 = a^6 b^4$.

- Пресметај: а) $(x^5 y^2)^3$; б) $(ab^4)^2$.



- 1. Пресметај го производот на мономите: $3x^2 y^3$ и $2x^3 y$.



Воочи ги коефициентите и степените со еднакви основи. Како ќе го извршиш множењето?

Мојам меѓу себе да ги помножам коефициентите и степените со еднакви основи од двата монома.



- Спореди го твоето решавање со даденото.
 $3x^2 y^3 \cdot 2x^3 y = (3 \cdot 2) \cdot (x^2 \cdot x^3) \cdot (y^3 \cdot y) = 6x^5 y^4$.
- Образложи ја постапката при пресметувањето.

- Мономи се множат на тој начин што се множат нивните коефициенти и степените со исти основи, при што се добива моном во нормален вид.

- 2. Одреди го производот на мономите:

- $-8x^2 y$ и $2xy^2$; ● $-0,6a^2 b^3 c$ и $2,5a^3 bc^2$; ● $\frac{1}{2}x$ и $\frac{4}{5}xy^2$; ● $-\frac{2}{3}ab^2 c$ и $0,5ac^2$.



- 3. Одреди го третиот степен на момот $2x^3 y^2$.



Мојеш ли степенот $(2x^3 y^2)^3$ да го запишеш како производ?

Третиот степен на момот е:
 $(2x^3 y^2)^3 = (2x^3 y^2) \cdot (2x^3 y^2) \cdot (2x^3 y^2)$.

Така добивам производ на три мономи, кој мојам да го пресметам.



- Спореди го твоето решение со даденото.

☞ $(2x^3 y^2)^3 = 2x^3 y^2 \cdot 2x^3 y^2 \cdot 2x^3 y^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (x^3 \cdot x^3 \cdot x^3) \cdot (y^2 \cdot y^2 \cdot y^2) = 2^3 \cdot (x^3)^3 \cdot (y^2)^3 = 8x^9 y^6$.

☞ Воочи дека: $(2x^3 y^2)^3 = 2^3 \cdot (x^3)^3 \cdot (y^2)^3 = 8x^9 y^6$.

- 4. Изврши го степенувањето: ● $(5a^2 b^4 c)^2$; ● $(-3x^2 y^3 z)^3$; ● $(-2a^2 x y^3)^4$.

Треба да знаеш:

- ◆ да пресметаш производ на мономи;
- ◆ да степенуваш моном со експонент природен број.

Задачи

- Одреди го производот на мономите:
 - $2ab^2$ и $3a^2b$;
 - $-2a^2b^3c$ и $\frac{1}{2}abc^5$.
- Одреди ги следниве производи на мономи:
 - $(-5a^3b^2c) \cdot (2a^2b^3c)$;
 - $(1,2x^2y) \cdot (-2xy^2) \cdot (3,5x^3y^3)$.
- Покажи дека за производот на мономите; $-3a^2b^3$ и $2a^3b^2$ важи комутативното својство на множењето.
- Покажи дека за производот на мономите: $-2a^2bc$, $3ab^2c$ и $-4abc^2$ важи асоцијативното својство на множењето.



Провери се!

- ▲ Одреди го производот:
 $(2x^3y^2) \cdot (-3xyz) \cdot (xy^2z)$.
- ▲ Одреди го четвртиот степен на мономот $-2x^2yz^3$.
- 5. Одреди го вториот степен на мономот
 - а) $-2x^2y^3$;
 - б) $\frac{2}{3}a^2bc^3$
- 6. Изврши го степенувањето на мономите:
 - $(-3y^2)^2$;
 - $(-2,5a^2b^3)^2$;
 - $(3x^2y^3)^3$;
 - $(\frac{1}{2}a^2bc^3)^4$.
- 7. Пресметај:
 - $(-2a^2b)^2 \cdot (3ab^2)$;
 - $(3x^3y^2) \cdot (-2x^2y^4)^3$.
- 8. Пресметај:
 - $((x^2y)^2)^3$;
 - $((-2a^3b^2)^3)^2$.

6 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Поисети се!

- Што е полином?
- Именувај ги членовите на полиномот $5x^3y - 2x^2y^2 - 3xy^3$.
- Формирај полином чишто членови се мономите: $-5a^3b^3$; $2a^2b^2$ и $3ab$.
- Бројната вредност на збирот од бројните изрази: $-12 + 3 + 18$ и $5 - 9 + 1$ се пресметува вака:
 $(-12 + 3 + 18) + (5 - 9 + 1) =$
 $= -12 + 3 + 18 + 5 - 9 + 1 =$
 $= (-12 - 9) + (3 + 18 + 5 + 1) =$
 $= -21 + 27 = 6.$
- Пресметај ја бројната вредност на изразот $(-9 - 4 + 15) + (-2 + 8 - 16)$.



- Одреди го збирот на полиномите: $3x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3$ и $4x^3y - 2x^2y^2$.

- Воочи ја постапката за собирање на дадените полиноми.

	Запишување на збирот:	$(3x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3) + (4x^3y - 2x^2y^2)$
	Ослободување од заградите:	$3x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3 + 4x^3y - 2x^2y^2 =$
	Групирање на сличните мономи:	$= (3x^3y + 4x^3y) + (-3x^2y^2 - 2x^2y^2) + (-2xy^3) =$
	Извршување на операциите со сличните мономи:	$= 7x^3y - 5x^2y^2 - 2xy^3$

■ Да се соберат полиноми значи да се запишат последователно (како збир) сите нивни членови со нивните знаци, а потоа да се изврши сведување на сличните мономи, ако ги има.

2. Одреди го збирот на полиномите:

а) $5x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ и $4x^2 - 2x + 3$; б) $2a^3 - 3a^2 + 2a - 4$ и $3a^3 - 5a + 7$.



Појсејте се!

■ Од мономот А да се одземе мономот В значи на мономот А да му се додаде спротивниот моном од мономот В, т.е. $A - B = A + (-B)$.

● Одреди ја разликата на мономите: $5x^2y^3$ и $-2x^2y^3$.

3. Одреди ја разликата на полиномите: $7a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3$ и $3a^3b - 2a^2b^2 + 3ab^3$.

	Запишување на разликата:	$(7a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3) - (3a^3b - 2a^2b^2 + 3ab^3)$
	Ослободување од заградите:	$7a^3b - 5a^2b^2 - 6ab^3 - 3a^3b + 2a^2b^2 - 3ab^3 =$
	Групирање на сличните мономи:	$= (7a^3b - 3a^3b) + (-5a^2b^2 + 2a^2b^2) + (-6ab^3 - 3ab^3)$
	Извршување на операциите со мономите:	$= 4a^3b - 3a^2b^2 - 9ab^3$

Воочи и зайомни

■ Да се одземе полиномот В од полиномот А значи на полиномот А да му се додаде спротивниот полином од полиномот В, т.е. $A - B = A + (-B)$.

4. Пресметај: ● $(3ax^3 - 5bx^2) - (-ax^3 + 2bx^2)$; ● $(7x^3 - 12x^2 + 3x) - (5x^3 - 6x^2 - 2)$.

Треба да знаеш:

- ◆ да пресметаш збир на полиноми;
- ◆ да пресметаш разлика на два полинома;
- ◆ да ја објасниш постапката за собирање, односно одземање полиноми.



Провери се!

- ▲ Трансформирај го во нормален вид на полином изразот:
 $(5a^5b^2 - 2a^3b^4) + (-a^5b^2 + 5a^3b^4) + (2a^5b^2 - 3a^3b^4)$
- ▲ Утврди дали е точно равенството:
 $(9a^3 - 4a^2 - 3) - (7a^3 - a^2 - 3) = 2a^3 - 3a^2$.

Задачи

1. Пресметај го збирот на полиномите:
а) $3a^2b - 2ab^2$ и $a^2b - 3ab^2$,
б) $7x^3 - 4x^2 + x - 3$ и $7x^2 - 3x + 5$.
2. Трансформирај го во нормален вид на полином изразот:
а) $(5x^4 - 2x^3 + 8) + (4x^4 - x^3 + 2x^2 - 5)$;
б) $(-8a^3b - 4a^2b^2 + 3ab^3) + (a^3b + 4a^2b^2 - ab^3)$.
3. Одреди ја бројната вредност на изразот:
 $(6y^3 - 7y^2 + y) + (-4y^3 + 2y^2 - y)$, за $y = 2$.
4. Кон полиномот $5x^2y^3 - 2x^3y^2$ додај го збирот на полиномите:
 $2x^2y^3 + x^3y^2$ и $x^2y^3 - x^3y^2$.
5. Покажи дека вредноста на изразот
 $(3x^2 - 2x + 5) + (-x^2 - 2x + 1) + (-2x^2 + 4x - 2)$
не зависи од x .
6. Пресметај ја разликата на полиномите:
а) $7x^3 - 2x^2 - 5x$ и $4x^3 - 5x^2 - 4x$;
б) $2,5a^3 - 3b^3$ и $-1,8a^3 - 0,6b^3$.
7. Трансформирај го во нормален вид на полином изразот:
а) $(3x^2 - 2xy - 2y^2) - (x^2 + 2xy - 6y^2)$;
б) $(x^2 - 4xy + 4y^2) - (3x^2 - y^2)$.
8. Одреди ја бројната вредност на изразот:
 $(3x^3 - 2x^2 - 4x - 1) - (-x^3 + x^2)$ за $x = -2$.
9. Одреди полином P таков што:
 $P + (x^2 + 2xy - 3y^2) = 3x^2 - 4xy - 3y^2$.
10. За полиномите: $A = 3a^2 - 4a + 1$,
 $B = -a^2 + 5a - 4$ и $C = 2a^2 - a + 6$ одреди:
● $A - (B + C)$; ● $A - (B - C)$.

7

МНОЖЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО МОНОМ

Поисети се!

- Моном се множи со моном така што ќе се помножат нивните коефициенти и степените со исти основи, при што се добива моном во нормален вид.
На пример: $-3a^2b \cdot 2a^3b^2 =$
 $= (-3 \cdot 2) \cdot (a^2 \cdot a^3) \cdot (b \cdot b^2) = -6a^5b^3$.
- Пресметај: $-3x^5y^2 \cdot 4xy^2$.
- Дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето се запишува:
 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- Пресметај на два начина:
 $(15 + 8) \cdot 6 = 23 \cdot 6 = \blacksquare$;
 $(15 + 8) \cdot 6 = 15 \cdot 6 + 8 \cdot 6 = \blacksquare$.



- Дистрибутивното својство на множењето спрема собирањето овозможува производот на полином и моном да се претстави во вид на полином.

1. Воочи како се пресметува производот на полиномот $3x^2 + 4y^3$ и мономот $2x^3y^2$.

	Запишување на производот:	$(3x^2 + 4y^3) \cdot (2x^3y^2)$
	Примена на дистрибутивното својство на множењето спрема собирањето:	$= (3x^2 \cdot 2x^3y^2) + (4y^3 \cdot 2x^3y^2)$
	Множење на мономите во заградите (т.е. сведување на нормален вид):	$= 6x^5y^2 + 8x^3y^5$

2. Одреди го производот: ● $(2x^3 - 3x^2 + 5x) \cdot 4x^2$; ● $(3a^2 - 2ab + b^2) \cdot 5a^2b^2$.

■ Полином се множи со моном на тој начин што секој член на полиномот ќе се помножи со мономот и добиениот збир ќе се претстави како полином во нормален вид.

3. Одреди го производот: ● $4ax^2 \cdot (2a^3x - 5a^2x^2 + 3ax^3)$; ● $(2,5xy^2 - 1,4x^2y) \cdot (-2x^2y^2)$.

Треба да знаеш:

- ◆ да помножиш полином со моном;
- ◆ да ја објасниш постапката на множење полином со моном.



Провери се!

- ▲ Пресметај го производот:
а) $(-5) \cdot (4x^3 - 3x^2 + x)$;
б) $(-2x^3y - 3xy^3 + 5) \cdot (-2x^2y^2)$.

Задачи

1. Пресметај го производот:
а) $(2x^2 - 3y^3) \cdot 4xy$;
б) $(5a^3b - 3a^2b^2 + ab^3) \cdot (-2a^2b^2)$.
2. Одреди го производот:
а) $4 \cdot (5a^2 + 2a - 3)$;
б) $(-2) \cdot (-3,5x^3 + x^2y^2 - 3y^3)$.
3. Одреди ги следниве производи:
а) $(\frac{3}{4}a^2b - 1\frac{1}{2}ab^2 - \frac{5}{6}b^3) \cdot 1\frac{1}{3}ab$;
б) $4xy \cdot (\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - y^3)$.
4. Нека се дадени изразите:
 $A = 2x^3 - 3x^2 + x$, $B = x^3 + x^2 - 3x$ и $C = 5x^2$. Сведи ги на полином во нормален вид изразите:
а) $(A + B) \cdot C$; б) $C \cdot (A - B)$.
5. Претстави ги како полином во нормален вид изразите:
а) $(3a^2b - ab^2) \cdot a^2b^2 - 2a^2b \cdot ab^3$;
б) $(3x^3 - x^2 + 2x) \cdot 5x - (4x^2 - 3) \cdot x^2$.
6. Пресметај ја бројната вредност на изразот $(3x^2 - 2x + 1) \cdot 2x - (x^2 - 3x + 5) \cdot 4x$ за $x = 2$.

8 МНОЖЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Појсееџи се!

■ Полином се множи со моном на тој начин што секој член од полиномот се множи со момот и добиените производи се собираат.

● Пресметај го производот:

а) $(a + b) \cdot c$;

б) $x(2 + y)$;

в) $(2a^2b - 3ab^2 + 5) \cdot 2ab$.



1. Дадени се полиномите $a + b$ и $c + d$.
Пресметај го производот $(a + b) \cdot (c + d)$.



На што ќе се сведе множењето, ако биномот $c + d$ го замениш со A ?



Тогаш множењето ќе се сведе на производот $(a + b)A$, т.е. $(a + b)A = aA + bA$.



Што ќе добиеш ако A го замениш со $c + d$?

Ќе добијам:

$$aA + bA = a(c + d) + b(c + d).$$



■ Спореди го твоето решавање со даденото:

☞ $(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot A = aA + bA$ (при што $A = c + d$)
 $= a(c + d) + b(c + d)$
 $= ac + ad + bc + bd$, т.е.

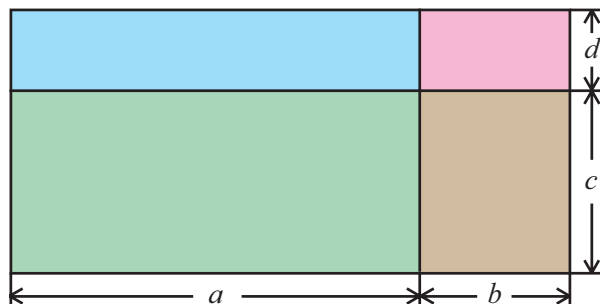
$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

■ Производот на полиномите $a + b$ и $c + d$ е еднаков на збирот од производите на секој член од едниот полином со секој член од другиот полином.

2. Пресметај го производот $(2x + 3) \cdot (y + 5)$.





3. Покажи дека равенството $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ може да се толкува геометриски како еднаквост меѓу: плоштината на големиот правоаголник и збирот од плоштините на четирите помали правоаголници (на цртежот).

● Запиши ги плоштините на секој од правоаголниците според дадените димензии.



4. Пресметај го производот на полиномите: $4x^2 - 5x + 3$ и $2x - 3$.

■ Воочи ја постапката за множење на дадените полиноми.

	Запишување на производот:	$(4x^2 - 5x + 3)(2x - 3)$
	Множење на секој член од едниот полином со секој член од другиот:	$= 4x^2 \cdot 2x + 4x^2 \cdot (-3) - 5x \cdot 2x - 5x \cdot (-3) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-3)$
	Извршување на множењето:	$= 8x^3 - 12x^2 - 10x^2 + 15x + 6x - 9$
	Сведување на полином во нормален вид:	$= 8x^3 - 22x^2 + 21x - 9.$

■ Полином се множи со полином на тој начин што секој член од едниот полином ќе се помножи со секој член на другиот полином и добиениот збир ќе се претстави како полином во нормален вид.

5. Пресметај го производот $(a^3 + 2a^2b - 3ab^2) \cdot (5a - 3b)$.

6. Трансформирај го производот $(2x - 3) \cdot (3x + 2) \cdot (5x - 1)$ во полином што ќе има нормален вид.

■ Воочи дека дадениот производ, поради асоцијативното својство на множењето, може да се запише: $((2x - 3) \cdot (3x + 2)) \cdot (5x - 1)$ и да се изврши прво множењето на првите два множителя.

Поисети се!

- Двоцифрен број со цифра на десетките a и цифра на единиците b во развиена форма се запишува $10a + b$.
- Запиши ги во развиена форма броевите 62 и 68.



■ Правилото за множење на полиноми има многу примени. Еве една (мала) примена за брзо определување на производи на броеви од видот:

$$62 \cdot 68; 74 \cdot 76; 53 \cdot 57;$$

тоа се производи на броеви од иста десетка на кои збирот од единиците е еднаков на 10.

7. Пресметај го производот $(10a + b) \cdot (10a + c)$, при што $b + c = 10$.

- Користејќи го добиениот резултат, пресметај $62 \cdot 68$.

■ Воочи ја постапката за одредување на производот $(10a + b) \cdot (10a + c)$, каде што $b + c = 10$.

$$\begin{aligned} (10a + b)(10a + c) &= 100a^2 + 10ac + 10ab + bc = 100a^2 + 10a(b + c) + bc = \\ &= 100a^2 + 10a \cdot 10 + bc \quad (\text{за } b + c = 10) \\ &= 100a^2 + 100a + bc \\ &= 100a(a + 1) + bc. \end{aligned}$$

- Равенството $(10a + b)(10a + c) = 100a(a + 1) + bc$ можеш да го искористиш за решавање на задачата.
- Според тоа равенство: $62 \cdot 68 = 100 \cdot 6 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 4200 + 16 = 4216$.
- Производот $62 \cdot 68$ може да се пресмета и усно на тој начин што бројот на десетките (6) се множи со број што е за 1 поголем од него (7) и кон добиениот производ (42) се допишува производот од единиците на двата броја (16), т.е. $62 \cdot 68 = 4216$.

8. Пресметај ги усно производите: а) $34 \cdot 36$; б) $81 \cdot 89$; в) $53 \cdot 57$.

Треба да знаеш:

- ◆ да определуваш производ на полиноми;
- ◆ да ја објаснуваш постапката за определување производ на полиноми.



Провери се!

- ▲ Пресметај го производот:
 $(4a^2 - 2ab + b^2) \cdot (2a + b)$.
- ▲ Што недостасува за равенството да биде точно:
 $(2x^2 - 3)(3x^2 - 2) = 2x^2 \cdot 3x^2 - 3(-2)$?

Задачи

1. Пресметај ги следниве производи:
а) $(2a + 3b)(a - 2b)$;
б) $(x^2 + 2xy - 5y^2)(2x - 3y)$.
2. Пресметај:
а) $(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a + b)$;
б) $(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(x - y)$.
3. Пресметај:
а) $(1,2a^3 - 2,5a^2 + 0,2a)(a^2 - 1,4)$;
б) $(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x)(6x - 1)$.
4. Трансформирај го во полином во нормален вид изразот:
 $(3x^2 - 2x + 5)(4x - 3)(2x - 1)$.
5. Пресметај ја вредноста на изразот:
 $(x + 1)(x + 2) + (x - 3)(x + 4)$ за $x = 3$.
6. Пресметај ги усно производите:
а) $72 \cdot 78$; б) $63 \cdot 67$.

9 ПРОИЗВОД ОД ЗБИР И РАЗЛИКА НА ДВА ИЗРАЗА

Поисети се!

- Полином се множи со полином така што секој член на едниот полином се множи со секој член од другиот полином и добиениот збир се претставува како полином во нормален вид.
- Одреди го производот:
 $(2a^2 - 3b^2)(4a - b^2)$.
- Збирот на два спротивни мономи е нула.
- Кој од наведените изрази има вредност 0:
а) $-3a^2b + 3ab^2$; б) $2x^3y^2 - 2x^3y^2$;
в) $a^2b - ab^2$; г) $-x^3y + x^3y$?



1. Нека А и В се изрази. Пресметај го производот $(A + B)(A - B)$ и добиениот полином сведи го во нормален вид.

- Спореди го твоето решавање со даденото:

☞ $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$, т.е. се добива идентитетот

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Зайомни

- Производот од збирот и разликата на два изрази е еднаков на разликата од нивните квадрати.

- Идентитетот $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ претставува **формула за скратено множење** на збир и разлика на два изрази.

2. Пресметај го производот $(2a + 3b)(2a - 3b)$ со помош на формулата за скратено множење: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

- Воочи на што е еднакво А, а на што В.

- Спореди го твоето решавање со даденото и воочи ја постапката.

☞ Согледај дека $A = 2a$ и $B = 3b$.

☞ Замени во формулата за скратено множење: А со $2a$ и В со $3b$:

☞ $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$.


3. Со помош на формулата за скратено множење пресметај го производот:

а) $(3x - y)(3x + y)$; б) $(5a + 2b)(5a - 2b)$; в) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$; г) $(40 - 1)(40 + 1)$.



4. Со помош на формулата $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$, пресметај го производот $42 \cdot 38$.

- Бројот 42 може да се претстави како збир на броевите 40 и 2, т.е. $42 = 40 + 2$.
- Запиши го бројот 38 како разлика на истите броеви.
- Воочи како ќе се примени формулата, за да се пресмета производот $42 \cdot 38$:

 $42 \cdot 38 = (40 + 2)(40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596.$

■ Ова е еден начин за пресметување производ на два броја, од кои едниот може да се запише како збир од два броја, а другиот како разлика од истите броеви.

5. Со помош на формулата за скратено множење, пресметај:
а) $43 \cdot 37$; б) $68 \cdot 72$; в) $201 \cdot 199$.

Треба ја знаеш:

- ◆ да одредиш производ од збир и разлика на два монома;
- ◆ да ја објасниш постапката за одредување производ од збир и разлика на два монома;
- ◆ да ја применуваш постапката за одредување производ од збир и разлика на два монома во решавање задачи.



Провери се!

- ▲ Одреди го производот:

$$(-2a^2 + 3b^2) \cdot (-2a^2 - 3b^2)$$

- ▲ Пресметај го усно производот: $73 \cdot 67$.

Задачи

1. Одреди ги производите:
а) $(x - 3)(x + 3)$; б) $(2a + 3)(2a - 3)$.
2. Претстави ги како полином во нормален вид изразите:
а) $(3x^2y - 2xy^2)(3x^2y + 2xy^2)$;
б) $(6ab^3 - 5a^3b)(6ab^3 + 5a^3b)$.
3. Одреди ја вредноста на следниве изрази:
а) $(60 - 1)(60 + 1)$; б) $(100 + 4)(100 - 4)$.
4. Одреди ја вредноста на производите:
а) $93 \cdot 87$; б) $202 \cdot 198$.
5. Трансформирај го во полином во нормален вид изразот:
а) $(x - 2y)(x + 2y) + 2x^2 - y^2$;
б) $(a^2b + ab^2)(a^2b - ab^2) + 2a(a^3b^2 - ab^4)$.
6. Одреди го производот што е еднаков на разликата од квадратите:
а) $x^2 - 9$; б) $4x^2 - 9y^2$.
7. Трансформирај го дадениот израз во бином:
а) $(0,2ab - c)(0,2ab + c)$;
б) $(\frac{x}{5} + \frac{xy}{2}) \cdot (\frac{xy}{2} - \frac{x}{5})$.
8. Претстави го дадениот израз во полином во нормален вид.
а) $(z + 3)(z - 3)(z^2 + 9)$;
б) $(x + y - 1)(x + y + 1)$.

Појси се!

- Ако A и B се кои било мономи, тогаш изразите $(A+B)^2$ и $(A-B)^2$ се викаат квадрат на збир, односно квадрат на разлика на два монома.
- Запиши го квадратот од збирот и разликата на мономите: $3x$ и $2y$.
- Запиши ги како производ степените:
а) a^2 ; б) $(a+b)^2$; в) $(a-b)^2$.



1. Одреди го квадратот на збирот $A+B$.



Како ќе постапиш за да одредиш $(A+B)^2$?

Ќе запишам: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$, а потоа ќе го пресметам производот.



- Спореди го твоето решавање со даденото:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2, \text{ т.е.}$$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Воочи и зайомни!

- Квадратот од збир на два монома е еднаков на збирот од квадратот на првиот моном, удвоениот производ на првиот и вториот моном, и квадратот на вториот моном.

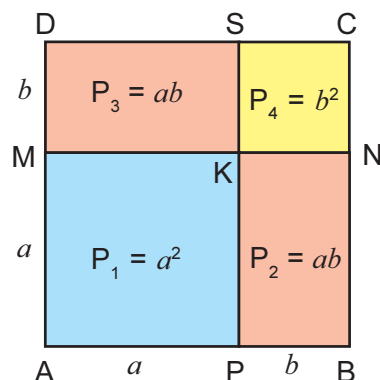
- ☞ Воочи ја постапката за одредување квадрат на збир на следниов пример:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

2. Одреди ги квадратите на следните биноми: ● $(3a + 2b)^2$; ● $(x^2 + y^2)^2$.

3. Даден е квадратот $ABCD$, со страна $\overline{AB} = a + b$. Пресметај ја плоштината на тој квадрат.

- Воочи на колку делови е поделен квадратот $ABCD$ со отсечките MN и PS .
- Воочи ги димензиите на секој од деловите.
- Одреди ја плоштината на секој дел.
- Плоштината на квадратот P е збир од плоштините P_1, P_2, P_3 и P_4 на деловите, т.е. $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.
- Запиши го тоа со одредените плоштини.
- Воочуваш дека: $(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



- На цртежот геометриски е прикажана формулата $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

4. Со примена на формулата $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ може да се пресмета 62^2 .

● Запиши го бројот 62 во развиена форма.

● Примени ја формулата.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

👉 $62^2 = (60 + 2)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 2 + 2^2 = 3600 + 240 + 4 = 3844$.



5. Одреди го квадратот на разликата $A - B$.



Како ќе постапиш за да одредиш $(A - B)^2$?

Ќе постапам на следниот начин:

$$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$



■ Воочуваш дека:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Зайомни!

■ Квадратот на разлика на два монома е еднаков на квадратот на првиот моном, минус двојниот производ на првиот и вториот моном, плус квадратот на вториот моном.

■ Формулите: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ и $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ уште се викаат формули за скратено множење.

👉 Разгледај ја постапката за одредување квадрат на разлика на следниов пример:

$$(5a - 2b)^2 = (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 2b + (2b)^2 = 25a^2 - 20ab + 4b^2.$$

6. Одреди ги квадратите на следниве полиноми: ● $(3x - 4y)^2$; ● $(2a^2 - b^2)^2$.

7. Со примена на формулата за квадрат на разлика на два монома, пресметај 48^2 . Обиди се сам.

■ Запиши го бројот 48 како разлика на 50 и 2.

👉 Примени ја формулата $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

■ Спореди го твоето решавање со даденото

👉 $48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$.

8. Пресметај:

● 69^2

● 37^2

● 98^2 .



Треба да знаеш:

- ◆ да одредиш квадрат на збир од два монома;
- ◆ да ја објасниш постапката за одредување квадрат на збир на два монома и да ја примениш во задачи;
- ◆ да одредиш квадрат на разлика на два монома;
- ◆ да ја објасниш постапката за одредување квадрат на разлика на два монома и да ја примениш во задачи.



Провери се!

- ▲ Одреди: ● $(a + 3b)^2$; ● 82^2 .
- ▲ Одреди: ● $(\frac{1}{3}x - 3y)^2$; ● 57^2 .

Задачи

1. Одреди ги следниве квадрати:
а) $(x + 4)^2$; б) $(2x + 7y)^2$; в) $(3x^2 + 5y^2)^2$.
2. Со примена на формулата $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ одреди:
а) 41^2 ; б) 72^2 ; в) 105^2 .
3. Запиши го како полином во нормален вид изразот:
а) $(a + 3)^2 + (a + 4)^2$;
б) $(3x + 2y)^2 + (2x + y)^2 - (x + y)^2$.
4. Одреди кој бином на квадрат е еднаков на триномот:
а) $a^2 + 2ax + x^2$;
б) $4x^2 + 12xy + 9y^2$.
5. Реши ги следниве равенки:
а) $(x + 2)^2 - x^2 = 16$;
б) $(3x + 5)^2 - 9x^2 = 55$.
6. Одреди ги следниве квадрати:
а) $(a - 3)^2$; б) $(3x - 2y)^2$; в) $(4a^2 - b^2)^2$.
7. Со примена на формулата $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ одреди:
а) 38^2 ; б) 59^2 ; в) 96^2 .
8. Запиши го како полином во нормален вид изразот:
а) $(3x - y)^2 + (x - 2y)^2$;
б) $(5a - 2b)^2 - (a - b)^2 + (a + 3b)^2$.
9. Одреди кој бином на квадрат е еднаков на триномот:
а) $x^2 - 4x + 4$; б) $9x^2 - 12xy + 4y^2$.
10. Сведи го на нормален вид полиномот:
а) $(3x - 1)^2 + (x - 5)(x + 5)$;
б) $(2a - 3b)^2 + (2a + 3b)^2$.

11 ДЕЛЕЊЕ НА МОНОМИ. ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО МОНОМ

Појсетти се!

- Степени со еднакви основи се делат така што основата се препишува, а експонентите на степените се одземаат. На пример: $a^8 : a^3 = a^{8-3} = a^5$.
- Одреди ги количниците:
 - а) $x^7 : x^2$; б) $y^5 : y^4$.



1. Пресметај го количникот на мономите: $6x^4y^5$ и $2x^2y^2$.

- Воочи ја постапката:

$$6x^4y^5 : (2x^2y^2) = (6 : 2)(x^4 : x^2)(y^5 : y^2) = 3x^2y^3.$$



Образложи како е извршено делењето на мономите.

Поделени се коефициентите и поделени се степените со исти основи.



- Запиши го делењето на мономите во вид на дробка, а потоа одреди го количникот.

- Спореди го твоето решение со даденото: $\frac{6x^4y^5}{2x^2y^2} = \frac{6}{2} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y^5}{y^2} = 3x^2y^3$.

2. Пресметај го количникот $12a^6y^7 : (-6a^3y^2)$.

- Моном со моном се дели така што ќе се подели коефициентот на деленикот со коефициентот на делителот, а степените од главната вредност на деленикот се делат со степените со исти основи од главната вредност на делителот и добиените количници се запишуваат како производ.

3. Одреди ги количниците: ● $-15a^5x^7 : (5a^2x^3)$; ● $4x^5y^6 : (-\frac{1}{2}x^2y)$.

Појсетти се!

- Дистрибутивното својство на делењето оддесно во однос на собирањето може да се запише: $(a + b) : c = a : c + b : c$.
- Пресметај:
 - $(32 + 48) : 8 = 32 : 8 + 48 : 8 = \blacksquare$;
 - $(x^5 + x^7) : x^2 = x^5 : x^2 + x^7 : x^2 = \blacksquare$.



4. Полиномот $8a^5 - 4a^4 + 6a^3$ подели го со мономот $2a^2$.



Како ќе го искористиш дистрибутивното својство?

Секој член на полиномот $8a^5 - 4a^4 + 6a^3$ ќе го поделам со мономот $2a^2$.




- Спореди го твоето решавање со даденото.

☞ $(8a^5 - 4a^4 + 6a^3) : (2a^2) = (8a^5) : (2a^2) + (-4a^4) : (2a^2) + (6a^3) : (2a^2) = 4a^3 - 2a^2 + 3a$.

5. Изврши го делењето на полиномот со мономот: $(-6x^5 - 9x^4 + 3x^3) : (-3x^2)$.

- Примени го дистрибутивното својство.
- Изврши ги назначените делења.

■ Спореди го твоето решавање со даденото!

 $(-6x^5 - 9x^4 + 3x^3) : (-3x^2) = (-6x^5) : (-3x^2) + (-9x^4) : (-3x^2) + (3x^3) : (-3x^2) = 2x^3 + 3x^2 - x$.

■ Полином се дели со моном така што секој член од полиномот ќе се подели со мономот, а добиените количници ќе се соберат.

6. Пресметај ги количниците:

- $(18x^5y^3 - 24x^4y^4 + 12x^3y^5) : (6x^2y^2)$;
- $(4a^3b^2 - 8a^4b^3) : (-4a^2b)$.

Треба да знаеш:

- ◆ да одредиш количник на два монома;
- ◆ да ја објасниш постапката за делење на моном со моном;
- ◆ да поделиш полином со моном;
- ◆ да ја објасниш постапката за делење на полином со моном.



Провери се!

▲ Сведи го на полином во нормален вид изразот:

$$(-4x^3y^4) : (2x^2y^2) + (-6x^5y^3) : (-2x^3y^2) = \blacksquare.$$

▲ Одреди го количникот:

$$(6a^5b^4 - 9a^4b^3 + 3a^3b^2) : (3a^3b^2) = \blacksquare.$$

Задачи

1. Пресметај ги следниве количници:

а) $(16x^3y^2) : (4xy)$; б) $(-9a^3b^5) : (3a^2b^2)$.

2. Пресметај:

а) $(1,44x^5y^2) : (1,2x^2y^2)$;

б) $(\frac{3}{5}a^4b^2) : (-\frac{2}{5}a^2b^2)$.

3. Сведи ги на моном во нормален вид изразите:

а) $((-2a^3b) \cdot (-3ab^3)) : (-6a^2b^2)$;

б) $\left(\left(\frac{1}{2}x^3y^2 \right) \cdot \left(\frac{4}{5}x^2y^3 \right) \right) : \left(\frac{5}{6}x^2y^2 \right)$.

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\frac{(3a^2b)^2}{2a^2b} \text{ за } a = -2 \text{ и } b = 2.$$

5. Пресметај ги количниците:

а) $(4x^5y^2 - 6x^4y^3 - 8x^3y^4) : (2x^3y^2)$;

б) $(12a^3x^4 - 8a^4x^3 - 4a^5x^2) : (4a^2x^2)$.

6. Пресметај:

а) $(-4x^5 + 12x^4y + 16x^3y^2) : (4x^3)$;

б) $(4a^2b - 12a^4b^3) : (4a^2b)$.

7. Сведи ги на полином во нормален вид следниве изрази:

а) $(9a^2b^3 - 12a^4b^4) : 3a^2b - (2 + 3a^2b) \cdot b^2$;

б) $(x^2 - 2xy) \cdot (3x^2) - (9xy^3 - 12x^4y^2) : (3xy)$.

8. Одреди го x од равенките:

а) $6x + (4x^3 - 12x^2) : 2x^2 = 10$;

б) $6x - (14x^2 - 21x^3) : 7x^2 = 16$.

Појсетѝ се!

- Ако $(2a^2 - 5)(3a - 2) = 6a^3 - 4a^2 - 15a + 10$, тогаш на што е еднакво:
 - $(6a^3 - 4a^2 - 15a + 10) : (2a^2 - 5)$;
 - $(6a^3 - 4a^2 - 15a + 10) : (3a - 2)$?
 - Како е добиен првиот член на производот $6a^3 - 4a^2 - 15a + 10$?



1. Полиномот $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6$ да се подели со полиномот $2x - 3$.

- Подели го првиот член на деленикот со првиот член на делителот.
- Помножи го делителот $2x - 3$ со добиениот количник.
- Обиди се добиениот производ да го одземеш од деленикот.

- Ако ги изврши претходните три активности, ти го доби првиот член $3x^2$ од количникот. Ако ги спроведеш истите три активности со остатокот и делителот ќе го добиеш вториот член од количникот.
- Воочи ја постапката за делење на дадените полиноми. Согледај како таа практично се изведува.

Запишување на делењето	Постапки при делењето	Извршување на одделните операции
$\begin{array}{r} (6x^3 - 7x^2 - 7x + 6) : (2x - 3) = 3x^2 + x - 2 \\ - 6x^3 + 9x^2 \\ \hline 2x^2 - 7x + 6 \\ - 2x^2 + 3x \\ \hline -4x + 6 \\ -4x + 6 \\ \hline 0 \end{array}$	<p>Првиот член $6x^3$ на деленикот се дели со првиот член $2x$ на делителот и се добива првиот член на количникот;</p>	$(6x^3) : (2x) = 3x^2$
	<p>Делителот $2x - 3$ се множи со првиот член $3x^2$ на количникот и добиениот производ $6x^3 - 9x^2$ се одзема од деленикот, т.е. со менување на знаците се додава спротивниот израз $-6x^3 + 9x^2$.</p>	$(2x - 3) \cdot (3x^2) = 6x^3 - 9x^2$
	<p>Првиот член $2x^2$ на остатокот од одземањето се дели со првиот член $2x$ на делителот и се добива вториот член на количникот;</p>	$(2x^2) : (2x) = x$
	<p>Делителот $2x - 3$ се множи со вториот член x на количникот и добиениот производ се одзема од остатокот $2x^2 - 7x + 6$;</p>	$(2x - 3) \cdot x = 2x^2 - 3x$
	<p>Првиот член $-4x$ на остатокот $-4x + 6$ се дели со првиот член $2x$ на делителот $2x - 3$ и се добива третиот член на количникот;</p>	$(-4x) : (2x) = -2$
	<p>Делителот $2x - 3$ се множи со третиот член -2 на количникот и добиениот производ се одзема од остатокот $-4x + 6$.</p>	$(2x - 3) \cdot (-2) = -4x + 6$
	<p>Се добива остаток 0, со што делењето е завршено.</p>	

- Според постапката што ја согледа при делењето на полиномите, одговори на прашањата:
- Со кој член од делителот се врши делење?
- Кои членови се делат со првиот член на делителот?

2. ■ Разгледај ја постапката на делење полином со полином на примерот $(x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10) : (x^2 - 2)$.

- Образложи ги постапките од 1 до 6 што се запишани.

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 6x - 10) : (x^2 - 2) = x^2 - 3x + 5 \\
 \begin{array}{r}
 x^4 - 2x^2 \\
 - + \\
 \hline
 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 10 \\
 - 3x^3 + 6x \\
 + - \\
 \hline
 5x^2 - 10 \\
 - 5x^2 - 10 \\
 + \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

1. $x^4 : x^2 = x^2$
2. $(x^2 - 2) \cdot x^2 = x^4 - 2x^2$
3. $(-3x^3) : x^2 = -3x$
4. $(x^2 - 2) \cdot (-3x) = -3x^3 + 6x$
5. $(5x^2) : x^2 = 5$
6. $(x^2 - 2) \cdot 5 = 5x^2 - 10$.

- 3.** Одреди ги количниците:
- a) $(x^3 + 5x^2 + 8x + 4) : (x + 1)$;
 - б) $(3a^3 - 5a^2 + 14a - 8) : (3a - 2)$.

- 4.** Провери дали е точно извршено делењето:
 $(3a^4 - 2a^3 - 8a^2 + 6a - 3) : (a^2 - 3) = 3a^2 - 2a + 1$.

- Воочи дека при делењето на полином со полином треба претходно членовите во полиномите да бидат подредени од најголем до најмал степен на една од променливите.

Треба да знаеш:

- ◆ да делиш полином со полином;
- ◆ да ја објасниш постапката за делење на полином со полином.



Провери се!

- ▲ Одреди го количникот на полиномите $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ и $x + 2$, а потоа провери дали точно си го извршил делењето.

Задачи

- 1.** Ако $(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1$, тогаш на што е еднакво
 - a) $(a^2 - 1) : (a - 1)$;
 - б) $(a^2 - 1) : (a + 1)$?
- 2.** Одреди ги следниве количници:
 - a) $(2a^2 - 7ab + 6b^2) : (a - 2b)$;
 - б) $(6x^3 - 11x^2 + 13x - 12) : (3x - 4)$;
 - в) $(2a^3 + 5a^2b - 5ab^2 + b^3) : (2a - b)$.
- 3.** Провери дали се точни равенствата:
 - a) $(6x^3 - 11x^2 + 23x - 15) : (x^2 - x + 3) = 6x - 5$
 - б) $(2a^3 + 5a^2 - 6a - 15) : (a^2 - 3) = 2a + 5$.
- 4.** Одреди го полиномот А така што да биде точно равенството:
 $(x^3 - y^3) : A = x - y$.

Појсетти се!

- Бројни изрази се: $14 - 6$; $25 + 3 \cdot 6$; $100 - 5^2$; $(1,6 + 3,8) : (7 - 6,5)$;

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{8}{5} \text{ итн.}$$

- Пресметај ја вредноста на бројниот израз $(13,5 - 8,25) : (4 - 1,5)$.

- Изрази со променливи се:

$$x + 8; 3y^2 - 5, \frac{x-2y}{x+2y} \text{ итн.}$$

- Пресметај ја бројната вредност на изразот $x^2 - 2x + 1$ за $x = -2$.



1.

Дадени се изразите:

а) $2a + 3b$; б) $x^2 - 5x + 7$;

в) $\frac{x-2y}{3x}$.

- Од кои константи и променливи е формиран секој од дадените изрази?
- Со кои операции се сврзани константите и променливите во дадените изрази?
- Воочи ги во табелава константите, променливите и операциите со нив во дадените изрази.

израз	$2a + 3b$	$x^2 - 5x + 7$	$\frac{x-2y}{3x}$
константи	2; 3	1; -5; 7	1; -2; 3
променливи	a ; b	x	x ; y
операции	множење и собирање	одземање, множење, собирање и степенување.	одземање, множење и делење.

- Од табелата можеш да воочиш дека дадените изрази се формирани од константи (бројеви) и променливи (букви), сврзани со операциите: собирање, одземање, множење, делење и степенување со експонент природен број, и само со нив.
- Изразите како: $2a + 3b$; $x^2 - 5x + 7$ и $\frac{x-2y}{3x}$ се викаат **рационални изрази**.

Изразот $x^2 - 3\sqrt{x}$ не е рационален, зашто променливата x е под знакот за коренување.

- 2. Кои од следниве изрази се рационални изрази:

- $x^2 - 2x + 1$;
- $\frac{x-y}{2x}$;
- $8 \cdot 4,5 + x\sqrt{2}$;
- $\frac{1}{2}a - \sqrt{x}$.



- 3. Дадени се следниве рационални изрази:

- $3x^2 - 1$;
- $\frac{x-y}{2}$;
- $\frac{x-1}{x+1}$;
- $\frac{1}{2}x^2 - 2$;
- $(x^2 - 1) : (x + 2)$.

- Во кои од дадените рационални изрази има делење со променливите?



Што значи изразот да има делење со променлива?



Тоа значи делителот, односно именителот во изразот да содржи променлива.

- Воочуваш дека во рационалните изрази: $3x^2 - 1$, $\frac{x-y}{2}$ и $\frac{1}{2}x^2 - 2$ нема делење со променлива. Такви рационални изрази уште се викаат **цели рационални изрази**.
- Изразите, како $\frac{x-1}{x+1}$ и $(x^2 - 1) : (x + 2)$, во кои е застапено делење со променлива се викаат **дробни рационални изрази**.

4. Кои од следниве рационални изрази се:

а) цели рационални изрази; б) дробни рационални изрази?

● $\frac{x+3}{2}$; ● $\frac{y}{3^2-2}$; ● $\frac{7}{x+7}$; ● $\frac{x+3}{3x}$; ● $\frac{x^2-1}{x^2-9}$; ● $\frac{x+3}{x-3}$.

5. Дадени се полиномите: $3x^2y$, $2x - 3y$, $x^2 - 3x + 5$. Кој вид рационални изрази се наведените полиноми?

Пошсејти се!

- Кој од следниве бројни изрази нема бројна вредност:

$$\frac{5}{3-8}; \quad \frac{3 \cdot 8 - 2}{12 - 3 \cdot 4}; \quad \frac{5}{3^2 - 9}?$$

- За која вредност на x именителот на рационалниот израз $\frac{3x}{x-3}$ е нула?

- Дали за $x = 3$ дадениот израз има вредност?



6. Пресметај ја бројната вредност на рационалниот израз $x^2 - 2x - 1$ за $x = -2$.



Замени ја променливата x со -2 , каков израз ќе добиеш по замената?

Ќе го добијам бројниот израз:
 $(-2)^2 - 2(-2) - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$.
 Бројната вредност на изразот
 $x^2 - 2x - 1$ за $x = -2$ е 7.



7. Пресметај ја бројната вредност на рационалниот израз $\frac{x-2y}{x+2y}$ за $x = 3$ и $y = -1$.

8. Даден е рационалниот израз $\frac{2y-5}{y+3}$.

- За која вредност на променливата y вредноста на именителот е нула?
- Кои се допуштените вредности на променливата y во дадениот израз?

■ Воочуваш дека: ако $y = -3$, тогаш $y + 3 = -3 + 3 = 0$. Според тоа ако $y = -3$, тогаш рационалниот израз $\frac{2y-5}{y+3}$ нема вредност. Множеството допуштени вредности на овој израз е $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, т.е. сите реални броеви освен бројот -3 .

9. Одреди ги допуштените вредности на променливата во секој од изразите:

● $\frac{5x}{x-5}$; ● $\frac{x^2 - x + 1}{(x-2)(x+3)}$; ● $\frac{2}{3x-1}$.

Треба да знаеш:

- ◆ да наведеш примери за рационални изрази;
- ◆ да дефинираш цел рационален израз;
- ◆ да дефинираш дробен рационален израз;
- ◆ да одредиш бројна вредност на рационален израз;
- ◆ да одредиш допуштени вредности на променливата во рационален израз.



Провери се!

- ▲ Какви рационални изрази се полиномите?
- ▲ Кои од наведените рационални изрази се цели, а кои дробни рационални изрази?

● $x^2 - 3x + 5$; ● $\frac{x-5}{x}$; ● $\frac{x^2-3}{9}$.

- ▲ Одреди ги допуштените вредности на променливата x во рационалниот израз

$$\frac{5x-2}{(x-5)(x+2)}$$

Задачи

1. Одреди кои од следниве изрази се рационални изрази.

● $5x - 2$; ● $\frac{x+5}{x-5}$; ● $\frac{x+y}{3}$; ● $3x + \sqrt{x}$.

2. Одреди кои од следниве изрази се цели, а кои дробни рационални изрази.

● $2x^2 - 3y^2$; ● $\frac{x^2 - 3x + 5}{2}$;

● $\frac{5-x}{x^2}$; ● $\frac{x^2+1}{x} + 4$.

3. Одреди ја бројната вредност на рационалниот израз $x^2 - 3x + 5$ за $x = 2$.

4. Пресметај ја бројната вредност на изразот $\frac{5x}{x-2}$ за $x = 4$.

5. За кои вредности на променливата y изразот $\frac{y^2-1}{2+y}$ нема смисла?

6. Одреди го множеството допуштени вредности на променливата во рационалниот израз $\frac{5x}{(x-2)(x+5)}$.

РАЗЛОЖУВАЊЕ ПОЛИНОМИ НА МНОЖИТЕЛИ

14 РАЗЛОЖУВАЊЕ ПОЛИНОМ СО ИЗВЛЕКУВАЊЕ ЗАЕДНИЧКИ МНОЖИТЕЛ ПРЕД ЗАГРАДА И СО ГРУПИРАЊЕ

Појсетти се!

- Во производот $60 = 4 \cdot 15$ броевите 4 и 15 се множители, а бројот 60 нивни производ.
- Се вели дека во записот $60 = 4 \cdot 15$ бројот 60 е разложен на множители.
- Ако се запише: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ каде множителите се прости броеви, се вели бројот 60 е разложен на прости множители.
- Разложи го бројот 36 на множители.
- Разложи го бројот 28 на прости множители.
- Одреди ги следните производи:
 - $a(x^2 + y^2)$.
 - $(a + 3)(x + y)$.



1. Полиномот $ax^2 + ay^2$ запиши го како производ.



Потсети се на дистрибутивното својство на множењето.

Полиномот $ax^2 + ay^2$ се добива кога полиномот $x^2 + y^2$ ќе се помножи со мономот a .



- Спореди го твоето решение со даденото.

$ax^2 + ay^2 = a(x^2 + y^2)$.

- Се вели дека со оваа идентична трансформација полиномот $ax^2 + ay^2$ е **разложен на множители со извлекување заеднички множител пред загради**.

2. Разложи ги на множители следниве полиноми: ● $3a + 3b$; ● $ax^2 - bx^2$.

3. Разложи го на множители полиномот $3ax^2 + 6bx^2 - 12cx^2$.



Кој е заедничкиот множител за сите членови на дадениот полином?

Заеднички множител на сите членови на полиномот е $3x^2$. Значи за да ја решам задачата него ќе го извлечам пред загради.




- Спореди го твоето решение со даденото. $3ax^2 + 6bx^2 - 12cx^2 = 3x^2(a + 2b - 4c)$.

- Воочи дека полиномот во заградите го добиваме со делење на дадениот полином со заедничкиот множител извлечен пред заградите.

4. Разложи ги на множители следниве полиноми: ● $10x^3 - 5x^2 + 15x$; ● $4a^3b - 6a^2b^2 + 8ab^3$.

5. Разложи го на множители изразот $2a(x - y) - 3b(x - y)$.

■ Спореди го твоето решение со даденото.  $2a(x - y) - 3b(x - y) = (x - y)(2a - 3b)$.

6. Разложи ги на множители следниов израз $5x(a + 2b) - 2y(a + 2b)$.

7. Разложи ги на множители полиномот $ax + 3x + 3y + ay$.




Дали имаат заеднички множител сите членови на полиномот? Како ќе го разложиш полиномот на множители?



Сите членови немаат заеднички множител. Ќе ги групирам првиот со четвртиот и вториот со третиот член, или: првиот со вториот и третиот со четвртиот.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

 $ax + 3x + 3y + ay = (ax + ay) + (3x + 3y) = a(x + y) + 3(x + y) = (a + 3)(x + y)$.

8. Разложи ги на множители полиномот $2ax - 6ay + bx - 3by$.

Треба ѝа знаеш:

- ◆ да разложиш полином на множители со извлекување на заеднички множител пред заграда и со групирање на членовите;
- ◆ да ја објасниш постапката за разложување полином на множители со извлекување заеднички множител пред заграда.



Провери се!

▲ Разложи ги на множители следниве изрази:

- $15a^2b - 10ab^2 + 5ab$.
- $ax(a - x) + (a - x)$.
- $ax + bx + a + b$.

Задачи

1. Разложи ги на множители следниве полиноми:

а) $5a + 5x$; б) $2ax + 4ay$; в) $axy - bxy$.

2. Разложи ги на множители следниве полиноми:

- а) $12x^2y - 9xy^2 + 3x^3y^3$;
- б) $7x^3y^2 - 14x^2y^3 + 21x^3y^3$;
- в) $6a^3b^2 - 9a^2b^3 + 3a^2b^2$.

3. Разложи ги на множители следниве изрази:

- а) $2a(x - 3) - 3b(x - 3)$;
- б) $5x(5 - x) - 3y(5 - x)$;
- в) $3x(2a - 3b) - (2a - 3b)$.

4. Разложи ги на прости множители следниве изрази:

- а) $2a(3y - 4) - 5b(4 - 3y)$;
упатство: $-5b(4 - 3y) = 5b(3y - 4)$;
- б) $3x^3 - 3x^2 + y^2 - xy^2$;
- в) $3a^2x - 2a^2y - 2y + 3x$.

Појсееи се!

■ Производот од збир и разлика на два изрази е еднаков на разликата на квадратите на првиот и вториот израз, т.е.
 $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

● Одреди ги производите:

● $(x + 5)(x - 5)$; ● $(3a - 2b)(3a + 2b)$.

● Запиши го производот од кој е добиен изразот $4x^2 - y^2$.



1. Разложи го на множители полиномот $4a^2 - 9b^2$.



Воочи дека $4a^2 = (2a)^2$ и $9b^2 = (3b)^2$.

Како можеш да ја примениш формулата $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$?

Ако $A^2 = (2a)^2$ и $B^2 = (3b)^2$ тогаш $4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2$. Сега можам да ја применим формулата $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.



■ Спореди го твоето решение со даденото.

👉 $4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a + 3b)(2a - 3b)$.

2. Разложи ги на множители следниве полиноми: ● $9x^2 - y^2$; ● $4a^2 - 25x^2$.



3. Разложи го на множители полиномот $18x^2 - 50y^2$.



Во овој случај нема број кој дигнат на квадрат дава 18 или 50. Како ќе го разложиш овој полином на множители?

Во дадениот полином ќе извлечам пред заграда 2 и ќе добијам $2(9x^2 - 25y^2)$, а потоа за изразот во заградите ќе ја применим формулата $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.



■ Спореди го твоето решение со даденото.

👉 $18x^2 - 50y^2 = 2(9x^2 - 25y^2) = 2((3x)^2 - (5y)^2) = 2(3x + 5y)(3x - 5y)$.

■ Воочи дека полиномот $18x^2 - 50y^2$ е разложен на множители. Ниту еден од множителите не може да се разложува. Затоа се вели дека полиномот е разложен на **прости множители**.

4. Разложи ги на прости множители следниве полиноми:

● $12a^2x - 27b^2x$; ● $3ax^2 - 12ay^2$.



5. Разложи го на прости множители изразот $(a + 5)^2 - (b - 2)^2$.



Нека $a + 5 = A$ и $b - 2 = B$.
Како ќе ја примениш формулата $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$?

Ако $a + 5 = A$ и $b - 2 = B$, тогаш
 $(a + 5)^2 = A^2$ и $(b - 2)^2 = B^2$, а
 $(a + 5)^2 - (b - 2)^2 = (a + 5 + b - 2)(a + 5 - b + 2)$.



■ Спореди го твоето решение со даденото.

👉 $(a + 5)^2 - (b - 2)^2 = (a + 5 + b - 2)(a + 5 - b + 2) = (a + b + 3)(a - b + 7)$.

6. Разложи ги на прости множители следниве изрази:

● $(2x - 3)^2 - (3y + 2)^2$; ● $(x + y)^2 - x^2y^2$.

Треба да знаеш:

- ◆ да разложиш на множители полином од видот $A^2 - B^2$;
- ◆ да ја објасниш постапката за разложување полином од видот $A^2 - B^2$ на множители.



Провери се!

- ▲ Разложи ги на прости множители полиномите:
 - $a^2 - 25b^2$; ● $7a^2b^2 - 28$;
 - $(5a - 3b)^2 - (2a - 7b)^2$.

Задачи

1. Разложи ги на множители полиномите:
а) $x^2 - b^2$; б) $4a^2 - 49y^2$; в) $16a^4b^2 - 25$.
2. Разложи ги на прости множители следниве полиноми:
а) $5a^2 - 20x^2$; б) $7a^2x^2 - 63x^2b^2$;
в) $5x^3 - 5x$.
3. Разложи ги на прости множители полиномите:
а) $(x - 5)^2 - (y - 3)^2$;
б) $(4a + 3b)^2 - (a - 2b)^2$;
в) $(x^2 + 6)^2 - 49$.
4. Пресметај ги на едноставен начин производите:
а) $64^2 - 36^2$; б) $75^2 - 25^2$; в) $725^2 - 275^2$;
упатство: $64^2 - 36^2 = (64 + 36)(64 - 36)$.

Поисети се!

- Ако A и B се кои било мономи, тогаш $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ и $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- Одреди $(3x + y)^2$.
- Кој бином дигнат на квадрат дава $9x^2 - 6xy + y^2$?



1. Одреди го биномот $A + B$, каде што A и B се мономи, за да биде точно равенството $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (A + B)^2$.



Кои членови во полиномот $4x^2 + 12xy + 9y^2$ претставуваат A^2 и B^2 ? Како ќе ги одредиш A и B ?

Бидејќи $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, следува дека $A^2 = 4x^2$ и $B^2 = 9y^2$, од каде што $A = 2x$ и $B = 3y$; $2AB = 2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$.



- Спореди го твоето решение со даденото.

☞ $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$; значи $A + B = 2x + 3y$.

- Воочуваш дека полиномот $4x^2 + 12xy + 9y^2$ може да се запише $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$. Со тоа полиномот $4x^2 + 12xy + 9y^2$ е разложен на прости множители $(2x + 3y)^2 = (2x + 3y)(2x + 3y)$.

2. Разложи ги на прости множители следниве полиноми:

● $x^2 + 4x + 4$; ● $4a^2 + 20ab + 25b^2$.



3. Разложи го на множители полиномот $25a^2 - 20ab + 4b^2$.



Која формула ќе ја примениш во овој случај?

Во овој случај ќе ја применим формулата: $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$.



- Спореди го твоето решение со даденото.

☞ $25a^2 - 20ab + 4b^2 = (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 2b + (2b)^2 = (5a - 2b)^2$, т.е. $25a^2 - 20ab + 4b^2 = (5a - 2b)^2$.

4. Разложи ги на множители следниве полиноми: ● $a^2 - 6ab + 9b^2$; ● $4x^2 - 4x + 1$.



5. Разложи го на множители полиномот $12ax^2 + 12axy + 3ay^2$.



Како ќе го разложиш на множители дадениот полином кога нема моном кој дигнат на квадрат дава $12ax^2$?



Прво ќе го извлечам пред загради заедничкиот множител $3a$, а потоа ќе го разложам изразот во заградите.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

$12ax^2 + 12axy + 3ay^2 = 3a(4x^2 + 4xy + y^2) = 3a((2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + (y)^2) = 3a(2x + y)^2$.

6. Разложи ги на множители следниве полиноми:

- $4x^3 + 12x^2 + 9x$; ● $18a^3 - 24a^2b + 8ab^2$.

Треба ја знаеш:

- ◆ да разложиш на множители полином од видот $A^2 + 2AB + B^2$ и $A^2 - 2AB + B^2$;
- ◆ да ја објасниш постапката за разложување на множители полином од видот $A^2 + 2AB + B^2$ и $A^2 - 2AB + B^2$.



Провери се!

▲ Разложи ги на множители следниве полиноми:

- $25a^4 + 20a^2 + 4$; ● $4x^2 - 4ax + a^2$.

Задачи

1. Разложи ги на множители полиномите:

- а) $a^2 + 6a + 9$; б) $4x^2 + 20xy + 25y^2$.

2. Трансформирај го бројниот израз, а потоа пресметај ја неговата вредност.

- а) $48^2 + 2 \cdot 48 \cdot 52 + 52^2$;
б) $27^2 + 2 \cdot 27 \cdot 33 + 33^2$.

3. Разложи ги на прости множители следниве полиноми:

- а) $2x^2 + 12x + 18$; б) $2xy^2 + 16xy + 32x$.

4. Одреди го мономот А така што да биде точно равенството:

- а) $25 + 10y^2 + y^4 = (5 + A)^2$;
б) $4y^4 + 4y^2 + 1 = (A + 1)^2$.

5. Разложи ги на множители полиномите:

- а) $25x^2 - 10x + 1$; б) $4a^2 - 28ab + 49b^2$.

6. Пресметај ја по кус пат бројната вредност на изразот:

- а) $56^2 - 2 \cdot 56 \cdot 16 + 16^2$;
б) $47^2 - 2 \cdot 47 \cdot 27 + 27^2$.

7. Разложи ги на прости множители следниве полиноми:

- а) $50x^2 - 20xy^2 + 2y^4$;
б) $2ax^2 - 16ax + 32a$.

8. Одреди го полиномот А така што да биде точно равенството:

- а) $81x^2 - 18xy^2 + y^4 = (9x - A)^2$;
б) $16a^2 - 8a + 1 = (4a - A)^2$.

17 ПРИБИРАЊЕ ПОДАТОЦИ



1. Бројот на часови во кои греело сонце (сончеви часови) во една седмица е запишан во следнава табела.

Ден	П	В	С	Ч	П	С	Н
Бр. на часови	3	4	2	0	5	8	4

Податоци може да се приберат на различни начини. Во овој пример, тие се прибрани со **набљудување** и **мерење** на должината на траење на настанот.



- Колку вкупно сончеви часови имало во текот на седмицата?
- Кој ден било цел ден облачно? ● Кој ден бил најсончев?
- Кои денови имале еднаков број сончеви часови?

2. Јован прибрал податоци за видот на домашни миленичиња што ги има секој ученик во неговата паралелка. Податоците се дадени во табелата подолу.



За да прибереш вакви податоци преку набљудување потребно е многу време. Но, податоци може да се приберат со **поставување прашања**, пополнување прашалник.

Вид милениче	Мачка	Куче	Птица	Риби
Број на деца	4	9	12	5

- Јован ги прибрал податоците со прашалник кој содржел две прашања:

1. Дали имаш домашно милениче? Да Не

- Запиши го второто прашање, од прашалникот на Јован.



Податоци може да се прибираат на различни начини: прашување по телефон, користење прашалник, пребарување по списанија, енциклопедија, учебник и др.

- Податоците може да се прибираат за величини со вредности реални броеви. На пример: број на ученици – со природни броеви; температура – со цели броеви; време – со рационални броеви итн.

3. Учениците во VII³ одделение биле поделени во групи и секоја група требало да прибере податоци.

- Запиши го најсоодветниот начин за прибирање податоци за секоја од поставените задачи:
 - Имињата и висините на шесте највисоки планини во светот;

б) Најгледана детска емисија од учениците во VII³;

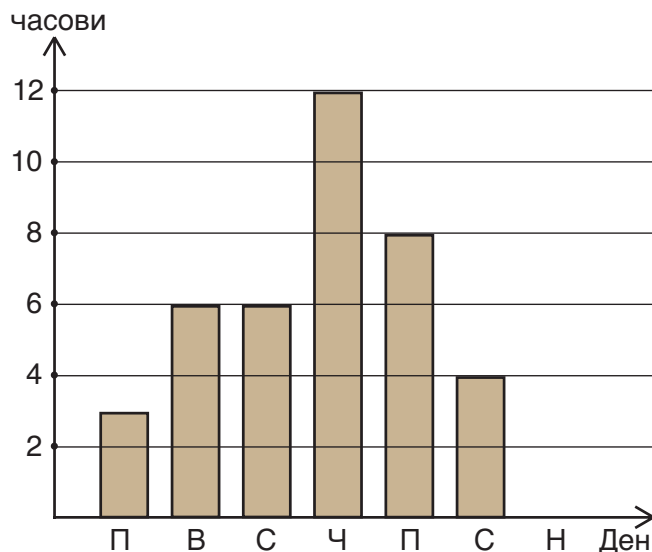
в) Времето во Скопје во месец март;

г) Бојата на автомобилите што поминале по улицата пред училиштето за 1 час.

- Образложи зошто начинот што ти го избра е најсоодветен.
- Образложи зошто е подобро да прашаш во метеоролошката станица за количеството дожд што наврнал во Прилеп во еден месец, место да набљудуваш и мериш.



Прибраните податоци треба да се групираат и подредат и може да се претстават на различни начини. Ке се потсетиме на следните примери.



Облачно време во една седмица.

4. Податоците за тоа колку часа било облачно во една седмица се дадени со **столбест дијаграм**.

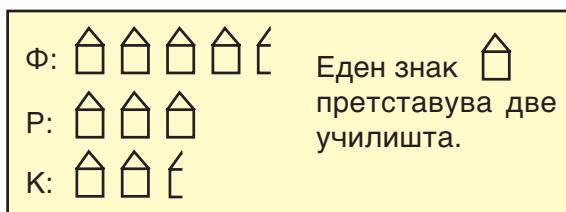
- Состави табела и податоците запиши ги во неа.
- Кој ден најдолго времето било облачно?
- Кој ден воопшто не било облачно?

5. Овој **сликовит дијаграм** го покажува бројот на училишта што се натпреварувале на меѓуучилишниот спортски натпревар.

9 се натпреварувале во фудбал (Ф);
6 се натпреварувале во ракомет (Р);
5 се натпреварувале во кошарка (К).

- Запиши ги податоците во табела и претстави ги со столбест дијаграм.

Меѓуучилиштен натпревар



6. На дадениот **линиски дијаграм** се дадени податоците за тоа колку часови во едно деноноќие треба да спијат луѓето од различни возрастни групи.

- Податоците од линискиот дијаграм претстави ги во табела.
- Што можеш да кажеш за потребата од спиење на луѓето од 15 до 25 – годишна возраст и од 30 до 40 – годишна возраст?



Потреба за спиење

7. Податоците од табелава: популацијата во светот од 1900 до 2000 година и предвидувањето на Унеско за 2020 година, претстави ги со линиски дијаграм.

Година	1900	1920	1940	1960	1980	2000	2020
Жители во милијарди	1,6	1,9	2,3	3,0	4,4	6,2	7,7

Затојни

Секогаш кога црташ дијаграм, внимавај на тоа дека секој дијаграм мора да има:

- **Наслов**, кој јасно кажува што е претставено на дијаграмот;
- **Име** (опис) на секоја од оските со јасно назначена мерна единица;
- **Опис** на симболот, ако се работи за сликовит дијаграм;
- Цртежот треба да биде јасен за да може лесно да се чита.

Треба да знаеш:

- ◆ податоци може да се приберат на различни начини;
- ◆ прибраните податоци треба да се запишат, групираат, избројат и подредат;
- ◆ податоците се претставуваат на различни видови дијаграми.



Провери се!

- ▲ Запиши еден пример на податоци што може да се приберат со мерење.
- ▲ Образложи кои елементи треба да ги има секој дијаграм.

Задачи

1. Илија сакал да утврди колку читале неговите другари минатиот месец. Што е посоодветно:
 - а) Да го праша секој другар колку книги прочитал?
 - б) Да провери во училишната библиотека колку книги секој од нив позајмил минатиот месец?
 - Образложи го својот одговор.
2. На еден тест по математика максималниот број поени бил 20. Тестот го решавале 24 ученици и нивниот број поени бил:

15	6	10	19	5	20	17	12
19	20	18	10	4	13	20	18
18	15	18	12	15	20	5	6

 - Препиши ја табелата и запиши ги потребните податоци.

Број на освоени поени	0 – 4	5 – 9	10 – 14	15 – 20
Фреквенција (број на ученици)				

- Податоците претстави ги со столбест дијаграм.
 - Ако за постигнати 15 – 20 поени оценката е 5, колку ученици добиле 5 на тестот?
3. За еден час пред една училишна зграда поминале: 16 бели автомобили, 12 црвени, 5 сини, 7 црни и 2 автомобили со сребрена боја.
 - Запиши ги податоците во табела.
 - Состави столбест дијаграм и претстави ги податоците. Внимавај дијаграмот да ги содржи сите потребни елементи.



УЧЕШЕ ЗА ПОЛИНОМИ. ПРОВЕРИ ГО СВОЕТО ЗНАЕЊЕ

1. Од кои константи и од кои променливи се формирани изразите: $2x$; $\frac{3}{4}ab$; $-0,5x^2y$?
2. Претстави го како моном во нормален вид изразот:
 $5ab(a^3b) - (a^2b)^2 - 2a^4b^2$.
3. Одреди го степенот на секој од мономите: 5 ; $2x$; $3xy$; x^2y^3 .
4. Одреди го збирот и разликата на мономите: $-2x^2y$ и $-5x^2y$.
5. Сведи го на полином во нормален вид изразот:
 $(3x^2 - 5xy + 4y^2) + (2x^2 - xy - y^2) - (4x^2 - 4xy + 2y^2)$.
6. Пресметај:
а) $3x^2y \cdot (-2xy^3)$; б) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3z\right)^3$.
7. Одреди го производот:
 $(3x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3) \cdot (-3x^2y^2)$.
8. Претстави го како полином во нормален вид изразот:
 $(x^2 - 1)(x^2 + 1) - x(x^3 - x^2 + 2)$.
9. Пресметај:
а) $6a^5b^2c : (3a^3bc)$; б) $\frac{4x^2y^5z}{\frac{1}{2}xy^2}$.
10. Одреди го количникот:
 $(6x^5y^3 - 3x^4y^4 + 2x^3y^5) : (3x^3y^3)$.
11. Одреди го количникот:
 $(x^5 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 6) : (x^2 - 2)$.
12. Разложи ги на множители полиномите:
а) $3a^2b + 6ac$; б) $2x^3y^2 + 4x^2y^3 - x^2y$.
13. Разложи го на множители полиномот:
а) $2a^2(a - 3x) - x^2(3x - a)$;
б) $3ax + 3bx - 5a - 5b$.
14. Разложи го на множители изразот:
 $36a^2 - (5a - 3)^2$.
15. Разложи го на множители полиномот:
 $x^4 - 6x^2y + 9y^2$.

АГЛИ ВО КРУЖНИЦА

- | | |
|---------------------|-----|
| 1. Централен агол | 104 |
| 2. Периферен агол | 107 |
| 3. Талесова теорема | 110 |

ТЕТИВЕН И ТАНГЕНТЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

- | | |
|----------------------------|-----|
| 4. Тетивен четириаголник | 113 |
| 5. Тангентен четириаголник | 115 |

ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

- | | |
|---|-----|
| 6. Правилни многуаголници. Агли и периметар | 118 |
| 7. Својства на правилен многуаголник | 121 |
| 8. Конструкција на правилни многуаголници | 124 |

ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

- | | |
|---|-----|
| 9. Питагорова теорема | 126 |
| 10. Примена на Питагоровата теорема кај правоаголник, квадрат и рамностран триаголник | 129 |
| 11. Задачи со примена на Питагоровата теорема | 131 |

ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИК

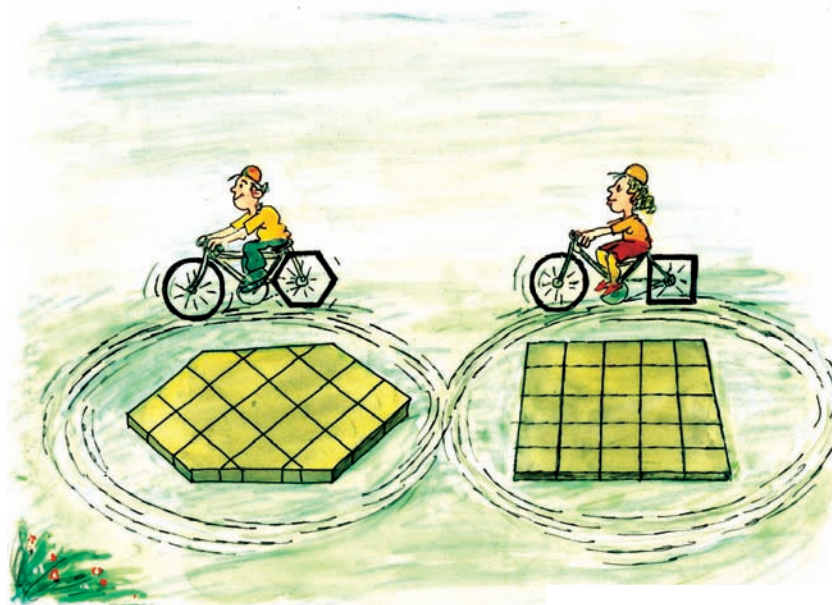
- | | |
|---|-----|
| 12. Поим за плоштина | 134 |
| 13. Плоштина на правоаголник и квадрат | 138 |
| 14. Плоштина на паралелограм | 142 |
| 15. Плоштина на триаголник | 145 |
| 16. Плоштина на трапез и делтоид | 149 |
| 17. Плоштина на правилен многуаголник | 152 |
| 18. Задачи за плоштина на многуаголници | 155 |

ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА КРУГ

- | | |
|---|-----|
| 19. Периметар на круг. Должина на кружен лак | 158 |
| 20. Плоштина на круг, кружен исечок и кружен прстен | 163 |

РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

- | | |
|---|-----|
| 21. Секторски дијаграм | 167 |
| 22. Аритметичка средина. Медијана. Мода. Ранг | 169 |
| Провери го твоето знаење | 172 |



АГЛИ ВО КРУЖНИЦА

1 ЦЕНТРАЛЕН АГОЛ

Појсетии се!

■ Разгледај ја кружницата k на цртежот и одговори на прашањата:

● Која точка на цртежот е **центар** на кружницата?

● Која точка **лежи** на кружницата?

● Која точка е **внатрешна точка** за кружницата? Дали $M \in k$?

● Отсечката OB е радиус на кружницата. Која од отсечките ON , OM , OA , MN е радиус на таа кружница?

■ Две кружници се **складни** ако имаат еднакви радиуси.

● Во тетратката нацртај $k(O; 2,5 \text{ cm})$, а на прозирна хартија $k_1(O_1; 2,5 \text{ cm})$. Потоа покажи дека тие се совпаѓаат.

■ Разгледај го цртежот и одговори:

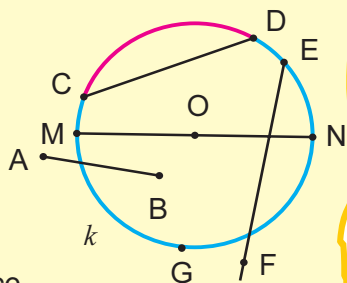
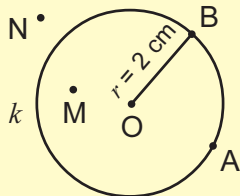
● Што е **тетива** на една кружница?

● Која од отсечките AB , CD , EF , MN е тетива на кружницата?

● За која тетива се вели дека е **дијаметар** на кружницата?

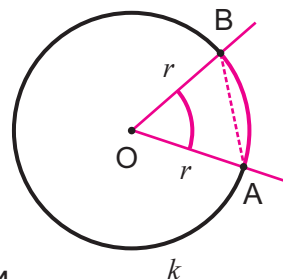
■ Крајните точки на еден дијаметар ја делат кружницата на две **полукружници**.

■ Точките C и D , на цртежот, ја делат кружницата на два **кружни лака**; мал – црвениот \widehat{CD} и поголем – синиот \widehat{CGD} .



1. Разгледај го цртежот и воочи:

■ Темето на $\sphericalangle AOB$ е во центарот на $k(O, r)$. Секој таков агол се вика **централен агол** во k .



● Нацртај два различни централни агли во една кружница $k(O, r)$: $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle MON$.

● Воочи ги нивните кружни лака \widehat{AB} и \widehat{MN} . Забележи дека тие се зафатени со соодветните централни агли.

■ За централниот агол AOB и кружниот лак \widehat{AB} се вели дека се **соодветни** помеѓу себе.



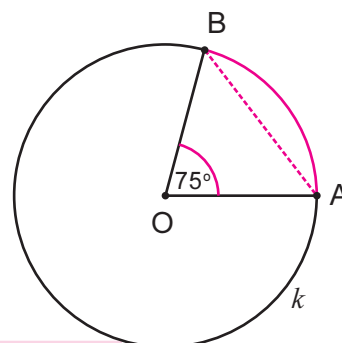
Секој централен агол има соодветна тетива и соодветен кружен лак. Дали секој кружен лак има соодветен централен агол?

Да, и притоа има **само еден** централен агол.



2. На цртежот е дадена кружницата $k(O; 2 \text{ cm})$.

● На прозирна хартија нацртај $k_1(O_1; 2 \text{ cm})$.



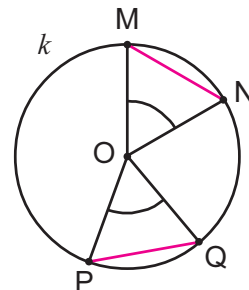
- Зошто k и k_1 се складни кружници?
- Нацртај централен агол $\sphericalangle MO_1N = 75^\circ$. Тој е складен со $\sphericalangle AOB$. Зошто?
- Постави го просирниот лист така што да се совпаѓаат кружниците k и k_1 , односно централните агли $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle MON$. Што забележуваш?
- Забележа дека соодветните тетиви и соодветните кружни лаци се совпаѓаат, т.е.

$$\overline{AB} = \overline{MN} \text{ и } \widehat{AB} = \widehat{MN}.$$



- 3.** Во кружницата $k(O; 2 \text{ cm})$ нацртани се два централни агла: $\sphericalangle MON$ и $\sphericalangle POQ$. Ако $\sphericalangle MON = \sphericalangle POQ$, докажи дека тетивите MN и PQ се еднакви, т.е. $\overline{MN} = \overline{PQ}$.

- Воочи дека $\triangle MON$ и $\triangle PQO$ се рамнокраки со краци еднакви на радиусот на кружницата. Според признакот САС, триаголниците се складни. Според тоа $\overline{MN} = \overline{PQ}$.

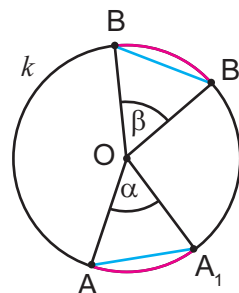


Важно оџишо!

- Ако два централни агли, во една кружница или во две складни кружници, се **еднакви**, тогаш нивните **соодветни тетиви**, односно **соодветните кружни лаци** се еднакви.

- 4.** Кружните лаци $\widehat{AA_1}$ и $\widehat{BB_1}$ на кружницата k , на цртежот, се еднакви (т.е. складни).

- Соодветните централни агли се означени со α и β . Покажи дека $\alpha = \beta$.



Воочи дека и тетивите AA_1 и BB_1 се еднакви. Како ќе покажеш дека $\alpha = \beta$?

Рамнокраките триаголници $\triangle OAA_1$ и $\triangle OB_1B$ според признакот ССС се складни, т.е. $\triangle OAA_1 \cong \triangle OB_1B$ и поради тоа $\alpha = \beta$.



Оџишо!

- Ако два кружни лаци во една кружница или во две складни кружници се еднакви, тогаш соодветните централни агли (односно соодветните тетиви) се еднакви.

5. Нацртај две кружници $k(O; 2 \text{ cm})$ и $k_1(O_1; 3 \text{ cm})$ и нацртај ги централните агли $\sphericalangle AOB = 55^\circ$ и $\sphericalangle A_1O_1B_1 = 55^\circ$. Спореди ги тетивите AB и A_1B_1 , односно кружните лац \widehat{AB} и $\widehat{A_1B_1}$. Што забележуваш? Зошто?
6. Колкав е централниот агол и колкава е тетивата што се соодветни на една полукружница од $k(O; 1,5 \text{ cm})$?

Треба да знаеш:

- ◆ да препознаваш централен агол во дадена кружница, неговата соодветна тетива и неговиот соодветен кружен лак;
- ◆ да образложиш дека централните агли над еднакви кружни лац (во иста или складни кружници) се еднакви меѓу себе.



Провери се!

- ▲ Колку степени има централен агол што е соодветен на кружниот лак:
 - а) цела кружница;
 - б) полукружница;
 - в) третина од кружница;
 - г) четвртина од кружница;
 - д) шестина од кружница?
- ▲ Нацртај две кружници $k(O; 2 \text{ cm})$ и $k_1(O; 2,5 \text{ cm})$ и во нив нацртај тетиви $\overline{MN} = 3 \text{ cm}$ и $\overline{M_1N_1} = 3 \text{ cm}$. Дали $\sphericalangle MON = \sphericalangle M_1O_1N_1$? Зошто?

Задачи

1. Нацртај рамностран $\triangle ABC$ и опиши кружница околу него. Колку степени има централниот агол над една негова страна која лежи на него?
2. Нацртај една кружница и една нејзина тетива со должина еднаква на радиусот. Колку степени има централниот агол во кој лежи таа соодветна тетива?
3. Во кружница $k(O; r)$ е впишан $\triangle ABC$ така што $\sphericalangle AOB = 112^\circ 24'$, $\sphericalangle BOC = 98^\circ 46'$ и тие зафаќаат различни области од кружницата. Колкав е конвексниот агол $\sphericalangle AOC$?
4. Во кружница $k(O; r)$ е впишан рамнокрак триаголник ABC со основа AB . Ако $\sphericalangle AOB = 135^\circ$, одреди ги $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOC$ ($\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOC$ зафаќаат различни области од кружницата).
5. Со точките A, B, C, D и E , кружницата $k(O; r)$ е поделена на 5 лац, така што \widehat{AB} изнесува 5%, \widehat{BC} – 15%, \widehat{CD} – 20%, \widehat{DE} – 25% од кружницата. Најди ги соодветните централни агли: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ и $\sphericalangle EOA$.

2 ПЕРИФЕРЕН АГОЛ

Појсејти се!

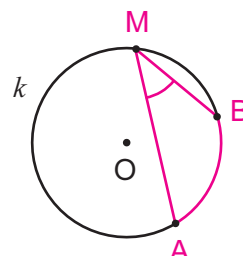
- Нацртај $\triangle ABC$ и означи ги неговите агли α , β и γ .
- Означи го со α_1 надворешниот агол што е придружен на α .
- За аглие во $\triangle ABC$ важи:
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$;
 $\alpha_1 = \beta + \gamma$.
- Нацртај кружница и на неа еден лак \widehat{AB} . Над лакот нацртај го соодветниот централен агол.
- Нацртај кружница $k(O; 2 \text{ cm})$ и на неа еден лак \widehat{CD} . Над лакот нацртај неколку агли чие теме е:
 - а) внатрешна точка;
 - б) надворешна точка;
 - в) точка од кружницата.



1. Разгледај го цртежот и одговори на прашањата:

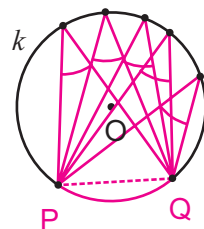
- Каде лежи темето на $\sphericalangle AMB$ и што се неговите краци за кружницата?

- За $\sphericalangle AMB$ и лакот \widehat{AB} , обично се вели дека се *соодветни меѓу себе*.



- Дали можеш да нацрташ друг агол над лакот \widehat{AB} , а темето да лежи на кружницата?

- Воочи на цртежот дека во една кружница постојат бесконечно многу агли над ист лак \widehat{PQ} или над иста тетива PQ чии темиња лежат на кружницата.



- Секој агол чиешто теме е точка од кружница, а краците на аголот ја сечат кружницата се вика **периферен агол**.

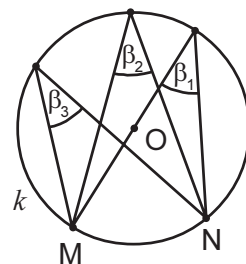
2. Нацртај кружница и означи еден нејзин дијаметар MN. Потоа, нацртај неколку периферни агли над дијаметарот MN.

- За секој таков агол се вели дека е **периферен агол во полукружница** или дека е **впишан** во полукружница.



3. Нацртај три периферни агли β_1 , β_2 и β_3 над лакот \widehat{MN} од кружницата k со центар во точката O:

- а) еден крак на β_1 да минува низ центарот O на кружницата;
- б) центарот O да е внатрешна точка на β_2 ;
- в) центарот O да е надворешна точка на β_3 .

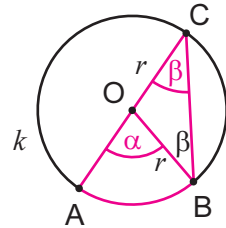


■ Разгледај го цртежот и спореди го со твојот цртеж!

☞ Согледај дека центарот на кружницата O за **секој** периферен агол: или **лежи** на еден негов крак или е неговa **внатрешна** или е неговa **надворешна** точка.

4. На лакот \widehat{AB} , на цртежот, се нацртани соодветниот централен агол α и периферниот агол β при што еден негов крак минува низ центарот O (т.е. е дијаметар на кружницата).

● Покажи дека $\beta = \frac{\alpha}{2}$.



● Воочи го $\triangle OBC$. Согледај дека тој е рамнокрак ($\overline{OB} = \overline{OC}$), па $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \beta$. На што е еднаков надворешниот агол α ?

Надворешниот агол α е еднаков на збирот од двата внатрешни несоседни агли, т.е. $\alpha = 2\beta$.



Значи, $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

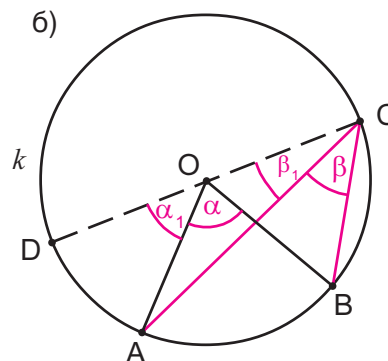
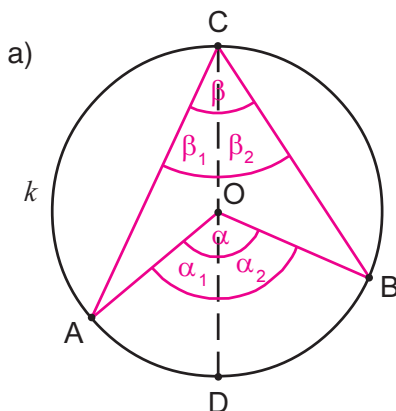
5. Нацртај кружница $k(O; 2,5 \text{ cm})$ и централен агол од 80° (со агломер). Како ќе конструираш агол од 40° (само со линијар)?

6. Нацртај правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C и опиши кружница околу него (потсети се дека центарот O на таа кружница е средина на хипотенузата AB). Најди ги острите агли на $\triangle ABC$ ако $\sphericalangle AOC = 110^\circ$.



7. Разгледај ги цртежите во кои центарот O на кружницата k е а) внатрешна, б) надворешна точка на периферниот агол $\sphericalangle ACB$. Во двете кружници е нацртан дијаметарот CD .

● Покажи дека периферниот агол е половина од централниот, т.е. $\beta = \frac{\alpha}{2}$.





Имаш ли идеја за да го докажеш тврдењето во двата случаи (а) и б)?

Во случајот под а) можам да го користам образложението во задачата 4. бидејќи е исто за $\triangle AOC$ и $\triangle OBC$.



■ Спореди го твоето решение со даденото и воочи ја постапката.

а) $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2; \beta = \beta_1 + \beta_2;$

$\alpha_1 = 2\beta_1; \alpha_2 = 2\beta_2;$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2);$

$\alpha = 2\beta$ или $\beta = \frac{\alpha}{2}.$

б) $\sphericalangle DOB = \alpha_1 + \alpha; \sphericalangle DCB = \beta_1 + \beta;$

$\sphericalangle DOB = 2\sphericalangle DCB$ и $\alpha_1 = 2\beta_1;$

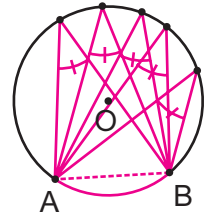
$\alpha_1 + \alpha = 2(\beta_1 + \beta);$

$2\beta_1 + \alpha = 2\beta_1 + 2\beta; \alpha = 2\beta; \text{ или } \beta = \frac{\alpha}{2}.$

Ги согледа тврдењата и треба да зайомниш

■ Периферниот агол во една кружница е еднаков на половина од централниот агол што е над ист кружен лак.

8. Разгледај го цртежот и одговори зошто сите нацртани периферни агли се еднакви меѓу себе.



Важно!

■ Сите периферни агли над ист кружен лак се еднакви меѓу себе, бидејќи секој од нив е половина од соодветниот централен агол AOB!

9. Нацртај ја опишаната кружница на $\triangle ABC$ и на лакот \widehat{AB} земи произволна точка M. Покажи дека $\sphericalangle AMC = \sphericalangle B$ и $\sphericalangle BMC = \sphericalangle A$.

10. Збирот на еден периферен агол и неговиот соодветен централен агол е 210° . Колкави се тие агли?

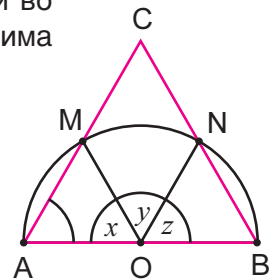
Треба да знаеш:

- ◆ да го искажеш односот меѓу периферниот агол и централниот агол над ист кружен лак;
- ◆ да го образложиш тој однос и да го примениш во задачи.



Провери се!

- ▲ повеќе (бесконечно многу) периферни агли. Какви се тие агли меѓу себе?
- ▲ Нацртај полуокружница со $r = 2$ cm и впиши во неа два периферни агли. По колку степени има секој од тие агли?
- ▲ Над страната AB на рамностраниот $\triangle ABC$ е нацртана полуокружница (AB е нејзин дијаметар) којашто ги сече другите две страни во точките M и N. Определи ги централните агли x, y и z .
Упатство: $\sphericalangle MAB$ е периферен агол во таа полуокружница.



Али во кружница

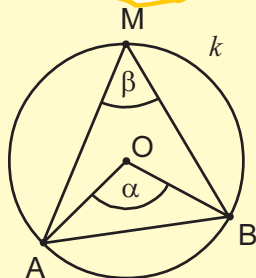
Задачи

1. Кој од паровите агли:
а) $35^\circ, 75^\circ$; б) $35^\circ, 70^\circ$; в) $35^\circ, 35^\circ$
може да биде пар од периферен агол и соодветен централен агол?
2. Еден периферен агол и соодветниот централен агол имаат заедно 132° . По колку степени има секој од нив?
3. На една кружница $k(O; r)$ се избрани точки А и В, така што $\sphericalangle AOB = 120^\circ$. На поголемиот од лаците определени со тие точки е избрана точка С, така што $\sphericalangle AOC = 110^\circ$.
Пресметај ги агли на $\triangle ABC$.
4. Ако \widehat{AB} и \widehat{CD} се кружни лаци од иста кружница и ако $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, тогаш секој периферен агол AMB е еднаков со секој периферен агол CND . Зошто?
5. Ако централниот агол:
а) се зголеми три пати; б) за 15° ,
колку ќе се зголемат периферните агли над истиот кружен лак?
6. Еден периферен агол е конструиран над кружен лак што е:
а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{12}$; г) $\frac{1}{18}$
од кружницата. Колку степени има тој агол?

3 ТАЛЕСОВА ТЕОРЕМА

Појсетти се!

- На цртежот е дадена кружница k и два агли: $\sphericalangle AMB = \beta$ и $\sphericalangle AOB = \alpha$.

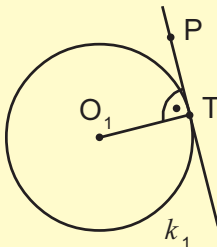


- Одговори што е точно:

- а) $\alpha < \beta$, б) $\alpha > \beta$, в) $\alpha = \beta$,
г) $\alpha = 2\beta$, д) $\alpha = 3\beta$.

- По колку степени имаат агли α и β , ако тетивата АВ е дијаметар на кружницата k ?

- На цртежот правата ТР е тангентата на кружницата k_1 со допир во точката Т.

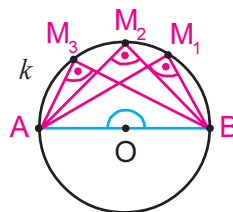


- Колкав е $\sphericalangle O_1TP$?



1. На цртежот АВ е дијаметар на кружницата k .

- Дали $\sphericalangle AOB$ е централен агол? Која е неговата соодветна тетива?
- Колку степени има тој агол?
- Именувај ги периферните агли што се конструирани над таа тетива (т.е. над дијаметарот АВ). Дали може да се нацртаат и други такви агли?
- За секој периферен агол над дијаметарот во една полукружница се вели дека е **впишан** во полукружницата.
- Зошто секој таков агол е прав агол?



Зайомни!

- Секој агол впишан во полукружница е прав агол.

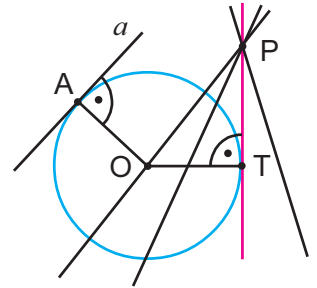
■ Ова својство е познато под името **Талесова теорема**, наречено според Талес кој живеел пред повеќе од 2500 години.

2. Конструирај правоаголен триаголник ако се зададени хипотенузата c и една катета a со помош на Талесовата теорема.

■ Над хипотенузата нацртај една полукружница на која ќе лежи темето на правиот агол; тоа теме ќе го одредиш со помош на дадената катета.



3. На цртежот правата a е тангента на кружницата k со допир во точката A ; таа е *нормална* на радиусот OA . Низ точката P , што е надвор од кружницата минуваат бесконечно многу прави.



- Дали некоја од нив ја допира кружницата k , односно е тангента на k ?
- Таква права постои! Размисли како да ја конструираш; користи ја Талесовата теорема.



Можам да го воочам следното:

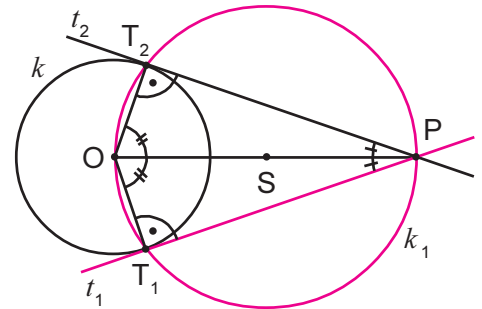
- 1) ако има права низ P што ја допира кружницата во точката T , тогаш $\sphericalangle OTP = 90^\circ$;
- 2) бидејќи $\sphericalangle OTP$ е *прав агол*, според Талесовата теорема, неговото теме T треба да лежи на полукружницата со дијаметар OP и, секако, на кружницата k . Значи T е нивна пресечна точка;
- 3) правата PT е тангента на k со допир во T .



Тврдењето е точно. Но, над OP може да се нацрта уште една полукружница. Значи, постојат две тангенти!

■ Разгледај го цртежот и запомни го редоследот на конструкцијата.

- 1) Дадено: $k(O; r)$ и P ;
- 2) S – средина на OP ;
- 3) $k_1(S; \overline{SP})$;
- 4) $k \cap k_1 = \{T_1, T_2\}$;
- 5) правите PT_1 и PT_2 се бараните тангенти.



■ Согледа дека тангентите t_1 и t_2 се повлечени од точката P . Според цртежот, одговори на прашањата:

- Од кој вид се триаголниците POT_1 и POT_2 ?
 - Зошто $\overline{OT_1} = \overline{OT_2}$?
 - Како се вика заедничката страна?
 - Кои агли им се соодветно еднакви?
 - Дали овие триаголници се складни?
 - Кои се нивни парови соодветни елементи?
- Воочи ги отсечките PT_1 и PT_2 на тангентите t_1 и t_2 на цртежот.

- Отсечката на тангентата од допирната точка до точката од која таа е повлечена се вика **тангентна отсечка**.
- Од складноста на триаголниците OT_1P и OT_2P согледај дека:
 - ☞ Четириаголникот PT_1OT_2 е делтоид;
 - ☞ OP е симетрала на $\sphericalangle T_1OT_2$ и на $\sphericalangle T_1PT_2$; ☞ $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$, т.е.

■ **Должините на тангентните отсечки** на двете тангенти што се повлечени од една точка кон кружницата се **еднакви**.

4. Нацртај $k(O; 3 \text{ cm})$ и точка M , така што $\overline{OM} = 4 \text{ cm}$. Конструирај ги тангентите на кружницата повлечени од M . Ако тие ја допираат k во точките T_1 и T_2 , одреди го збирот $\sphericalangle T_1OT_2 + \sphericalangle T_1MT_2$.

Треба да знаеш:

- ◆ да ја образложиш Талесовата теорема и да ја примениш во задачи;
- ◆ да конструираш тангента на кружница од точка што е надвор од кружницата.



Провери се!

- ▲ Нацртај правоаголен триаголник со катета 3 cm и хипотенуза 5 cm со помош на Талесовата теорема.
- ▲ Точките A и B се од различни страни на правата p и $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$. Конструирај правоаголен триаголник така што AB е неговата хипотенуза, а темето C на правиот агол да лежи на p .

Задачи

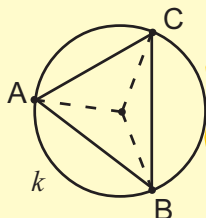
1. Точките A и B не лежат на правата p . На правата определи точка M таква што $\sphericalangle AMB$ да биде прав. Колку решенија има?
2. Дадена е права p и точка M што не лежи на неа. Со помош на Талесовата теорема конструирај нормала спуштена од M на правата p . (Упатство: земи произволна точка N од p и искористи ја отсечката MN .)
3. Полукружницата над основата на еден рамнокрак триаголник ги сече краците во точки што се подножја на висините спуштени од темињата при основата. Образложи го тоа.
4. На кружницата $k(O; r)$ се зададени точките A и B при што $\sphericalangle AOB = 100^\circ$. Во A и B се повлечени тангенти t_1 и t_2 на $k(O; r)$ што се сечат во точката P . Најди ги аглиите на $\triangle ABP$. Направи цртеж.
5. Со точките M_1, M_2 и M_3 кружницата е поделена на три кружни лаци: $\widehat{M_1M_2}$ изнесува 25%, а $\widehat{M_2M_3}$ – 35% од кружницата. Низ M_1, M_2 и M_3 повлечи тангенти на кружницата; тие се сечат две по две во A, B и C . Најди ги аглиите на $\triangle ABC$.
6. Две кружници со центри во точките O и O_1 се сечат во точките A и B . Низ точката A се повлечени дијаметрите AA_1 и AB_1 на тие кружници. Образложи зошто точките A_1, B и B_1 лежат на една права.

ТЕТИВЕН И ТАНГЕНТЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

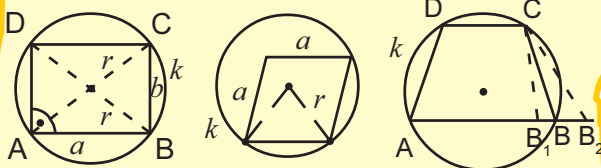
4 ТЕТИВЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Појсијте се!

- Избери три точки А, В, С на една кружница и нацртај го $\triangle ABC$.
- За $\triangle ABC$ се вели дека е **впишан** во кружница.



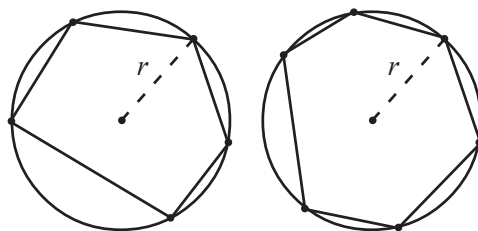
- Дали секој триаголник може да се впише во некоја кружница? Која е таа кружница?
- Дали секој четириаголник може да се впише во кружница?
- На цртежот забележуваш дека секој правоаголник може да се впише во кружница (зошто?); каде е нејзиниот центар?



- Забележуваш дека ромб што не е квадрат не може да се впише во кружница, а некој трапез може, но некој не може.



- Секој триаголник, некој четириаголник, некој петаголник, некој шестаголник итн, може да се впише во една кружница.



- Многуаголник чишто темиња се точки од една кружница се вика **тетивен многуаголник**.

☞ Неговите агли се периферни агли во кружницата.

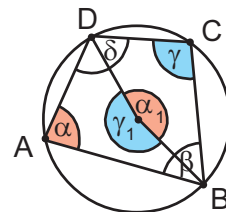
☞ Неговите страни се **тетиви** на кружницата.

1. Пресметај ги аглите на тетивниот четириаголник ABCD, ако $\sphericalangle B = 85^\circ 43'$, а неговата дијагонала BD е дијаметар на кружницата опишана околу него.



2. Разгледај го цртежот на еден тетивен четириаголник и одговори на прашањата:

- Колкав е збирот на аглите α , β , γ и δ на четириаголникот ABCD?
- Размисли и обиди се да ги пресметаш збирите $\alpha + \gamma$ и $\beta + \delta$.



- α и γ се периферни агли и α е соодветен на централниот агол α_1 , а γ на γ_1 . Воочи дека

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1}{2} \quad \text{и} \quad \alpha_1 + \gamma_1 = 360^\circ.$$

- Според тоа $\alpha + \gamma = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\gamma_1}{2} = \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} = \frac{360^\circ}{2}$. ■ Значи: $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

- Покажи дека и $\beta + \delta = 180^\circ$.

Тоа што согледа е едно важно својство на шестивен четириаголник.

- Во секој тетивен четириаголник збирот на спротивните агли е 180° .

- 3.** Нека е даден четириаголник ABCD во кој збирот на еден пар спротивни агли е 180° , на пример $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Колкав е збирот на другиот пар спротивни агли, $\beta + \delta = ?$

- Може да се покаже дека секој четириаголник со ова својство е тетивен.

Воочи и зайомни!

- Ако во еден четириаголник еден пар спротивни агли се суплементни, тогаш тој четириаголник е тетивен.

- Ова тврдење е признак со кој можеш да утврдиш дали еден четириаголник е тетивен.

Треба да знаеш:

- ◆ да го објасниш и да го дефинираш поимот тетивен четириаголник;
- ◆ да го образложиш својството за спротивните агли кај тетивен четириаголник и да го користиш во задачи.



Провери се!

- ▲ Може ли да се опише кружница околу четириаголникот ABCD, ако неговите агли (по редот на темињата) се:
а) $90^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$; б) $70^\circ, 130^\circ, 110^\circ, 50^\circ$;
в) $45^\circ, 75^\circ, 135^\circ, 105^\circ$?
- ▲ Покажи дека секој рамнокрак тапез е тетивен четириаголник.

Задачи

- 1.** Дали четириаголникот ABCD е тетивен ако неговите агли (по редот на темињата) изнесуваат:
а) $15\%, 30\%, 35\%, 20\%$;
б) $40\%, 20\%, 15\%, 25\%$;
в) $45\%, 30\%, 5\%, 20\%$ од полниот агол?
- 2.** Од точката P во некој агол AOB се спуштени нормали на краците чишто

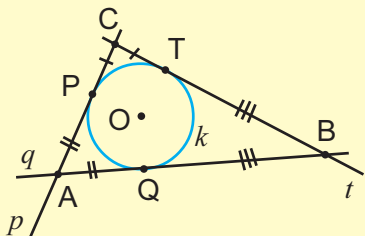
подножја се A_1 на кракот OA и B_1 на кракот OB. Образложи зошто четириаголникот OA_1PB_1 е тетивен.

- 3.** Дали четириаголникот ABCD со агли:
а) $\sphericalangle A = 80^\circ, \sphericalangle B = 80^\circ, \sphericalangle C = 100^\circ$;
б) $\sphericalangle A = 30^\circ, \sphericalangle C = 128^\circ, \sphericalangle D = 150^\circ$;
в) $\sphericalangle B = 117^\circ, \sphericalangle C = 121^\circ, \sphericalangle D = 63^\circ$
може да се впише во некоја кружница?

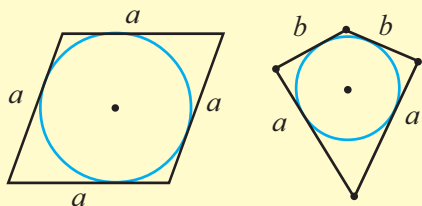
5 ТАНГЕНТЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Поисети се!

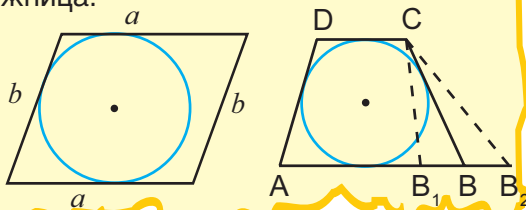
- Избери три точки P, Q, T на една кружница k и нацртај ги тангентите p, q, t што ја допираат k во точките P, Q, T .



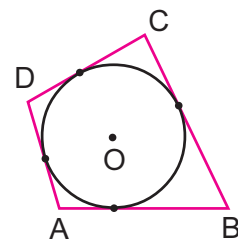
- Нека p и q се сечат во A , q и t во B , t и p во C . За $\triangle ABC$ се вели дека е **описан** околу кружницата k или дека во $\triangle ABC$ е **впишана** кружницата k .
- Воочи ги тангентните отсечки на секоја тангента и согледај го нивното својство (на пример: $\overline{CP} = \overline{CT}$).
- Дали во секој триаголник може да се впише кружница? Каде е нејзиниот центар?
- Дали во четириаголник може да се впише кружница? На цртежот забележуваш дека во ромб и во делтоид може да се впише кружница.



- На цртежот забележуваш дека во паралелограм што не е ромб не може да се впише кружница. Во некој трапез може, а во некој не може да се впише кружница.



- Воочи на цртежот дека во четириаголникот $ABCD$ е впишана кружница, т.е. секоја страна на четириаголникот ја допира кружницата.



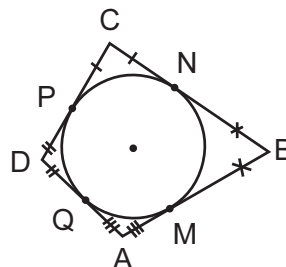
Зайомни!

- Четириаголник чии страни допираат една кружница се вика **тангентен четириаголник**.

- Кружницата k впишана во $\triangle ABC$ ги допира страните на триаголникот, и тоа: AB во точката C_1 , BC во A_1 и CA во B_1 . Ако $\overline{AC_1} = 5\text{cm}$, $\overline{BC_1} = 3\text{cm}$ и $\overline{CA_1} = 4\text{cm}$, пресметај го периметарот на $\triangle ABC$.
- Нацртај кружница $k(O; 2,5\text{cm})$ и во неа тетива $\overline{AB} = 2\text{cm}$. Нацртај ги тангентите на k со допир во A и во B ; нека тие се сечат во точката C . Зошто $\triangle ABC$ е рамнокрак? Што е основа, а што се краци на тој триаголник?



- На цртежот е претставен еден тангентен четириаголник $ABCD$.



- Неговите страни ја допираат впишаната кружница, и тоа: AB во M , BC во N , CD во P и DA во Q .
- Запиши неколку пара еднакви отсечки (како $\overline{BM} = \overline{BN}$) и објасни зошто тие се еднакви.
- Размисли и обиди се да согледаш некоја врска меѓу спротивните страни на четириаголникот.
- Од цртежот можеш да согледаш дека: $\overline{AM} = \overline{AQ}$, $\overline{BM} = \overline{BN}$, $\overline{CP} = \overline{CN}$, $\overline{DP} = \overline{DQ}$.
- Запиши го збирот на левите страни и збирот на десните страни од равенствата.
- Зошто тие зборови се еднакви?
- Можеш да запишеш дека: $(\overline{AM} + \overline{BM}) + (\overline{CP} + \overline{DP}) = (\overline{AQ} + \overline{DQ}) + (\overline{BN} + \overline{CN})$.
- Воочи дека равенството може да се запише само со страните на четириаголникот $ABCD$:

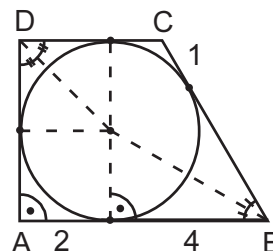
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

👉 Тоа е основно својство на секој тангентен четириаголник.

- Ако четириаголникот $ABCD$ е тангентен, тогаш зборовите од должините на неговите спротивни страни се еднакви, т.е. $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

4. На цртежот е даден тангентен правоаголен трапез. Според податоците на цртежот:

- а) провери дали важи $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$;
- б) пресметај го периметарот на трапезот $ABCD$.



- Може да се покаже дека е точно и обратното тврдење на основното својство на тангентен четириаголник.

- Ако во еден четириаголник збирот од должините на две спротивни страни е еднаков со збирот на должините на другите две спротивни страни, тогаш четириаголникот е тангентен.

- Ова тврдење е признак со кој можеш да утврдиш дали еден четириаголник е тангентен.

5. Како ќе утврдиш дека во даден четириаголник може да се впише кружница?

6. Нацртај: а) квадрат; б) ромб; в) делтоид. Потоа, во секој од нив, конструирај кружница.

Помош. Центарот на впишаната кружница е во пресекот на дијагоналите, а допирните точки на кружницата со страните се подножја на висините спуштени од центарот.

Треба да знаеш:

- ◆ да го објасниш и да го дефинираш поимот тангентен четириаголник;
- ◆ да ја согледаш и да ја образложиш врската меѓу збиравите на спротивните страни кај тангентен четириаголник.



Провери се!

- ▲ Основите на еден рамнокрак трапез се 10 cm и 6 cm. Колкав треба да е кракот, па во него да може да се впише кружница?

Задачи

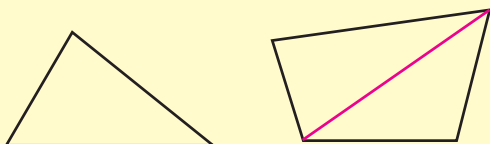
1. Три страни на еден тангентен четириаголник се: $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 12$ cm и $\overline{AD} = 5$ cm. Одреди ја \overline{CD} .
2. Кој паралелограм е и тетивен и тангентен четириаголник?
3. Дали е тангентен четириаголникот ABCD ако должините на неговите страни (последователно) се:
а) 5cm, 4cm, 6cm и 7cm;
б) 11cm, 9cm, 10cm и 8cm?
4. Тангентниот четириаголник ABCD има периметар 28 cm, $\overline{AB} = 7,5$ cm и $\overline{BC} = 6,5$ cm. Одреди ги должините на страните CD и AD.
5. Докажи дека средната линија на тангентен трапез е еднаква на $\frac{1}{4}$ од неговиот периметар.

ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

6 ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ. АГЛИ И ПЕРИМЕТАР

Појсетти се!

- Колкав е збирот на аглите во еден триаголник?

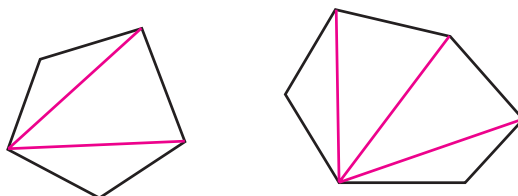


- Како се образложува дека збирот на аглите во секој четириаголник е 360° ?



1. Разгледај ги цртежите и одговори на прашањата.

- На колку триаголници е разделен петаголникот со дијагоналите повлечени од едно негово теме?



- На колку триаголници е поделен шестаголникот со дијагоналите повлечени од едно теме?
- Размисли на колку триаголници ќе биде поделен еден n -аголник со дијагоналите повлечени од едно негово теме.

Согледа дека

- Петаголникот е поделен на три триаголници, т.е. на $(5 - 2)$ триаголници, шестаголникот на четири, т.е. на $(6 - 2)$ триаголници, а n -аголникот е поделен на $n - 2$ триаголници, т.е. за два помалку од бројот на страните.

2. Одреди го збирот на внатрешните агли во: а) петаголник, б) шестаголник, в) n -аголник.

- Спореди го твоето решение со даденото.

Збирот на аглите во секој триаголник е 180° .

Бројот на триаголниците е: а) 3; б) 4; в) $n - 2$.

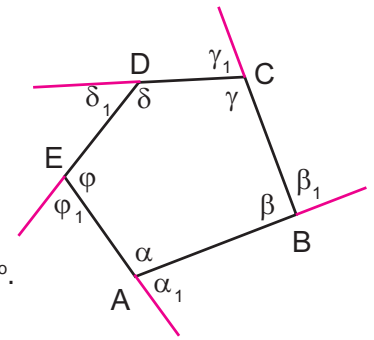
Збирот на аглите е: а) $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$; б) $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$; в) $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

■ Збирот на внатрешните агли во n -аголник изнесува $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

3. Најди го збирот на аглите во n -аголникот, ако: а) $n = 7$; б) $n = 8$; в) $n = 10$; г) $n = 15$.

4. Разгледај го петаголникот ABCDE и одговори на барањата.

- Кои агли се внатрешни, а кои се надворешни агли на пет-аголникот?
- Зошто секој внатрешен агол и неговиот придружен надворешен агол се суплементни, т.е. $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$, $\beta + \beta_1 = 180^\circ$?
- Одреди го збирот на надворешните агли на петаголникот.
- Спореди го твоето решение со даденото.



- Збирот на внатрешните и надворешните агли е $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$.
- Збирот на внатрешните агли е: $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.
- Збирот на надворешните агли е: $5 \cdot 180^\circ - (5 - 2) \cdot 180^\circ = 900^\circ - 540^\circ = 360^\circ$.

5. Обиди се да образложиш на ист начин дека:

Збирот на надворешните агли на секој n -аголник е 360° .

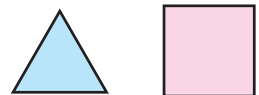
Согледај ја постапката:

$$n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$



6.

- Какви се меѓу себе страните, а какви аглите на:
 - рамностраниот триаголник;
 - квадратот?



За рамностраниот триаголник велиме дека е **правилен триаголник**, а за квадратот **правилен четириаголник**.

Многуаголник на кој сите страни му се еднакви и сите агли му се еднакви се вика **правилен многуаголник**.

Појсетти се!

Периметарот на правилен триаголник со страна $a = 5$ cm е:

$$L = 3 \cdot a; \quad L = 3 \cdot 5; \quad L = 15 \text{ cm.}$$

Одреди го периметарот на правилен четириаголник со страна $a = 9$ cm.

7. Одреди го периметарот на правилен осумаголник со страна $a = 10$ cm.



Како ќе го пресметаш периметарот на правилен n -аголник со страна a ?

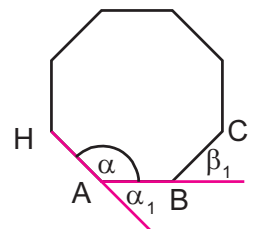
Периметарот ќе го пресметам со формулата $L = n \cdot a$.



8. Пресметај го внатрешниот агол на правилен осумаголник.

Согледај дека збирот на внатрешните агли е $(8 - 2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ$, а

еден внатрешен агол изнесува $\frac{(8 - 2) \cdot 180^\circ}{8} = \frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ$.



Воочи дека:

Внатрешниот агол α на правилен n -аголник се пресметува со формулата:



$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$



- Какви се меѓу себе надворешните агли на правилен многуаголник?
- Како ќе го пресметаш надворешниот агол на правилен n -аголник?

Тие се еднакви и нивниот збир е 360° . Надворешниот агол е: $\frac{360^\circ}{n}$.



9. Пресметај го внатрешниот и надворешниот агол на правилен:
а) 7-аголник; б) 10-аголник.

Треба да знаеш:

- ◆ да го одредиш збирот на внатрешните и надворешните агли на еден n -аголник;
- ◆ да дефинираш правилен многуаголник;
- ◆ да образложиш како се одредува внатрешен, односно надворешен агол на правилен n -аголник;
- ◆ да образложиш како се пресметува периметар на правилен n -аголник.



Провери се!

- ▲ Кај кој многуаголник збирот на внатрешните агли изнесува: а) 360° ; б) 1800° ?
- ▲ Одреди ги внатрешниот агол, надворешниот агол и периметарот кај правилен 12-аголник.

Задачи

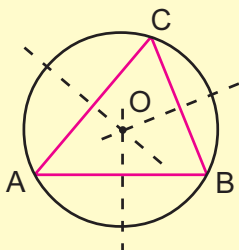
1. Кај кој многуаголник збирот на внатрешните агли изнесува: а) 1260° , б) 900° , в) 1440° ?
2. Кај кој многуаголник збирот на надворешните агли изнесува: а) 180° , б) 360° ?
3. Одреди го внатрешниот и надворешниот агол кај правилен: а) десетаголник, б) дваесетаголник.
4. Во кој правилен многуаголник неговиот надворешен агол е: а) 36° , б) 24° , в) 60° ?
5. Колку страни има правилен многуаголник ако неговиот внатрешен агол има: а) 144° , б) 156° ?
6. Одреди го периметарот на правилен петнаесетаголник ако неговата страна е $a = 0,25$ dm.
7. Колкава е страната на правилниот седумаголник ако неговиот периметар е 77,7 dm?
8. Кој правилен многуаголник со страна 2,2 cm има периметар 24,2 cm?
9. За кој правилен n -аголник важи:
а) надворешниот агол е еднаков со внатрешниот;
б) надворешниот агол е двапати поголем од внатрешниот;
в) надворешниот агол е три пати помал од внатрешниот;

7

СВОЈСТВА НА ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК

Појсијте се!

- Пресекот O на симетралите на страните на $\triangle ABC$ претставува центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$.



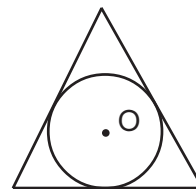
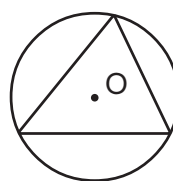
- Што претставува пресекот H на симетралите на аглие на триаголникот?



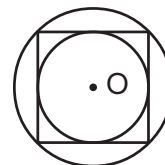
- Триаголникот EFG на цртежот е рамнокрак.
- Што претставува висината GK за основата EF , а што за $\sphericalangle EGF$ при врвот G ?
- Какви се меѓу себе \overline{EK} и \overline{KF} ?



1. Правилниот триаголник има опишана и впишана кружница.



- Објасни како се одредува центарот на опишаната и впишаната кружница на квадратот.



2. Дали секој правилен многуаголник има опишана кружница?

- Одговорот е потврден. За да го согледаш тоа, разгледај го цртежот, на кој е претставен правилен 9-аголник; правите s_1 и s_2 се симетрали на два соседни агли: $\sphericalangle KAB$ и $\sphericalangle ABC$.

- Сега следи ги објаснувањата.

☞ $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, како полуагли на два еднакви агли.

☞ Симетралите s_1 и s_2 се сечат во една точка O , зашто $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 < 180^\circ$.

☞ Поради $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$, следува дека $\triangle ABO$ е рамнокрак, со врв O и краци $\overline{OA} = \overline{OB}$.

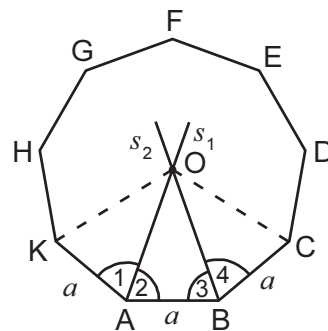
☞ Сите други темиња ќе ги поврземе со точката O ; така се добиваат 9 триаголници со заедничко теме и еднакви основи.

☞ $\triangle AOB \cong \triangle COB$ (според кој признак?), од што следува $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

☞ Ако се продолжи понатаму со споредување на соседни триаголници, ќе се покаже дека сите тие се **рамнокраки триаголници**, дека сите се складни меѓу себе, при што:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \dots = \overline{OK}.$$

- Истиот заклучок важи за кој било правилен многуаголник.



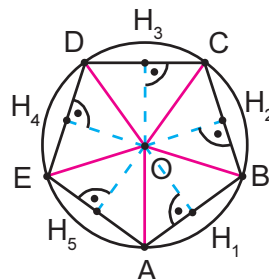
Од што можеш да заклучиш:

- Сите темиња на правилен многуаголник се еднакво оддалечени, од една негова внатрешна точка O , односно дека лежат на кружница со центар O .



3. На цртежот е даден правилен петаголник и неговата опишана кружница. Покажи дека во него може да се впише кружница.

- Разгледај го цртежот и одговори на барањата.
- Образложи зошто висините на сите пет рамнокраки триаголници ABO, BCO, \dots спуштени од нивниот заеднички врв O се еднакви меѓу себе.
- Подножјето H_1 на висината OH_1 е средина на страната AB . Зошто?
- Од $\overline{OH_1} = \overline{OH_2} = \dots = \overline{OH_5}$ следува дека средините на страните на правилниот петаголник се еднакво оддалечени од точката O . Значи постои кружница со центар во O што ги допира сите страни на правилниот петаголник.
- Истиот заклучок важи за кој било правилен многуаголник.



Затојни

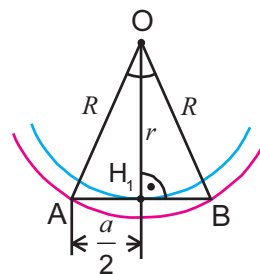
- Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.
- Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница.
- Тие кружници се концентрични. За нивниот центар се вели дека е **центар на правилниот многуаголник**.

4. Нацртај:
 а) правилен триаголник; б) правилен четириаголник,
 и конструирај ги опишаната и впишаната кружница.

5. Во дадена кружница со радиус R впиши:
 а) правилен триаголник; б) правилен четириаголник.



- На цртежот е даден еден од составните рамнокраки триаголници, $\triangle AOB$, на правилен многуаголник.
- За $\triangle AOB$ се вели дека е **карактеристичен триаголник** на правилниот n -аголник.



■ Неговите елементи го одредуваат n -аголникот:

O - центарот; $\sphericalangle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ – централниот агол; $\overline{AB} = a$ – страната;

$\overline{OA} = R$ – радиусот на опишаната кружница; $\overline{OH}_1 = h = r$ – радиусот на впишаната кружница или **апотемата**, на правилниот n -аголник.

6. Нацртај го карактеристичниот триаголник на: а) правилен триаголник; б) правилен четириаголник, ако радиусот на опишаната кружница е $R = 3$ cm.

7. Конструирај карактеристичен триаголник на правилен 12-аголник со страна 2 cm.

● Како ќе го одредиш аголот при основата?

Треба да знаеш:

- ◆ да ги искажеш и образложиш тврдењата за опишаната и впишаната кружница на правилен многуаголник;
- ◆ да дефинираш карактеристичен триаголник, апотема и централен агол на правилен многуаголник.



Провери се!

- ▲ Како ќе го одредиш аголот при основата на карактеристичниот триаголник ако:
а) $n = 5$; б) $n = 8$; в) $n = 9$?
- ▲ Одреди го централниот агол на правилниот: а) триаголник; б) четириаголник; в) петаголник; г) шестаголник; д) осум-аголник.

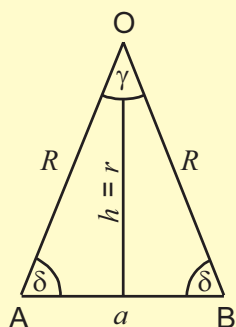
Задачи

1. Одреди го внатрешниот, надворешниот и централниот агол кај правилен:
а) 12-аголник; б) 15-аголник;
в) 20-аголник.
2. Дали постои правилен n -аголник во кој централниот агол е:
а) 40° ; г) 100° ;
б) 80° ; д) 120° ;
в) 90° ;
3. Кој правилен n -аголник има:
а) централен агол од 45° ;
б) надворешен агол од 30° ;
в) внатрешен агол од 144° ?
4. Нацртај го карактеристичниот триаголник на правилен десетаголник со страна 2 cm.
5. Покажи дека во секој правилен многуаголник неговиот централен агол е еднаков со неговиот надворешен агол.

8 КОНСТРУКЦИЈА НА ПРАВИЛНИ МНОГУАГОЛНИЦИ

Поисети се!

- За кој многуаголник се вели дека е правилен?
- Дали опишаната и впишаната кружница на правилен n -аголник се концентрични?
- $\triangle OAB$ на цртежот е карактеристичен триаголник на правилен n -аголник.
- Колку степени има централниот агол γ ?
- Колку степени има аголот δ ?



$$\gamma = \frac{360^\circ}{n};$$

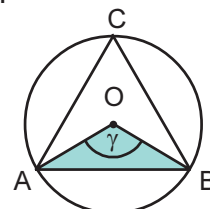
$$\delta = \frac{180^\circ - \gamma}{2};$$

- Дали може да се нацрта карактеристичниот $\triangle OAB$ на правилен n -аголник ако се знае **само** a или **само** R или **само** $h = r$?



1. Во кружница со $r = 2,5$ cm впиши правилен триаголник.

- Разгледај го решението на цртежот и постапи според упатствата.



- Пресметај го централниот агол γ ;

$$\gamma = \frac{360^\circ}{3}.$$

- Нацртај кружница $k(O; 2,5 \text{ cm})$ и централен агол $\gamma = \angle AOB = 120^\circ$.

- Повлечи ја тетивата AB и пренеси ја на кружницата така што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$. (Воочи дека $\triangle ABO$ е карактеристичен за правилен триаголник, $\triangle ABC$.)

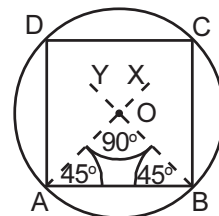
- Објасни зошто $\triangle ABC$ е бараниот правилен триаголник.

2. Конструирај правилен четириаголник, т.е. квадрат со страна $a = 4$ cm, со помош на карактеристичниот триаголник.

- Разгледај го решението на цртежот и постапи според упатствата.

- Пресметај го централниот агол γ ($\gamma = \frac{360^\circ}{4}$) и аголот δ при основата на карактеристичниот триаголник ($\delta = 45^\circ$).

- Нацртај ја отсечката AB , $\overline{AB} = 4$ cm и аглите $\angle BAX = \angle ABY = 45^\circ$.
- Објасни зошто пресекот O на краците AX и BY е центар на квадратот.
- Нацртај кружница $k(O; \overline{OA})$.
- Пренеси ја тетивата AB по кружницата така што $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.
- Објасни зошто добиениот четириаголник $ABCD$ е бараниот квадрат.



3. Покажи дека карактеристичниот триаголник на правилен шестаголник е рамностран триаголник.

4. Колкави се аглите на карактеристичниот триаголник на правилен дванаесетаголник?



5. Нацртај правилен деветаголник впишан во кружница со радиус $R = 3$ cm.

■ Правилен деветаголник не може да се конструира само со шестар и линијар. Затоа ќе користиме и агломер.

■ Разгледај го решението на цртежот и постапи според упатствата.

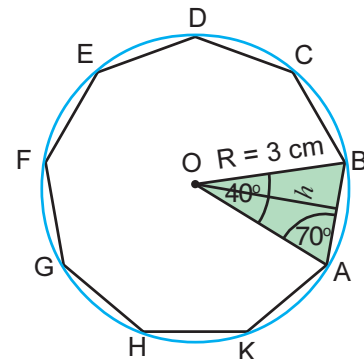
● Нацртај кружница $k(O; 3 \text{ cm})$ и централен агол $\sphericalangle AOB = 40^\circ$.

■ Точките А и В се на кружницата и тие се две соседни темиња на деветаголникот.

● Пренеси ја тетивата АВ по кружницата така што

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots = \overline{HK}.$$

● Објасни зошто е правилен добиениот деветаголник.



6. Нацртај правилен деветаголник со страна $a = 2$ cm.

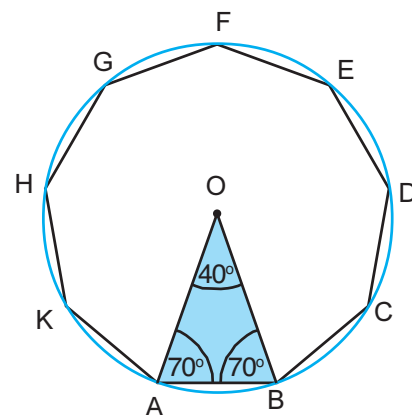
■ Разгледај го цртежот и постапи според упатствата.

● Нацртај го карактеристичниот триаголник $\triangle OAB$, т.е. рамнокрак триаголник со основа $\overline{AB} = a = 2$ cm и агли на основата $\alpha = 70^\circ$.

● Нацртај $k(O; \overline{OA})$.

● Пренеси ја тетивата АВ по кружницата така што

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots = \overline{HK} = 2 \text{ cm}.$$



7. Конструирај правилен шестаголник впишан во кружница со $R = 3$ cm.

8. Нацртај квадрат опишан околу кружница со $r = 2,5$ cm.

Треба да знаеш:

- ◆ да конструираш правилни многуаголници впишани во кружница;
- ◆ да ја објасниш (со карактеристичниот триаголник) и да ја применуваш постапката за таа конструкција.

Задачи

1. Нацртај правилен триаголник:

- а) во кружница со $r = 4$ cm;
- б) опишан околу кружница $r = 2,5$ cm.

2. Нацртај правилен шестаголник во кружница со $r = 4$ cm.



Провери се!

- ▲ Конструирај го карактеристичниот триаголник на правилен дванаесетаголник. Колкави се агли на тој триаголник?
- ▲ Нацртај правилен петаголник впишан во кружница со $R = 3$ cm.

3. Нацртај правилен петаголник:
- а) со страна $a = 3$ cm;
 - б) ако се знае r на впишаната кружница;
 - б) ако се знае R на опишаната кружница.

ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

9 ПИТАГОРОВА ТЕОРЕМА

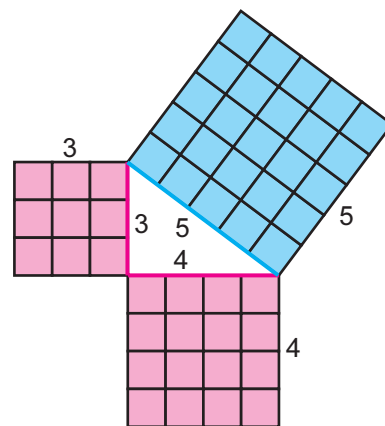
Појсејти се!

- Што е квадрат на еден број? Како се одредува *квадратен корен* од зададен број?
- Пресметај: 5^2 ; 12^2 ; $3^2 + 4^2$; $5^2 - 3^2$; $\sqrt{625}$.
- Нацртај еден *правоаголен триаголник* и означи ги темињата, аглиите и страните.
- Како се вика страната што лежи спроти правиот агол? Како се викаат другите две страни?



1. Конструирај правоаголен триаголник со хипотенуза $c = 5$ cm и катета $b = 4$ cm, со помош на Талесовата теорема. Измери ја другата катета.

■ Ако добро си измерил, си добил 3 cm.



2. Даден е правоаголен триаголник со катети $a = 3$ cm, $b = 4$ cm и хипотенуза $c = 5$ cm.

- Разгледај го цртежот и обиди се да согледаш една врска меѓу квадратите на страните на правоаголниот триаголник.
- Секој од квадратите е поделен на квадратчиња со страна 1 cm. Колку квадратчиња има секој квадрат?

■ За бројот на квадратчињата согледа дека:

👉 Над a се 9, т.е. $a^2 = 3^2$; $a^2 = 9$;

👉 Над b се 16, т.е. $b^2 = 4^2$; $b^2 = 16$;

👉 Над c се 25, т.е. $c^2 = 5^2$; $c^2 = 25$.



Што забележуваш за збирот од квадратите на катетите и квадратот на хипотенузата?

Забележувам дека збирот од квадратите на катетите е еднаков со квадратот на хипотенузата, т.е.

$$9 + 16 = 25 \text{ или } a^2 + b^2 = c^2.$$



- За триаголникот во кој мерните броеви на неговите страни се 3, 4 и 5 уште старите Египќани знаеле дека е правоаголен. Поради тоа се вика **египетски триаголник**.
- Старите Индијци знаеле за правоаголен триаголник со страни 5, 12 и 13; тој е познат како **индиски триаголник**.
- Провери дали важи равенството $a^2 + b^2 = c^2$ за индискиот триаголник.
- Својството што го согледа кај египетскиот и индискиот триаголник важи за секој правоаголен триаголник и е познато под името **Питагорова теорема**.

Питагоровата теорема гласи:

■ Во секој правоаголен триаголник квадратот на хипотенузата е еднаков со збирот од квадратите на катетите.

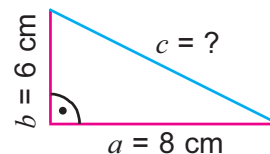
3. Пресметај ја хипотенузата c на правоаголниот триаголник, ако неговите катети се $a = 8$ cm и $b = 6$ cm.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

👉 Скица:

👉 Дадено: $a = 8$ cm и $b = 6$ cm.

👉 Се бара: $c = ?$

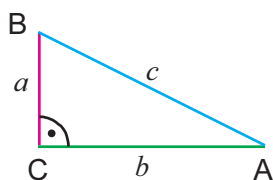


👉 Бидејќи триаголникот е правоаголен, според Питагоровата теорема имаме: $c^2 = a^2 + b^2$; т.е. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $c^2 = 8^2 + 6^2$; $c = \sqrt{64 + 36}$; $c = \sqrt{100}$; $c = 10$ cm.



■ Запомни дека во секој правоаголен триаголник со катети a , b и хипотенуза c важи формулата:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



👉 Ако се дадени двете катети, а се бара хипотенузата, тогаш:

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ т.е. } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

👉 Ако се дадени хипотенузата и едната катета, а се бара другата катета, тогаш:

$$a^2 = c^2 - b^2, \text{ т.е. } a = \sqrt{c^2 - b^2}, \text{ или } b^2 = c^2 - a^2, \text{ т.е. } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

4. За правоаголниот триаголник со катети $a = 12$ cm, $b = 16$ cm и хипотенуза $c = 20$ cm, провери ги формулите од Питагоровата теорема.

Точна е и обратната на Питагоровата теорема:

Ако во некој триаголник важи равенството $c^2 = a^2 + b^2$, тогаш тој триаголник е правоаголен.

5. Со помош на Питагоровата теорема, провери дали триаголникот со страни 9, 10, 14 е правоаголен.

Треба да знаеш:

- ◆ да ја искажеш Питагоровата теорема;
- ◆ да ја изразиш секоја страна на правоаголниот триаголник со помош на останатите.



Провери се!

- ▲ Дали е правоаголен триаголникот со страни: а) 12; 16; 21; б) 3; 1,6; 3,4?
- ▲ Најди ја непознатата страна на правоаголниот триаголник со катети a и b и хипотенуза c :
а) $c = 2,9$, $b = 2$; б) $c = 1$, $a = 0,8$.

Задачи

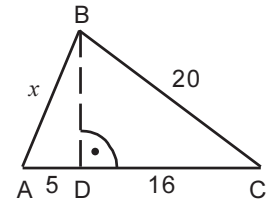
1. Страните на $\triangle ABC$ се:
а) 7; 24; 25; б) 8; 10; 15;
в) 8; 15; 17; г) 12; 15; 20.
Дали $\triangle ABC$ е правоаголен?

2. Најди ја непознатата страна на правоаголниот триаголник со катети a , b и хипотенуза c :
а) $a = 56$, $b = 33$; б) $b = 12$, $c = 37$;
в) $a = 25$, $b = 31$; г) $c = 2,9$, $a = 2$;
д) $a = 0,3$, $c = 0,34$.

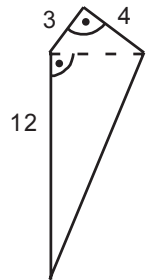
3. Најди го периметарот на правоаголниот триаголник ако неговите катети се:
а) 0,5 cm и 1,2 cm; б) 1,5 dm и 2 dm.

4. Најди го периметарот на правоаголниот триаголник со хипотенуза и катета:
а) 1 m и 0,8 m; б) 0,17 dm и 0,15 dm.

5. Најди го периметарот на $\triangle ABC$ според податоците на цртежот.



6. Најди го периметарот на четириаголникот од цртежот.



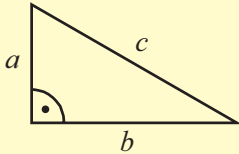
7. Може ли сите три страни на правоаголен триаголник да бидат:
а) парни, б) непарни природни броеви?
Образложи го одговорот.

10

ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА КАЈ ПРАВОАГОЛНИК, КВАДРАТ И РАМНОСТРАН ТРИАГОЛНИК

Појсиети се!

- За страните на правоаголен триаголник важи Питагоровата теорема.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

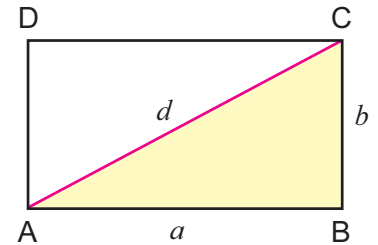
$$b^2 = c^2 - a^2$$



Често пати е потребно со помош на правоаголниот триаголник да решиш некој проблем од секојдневниот живот, техниката, геодезијата итн. Во многу геометриски фигури тој може да се согледа и да ти помогне да извршиш одредени пресметувања.

- На цртежот е претставен правоаголник ABCD со страни $a = 12$ cm и $b = 5$ cm.

- Воочи ја дијагоналата $\overline{AC} = d$.
- Размисли како ќе ја одредиш должината на дијагоналата.
- Каков триаголник е $\triangle ABC$? Во кое теме е правиот агол?
- Кои се катетите, а која е хипотенузата на $\triangle ABC$?
- Воочи дека, според Питагоровата теорема: $d^2 = a^2 + b^2$;
 $d^2 = 12^2 + 5^2 = 169$; $d = \sqrt{169}$; $d = 13$ cm.



- Најди го радиусот на кружницата опишана околу правоаголникот со страни $a = 32$ cm, $b = 24$ cm.

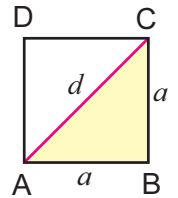


- Пресметај ја должината на дијагоналата на квадрат со страна a .

- Разгледај го цртежот и воочи дека:

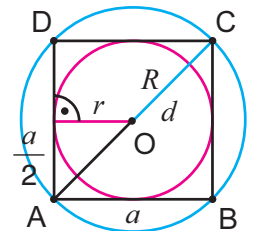
$\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен.

Според Питагоровата теорема: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; $d = \sqrt{2a^2}$; $d = a\sqrt{2}$; $\sqrt{2} \approx 1,41$.



- Пресметај ја дијагоналата на квадрат со страна: а) $a = 6$ cm; б) $a = 1,2$ cm.

- Одреди ги радиусите на впишаната и опишаната кружница на квадрат со страна $a = 3$ cm.





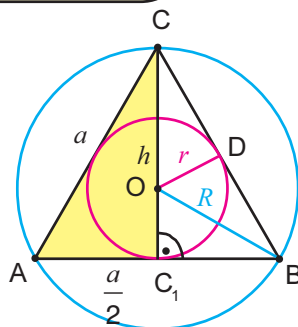
Знаеш дека дијагоналата на квадрат со страна a е: $d = a\sqrt{2}$. Можеш ли со помош на a да ги запишеш радиусот R на опишаната и радиусот r на впишаната кружница?

Од цртежот можам да заклучам дека: $r = \frac{a}{2}$, а $R = \frac{d}{2}$, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



6. На цртежот е претставен рамностран триаголник ABC . Според цртежот одговори на прашањата.

- Што претставува отсечката CC_1 за $\triangle ABC$?
- Што претставува отсечката CC_1 за правоаголниот триаголник AC_1C ?
- Што претставуваат отсечките OD , односно OB ?
- Зошто ортоцентарот O (пресек на висините) се совпаѓа со тежиштето (пресек на тежишните линии) во рамностран триаголник?
- Со помош на страната a запиши ги:
 h – висината; r – радиусот на впишаната кружница; R – радиусот на опишаната кружница.



- Може да се покаже дека во рамностран триаголник пресечната точка O на висините и тежишните линии ја дели висината (тежишната линија) на деловите: $\overline{OC_1} = \frac{1}{3}h$; $\overline{OC} = \frac{2}{3}h$.
- Воочи го одредувањето на: h, r, R во рамностран триаголник.

Од правоаголниот триаголник AC_1C следува:

☞ $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$; $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$; $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; $\sqrt{3} \approx 1,73$.

☞ $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$; $r = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. ☞ $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$; $R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

7. Пресметај ги h, R и r на рамностран триаголник со страна $a = 30$ cm.

Треба да знаеш:

- ◆ да ја примениш Питагоровата теорема во правоаголник, квадрат и рамностран триаголник.



Провери се!

- ▲ Колкав е радиусот на опишаната кружница околу квадрат со страна $a = 10$ cm?
- ▲ Одреди ја висината и радиусите на опишаната и впишаната кружница на рамностран триаголник со страна 10 dm.

Задачи

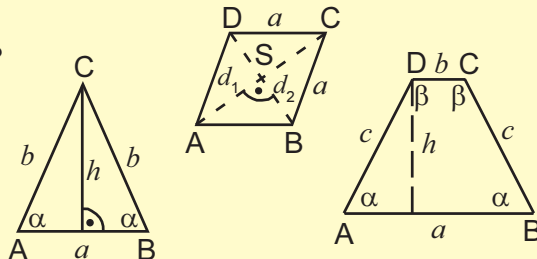
- Одреди ја дијагоналата на правоаголник со страни: а) 0,28 dm; 0,96 dm; б) 300 cm; 160 cm.
- Одреди го периметарот на правоаголник, зададен со: а) $d = 13$ m, $a = 12$ m; б) $d = 8,5$ dm; $b = 1,3$ dm.
- Во кружница со $R = 10$ dm е впишан правоаголник со страна 8 dm. Одреди го неговиот периметар.
- Средините на страните на квадратот со страна 10 cm се темиња на еден четириаголник. Одреди го неговиот периметар.
- Одреди ги радиусите на впишаната и опишаната кружница на квадратот со: а) $a = 10$ cm; б) $d = 10$ cm.
- Одреди ги h , R и r на рамностран триаголник со страна: а) $a = 1$, б) $a = 100$; в) $a = \sqrt{3}$.
- Во еден рамностран триаголник е впишана кружница со $r = 3,46$ cm. Одреди го неговиот периметар.
- Дали може дијагоналата и страните на еден правоаголник да имаат должини: а) 30, 40, 50; б) 20, 30, 40; в) 10, 20, 30; г) 150, 200, 250?
- Дадени се два квадрати. Едниот со страна $a = 3$ cm, а другиот со страна $b = 4$ cm. Одреди ја страната c на трет квадрат чијашто плоштина е еднаква на збирот од површините на дадените квадрати.

11

ЗАДАЧИ СО ПРИМЕНА НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Поисејте се!

- За кој триаголник се вели дека е рамнокрак?
- Каков четириаголник е ромбот?
- Кој трапез е рамнокрак?
- Разгледај ги цртежите и искажи ги својствата на секоја фигура.

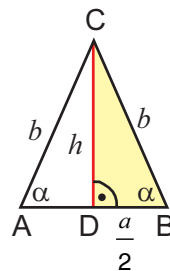


1. Разгледај го рамнокракиот триаголник на цртежот и одговори на прашањата.

- Дали правоаголниот триаголник BCD е составен дел на рамнокракиот триаголник $\triangle ABC$?
- Кои елементи на $\triangle ABC$ се катетите и хипотенузата на $\triangle BCD$?

Питагоровата теорема овозможува да се согледа една врска меѓу основата, кракот и висината на рамнокрак триаголник.

Забележа дека: $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$.



2. Одреди ја висината на рамнокрак триаголник со основа 10 cm и крак 13 cm.

■ Направи цртеж на рамнокрак триаголник ABC и повлечи ја висината CD.

■ Од $\triangle BCD$ воочи дека: $h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $h^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$.

Значи $h^2 = 144$; $h = \sqrt{144} = 12$, т.е. $h = 12$ cm.

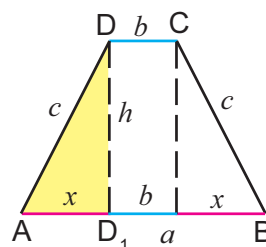
3. Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник ако се дадени основата 14 cm и висината кон основата 24 cm.



4. Разгледај го цртежот и воочи како ќе се примени Питагоровата теорема кај рамнокрак трапез.

● Согледај од цртежот како може да се најдат должините $\overline{AD_1} = x$.

☞ Согледај дека $a = b + 2x$; $2x = a - b$; $x = \frac{a-b}{2}$.



5. Одреди го кракот на рамнокрак трапез со основа 30 cm, 16 cm и висина 24 cm.

■ Нацртај рамнокрак трапез ABCD, означи ги елементите и повлечи висина DD_1 .

☞ Дадено е: $a = 30$, $b = 16$ и $h = 24$.

☞ Од правоаголниот триаголник AD_1D во задачата 4, се добива: $c^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$;

$$c^2 = 24^2 + \left(\frac{30-16}{2}\right)^2 = 576 + 49 = 625, \text{ односно } c = \sqrt{625} = 25; c = 25 \text{ cm.}$$

6. Најди ја висината h на рамнокрак трапез со основи 7 dm, 3 dm и крак 2,9 dm.



7. Размисли како ќе ја најдеш страната a на ромб, ако се дадени неговите дијагонали d_1 и d_2 .

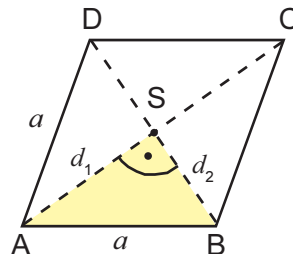
■ Разгледај го цртежот и одговори на прашањата.

● Именувај еден правоаголен триаголник во ромбот ABCD.

● Кои елементи на ромбот се страни на на тој триаголник?

● Кои се катетите и хипотенузата во правоаголниот $\triangle ABS$?

● Образложи зошто $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$.



8. Најди го периметарот на ромбот со дијагонали 24 cm и 10 cm.

■ Спореди го твоето решение со даденото.

👉 Дадено е: $d_1 = 24$ и $d_2 = 10$.

👉 $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$; $a^2 = \left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$;

👉 $a = \sqrt{169} = 13$ cm. 👉 $L = 4a$; $L = 4 \cdot 13 = 52$, т.е. $L = 52$ cm.

9. Во еден ромб дадени се страната $a = 13$ cm и дијагоналата $d_1 = 24$ cm. Одреди ја другата дијагонала d_2 .

Треба да знаеш:

◆ да ја примениш Питагоровата теорема во задачи за рамнокрак триаголник, рамнокрак траpez, ромб и во други задачи.



Провери се!

- ▲ Дијагоналите на еден ромб се 12 cm и 16 cm. Пресметај го неговиот периметар.
- ▲ Периметарот на рамнокрак триаголник со крак 41 cm изнесува 100 cm. Најди ја висината кон основата.

Задачи

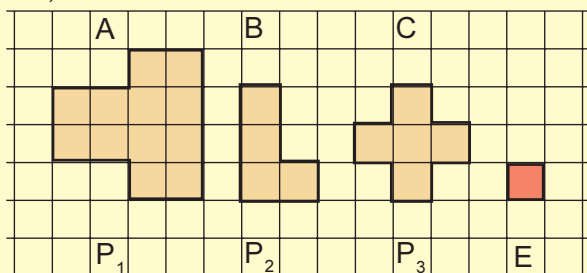
1. Основата на рамнокрак триаголник е 24 cm, а неговиот периметар 98 cm. Пресметај ја висината кон основата.
2. Основата на рамнокрак триаголник е 28 cm, а неговата висина е 48 cm. Најди го периметарот на триаголникот.
3. Дијагоналите на еден ромб се:
а) 42 и 50; б) 24,6 и 56,8.
Колку приближно изнесува страната на ромбот?
4. Страната на ромбот е 2,9 dm, а една дијагонала е 4 dm. Најди ја другата дијагонала.
5. Пресметај го кракот на рамнокрак траpez со основи 30 cm, 6 cm и висина 35 cm.
6. Најди го периметарот на рамнокрак траpez со основи 34 cm и 16 cm и висина 12 cm.
7. Да се најде висината на рамнокрак траpez со основи 16 cm, 30 cm и крак 25 cm.
8. Една скала долга 3 m е потпрена на сид. Нејзиниот долен дел е на 1,8 m од сидот. До која висина стигнала скалата на сидот?

ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИК

12 ПОИМ ЗА ПЛОШТИНА

Поисетѝ се!

- На квадратната мрежа има три фигури: А, В и С.



- Ако за мерна единица се земе плоштината Е на едно квадратче од мрежата, тогаш плоштината P_1 на фигурата А изнесува $P_1 = 12E$.

Мерниот број на плоштината P_1 , при единицата Е е 12.

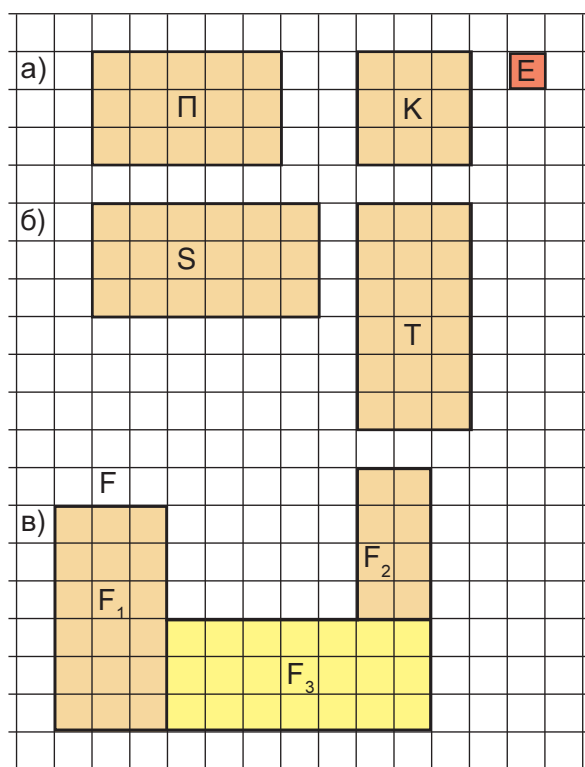
- Колкава е плоштината P_2 на фигурата В, односно плоштината P_3 на фигурата С, при мерната единица Е?
- Колку пати е поголема плоштината P_1 од плоштината P_2 ?
- Колкав е збирот на плоштините P_2 и P_3 ?
- Колкава плоштина се добива ако плоштината P_1 се помножи со 5?
- Кој знак треба да стои во крукчето за да се добие точен исказ:

$$P_2 + P_3 \quad \bigcirc \quad P_1?$$



1. На цртежот се дадени:

- правоаголник П и квадрат К;
- два складни правоаголници S и Т;
- фигура F, разделена на три правоаголници: F_1 , F_2 и F_3 што не се преклопуваат.



- Плоштината Е на едно квадратче од мрежата е земена за мерна единица.

- Одреди ја плоштината на правоаголникот П и квадратот К; каква вредност (позитивна или негативна) има мерниот број на плоштината на секој од нив?
- Какви се меѓу себе плоштините на правоаголниците S и Т?
- Одреди ја плоштината P на фигурата F и плоштините P_1 , P_2 , P_3 на фигурите F_1 , F_2 , F_3 соодветно. Потоа спореди ја плоштината P со збирот $P_1 + P_2 + P_3$.



Што можеш да заклучиш за плоштините на многуаголниците под а), б) и в) од претходната задача?

Можам да заклучам дека:

а) плоштината на правоаголникот и квадратот се искажани со позитивни броеви;
б) складните правоаголници имаат еднакви плоштини;
в) плоштината на фигурата F е еднаква со збирот од плоштините на составните правоаголници.

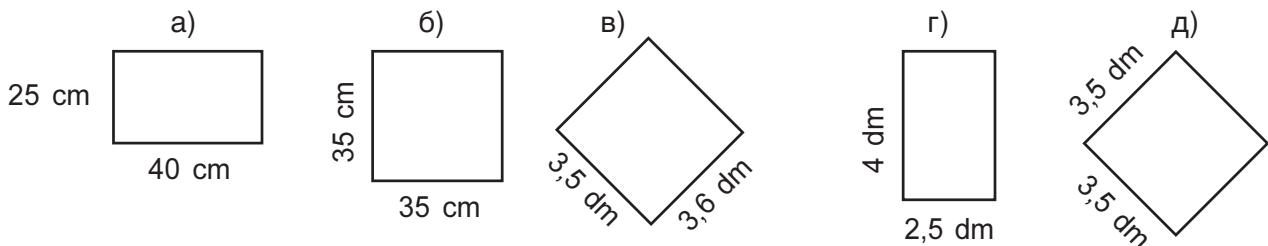


■ За плоштината на многуаголник општо, важат следните **основни својства**.

1 ^o	Плоштината на еден многуаголник се искажува со позитивен број.
2 ^o	Ако два многуаголника се складни, тогаш тие имаат еднакви плоштини.
3 ^o	Ако многуаголникот е составен од два или повеќе многуаголници што не се преклопуваат, тогаш неговата плоштина е еднаква на збирот од плоштините на тие многуаголници.
4 ^o	Плоштината на квадрат со страна 1 m се зема за основна мерна единица; таа се вика квадратен метар и се означува: 1 m ² .

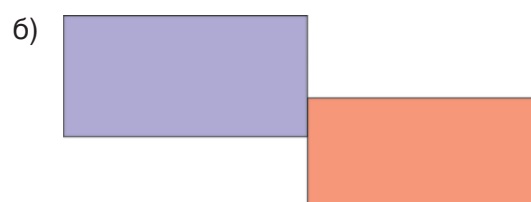
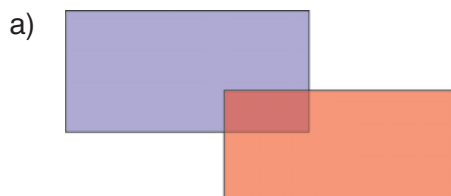
■ Од мерната единица 1 m² се изведуваат помали единици: 1 dm², 1 cm², 1 mm² и поголеми: 1 dam², 1 hm², 1 km².

2. Кои од правоаголниците на цртежот имаат еднакви плоштини и врз основа на кое својство?



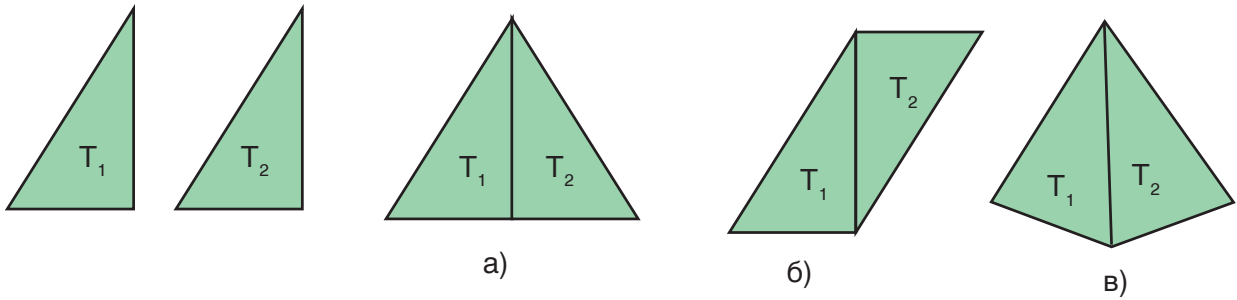
3. На цртежот, двата правоаголника на фигурата под а) се преклопуваат, а под б) – не.

● За која од тие две фигури важи својството 3^o, а за која не важи?





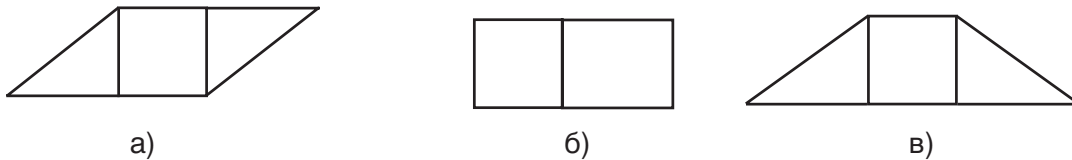
4. На цртежот се дадени два складни правоаголни триаголници, T_1 и T_2 , а потоа од нив се составени, три геометриски фигури: а), б), в).



- Именувај ја секоја од фигурите а), б) и в).
- Какви се меѓу себе плоштините на T_1 и T_2 ? Зошто?
- Какви се меѓу себе плоштините на фигурите а) и б); б) и в)? Зошто?

- За две фигури се вели дека се **еднаквоплошни**, ако имаат еднакви плоштини.
- Две фигури што можат да се состават или можат да се разделат на ист број соодветно складни фигури се еднаквоплошни.
- Фигурите а), б) и в) од задачата 4 се еднаквоплошни.

5. Одреди кои од фигурите на цртежот се еднаквоплошни.



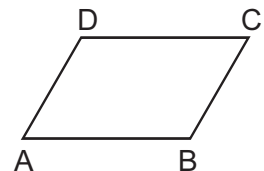
Треба да знаеш:

- ◆ да го објасниш поимот плоштина на многуаголник;
- ◆ да препознаеш еднаквоплошни многуаголници;
- ◆ да разложуваш многуаголници на делови и да составуваш од нив други, еднаквоплошни фигури.



Провери се!

- ▲ Искажи ги основните својства за плоштина.
- ▲ Ако две фигури се складни, тогаш тие се еднаквоплошни. Дали секои две еднаквоплошни фигури се складни? Образложи!
- ▲ Како ќе разложиш ромбоид за да составиш правоаголник од деловите? Објасни го тоа на цртежот.



Задачи

1. Изрежи два складни правоаголни триаголници и од нив состави:
 - а) рамнокрак триаголник;
 - б) правоаголник;
 - г) ромбоид.
 Зошто сите добиени фигури се еднакво-плошни?

2. Квадрат е разрежан по дијагоналите. Од добиените триаголници состави три конвексни многуаголници. Нацртај ги и именувај ги.

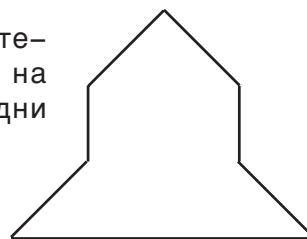
3. Ако два многуаголника се еднакво-плошни, дали мора да имаат ист број страни?

4. Ако два рамнострани триаголници имаат еднакви периметри, дали мора да имаат еднакви плоштини?

5. Ако два правоаголника имаат еднакви периметри, дали мора да имаат еднакви плоштини?

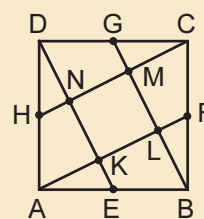
6. Утврди дали е точен следниот исказ.
 - а) Складните фигури се еднаквоплошни.
 - б) Еднаквоплошните фигури се складни.
 - в) Рамностраниите триаголници се складни.
 - г) Рамностраниите триаголници со соодветно еднакви страни се еднакво-плошни.
 - д) Квадрати со соодветно еднакви дијагонали се еднаквоплошни.

7. Фигурата на цртежот подели ја на четири складни трапези.



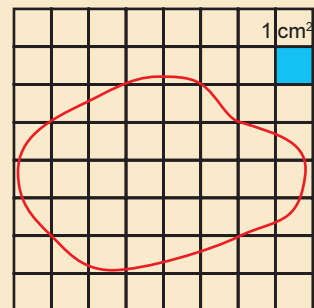
Обиди се ...

8. Даден е квадрат ABCD (на цртежот). E, F, G, H се средините на неговите страни. Спореди ја плоштината на четириаголникот KLMN со плоштината на квадратот ABCD.



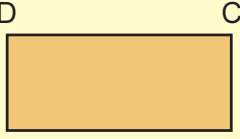
9. Во квадратната мрежа е нацртана криволиниска фигура. Направи (што е можно подобра) проценка за нејзината плоштина P земајќи ја за мерна единица плоштината E на едно квадратче од мрежата.

- Да направиш проценка за P значи да најдеш два броја, m и n , такви што $mE \leq P \leq nE$.



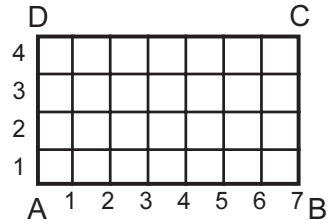
Појсетви се!

- Да се најде плоштината на даден правоаголник значи да се дознае колку квадратчиња, со страна А еднаква на избрана мерна единица за должина, ќе се сместат во правоаголникот и ќе го покријат.
- Која било од страните на правоаголникот ABCD може да се смета за негова **основа**; во тој случај, која било од нејзините соседни страни се смета за **висина** на правоаголникот.



1. Должината на основата АВ и должината на висината ВС на правоаголникот ABCD (на цртежот) се изразени **со цели броеви**:

$\overline{AB} = 7 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$.



- Колку квадратчиња со страна 1 cm има во редицата што се граничи со основата, а колку cm има основата? Колку квадратчиња го исполнуваат правоаголникот? Колкава е плоштината на правоаголникот изразена во cm^2 ?



По пребројувањето на квадратчињата, секако утврди дека плоштината изнесува 28 cm^2 . Но, како можеш да го добиеш бројот на квадратчињата што го исполнуваат правоаголникот, а без да ги броиш?

Ќе ги помножам основата и висината и ќе добијам: $7 \cdot 4 = 28$.

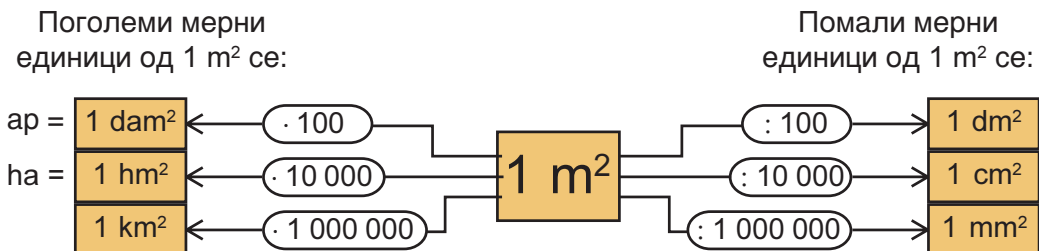


■ Значи, плоштината на правоаголникот ABCD е еднаква на **производот од основата и висината**.

2. Пресметај ја плоштината на правоаголникот со основа 15 dm и висина 6 dm во dm^2 според податоците на цртежот.

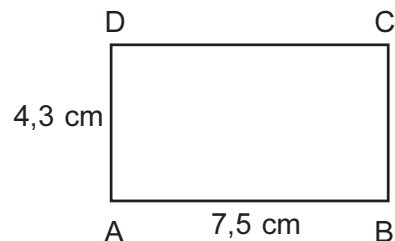


■ Потсети се дека: основна мерна единица за плоштина е квадратен метар (m^2). **Квадратен метар** е плоштината на квадрат со страна 1 m.



- Колку cm^2 има во 1 dm^2 ?
- Колку mm^2 има во 8 cm^2 ?
- Колку dm^2 има во 25 cm^2 ?

3. Пресметај ја плоштината на правоаголникот ABCD, при кој должината на основата и висината се изразени со **децимални броеви**: $\overline{AB} = 7,5 \text{ cm}$ и $\overline{BC} = 4,3 \text{ cm}$.



- Ако го избереш 1 mm како мерна единица за должините, со кои цели броеви ќе бидат изразени \overline{AB} и \overline{BC} ?
- Воочи дека $\overline{AB} = 75 \text{ mm}$, $\overline{BC} = 43 \text{ mm}$. Најди ја плоштината P на правоаголникот во mm^2 .
- Добиениот број ($P = 75 \cdot 43 = 3\,225$; $P = 3\,225 \text{ mm}^2$), изрази го во cm^2 и спореди го со производот од должината на основата и висината: $7,5 \cdot 4,3$.
- Што можеш да заклучиш од тоа?

Можам да заклучам дека плоштината на правоаголникот се добива како производ на основата и висината и во овој случај, кога тие се изразени со децимални броеви.

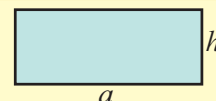


- Важи и општо:

Плоштината на правоаголник е еднаква на производот од должината на основата и висината:

$$P = a \cdot h$$

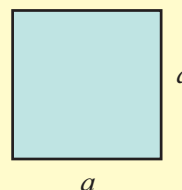
P – плоштината; a – основата; h – висината



- Посебно, ако $a = h$, тогаш правоаголникот е квадрат, па $P = a \cdot h = a \cdot a = a^2$.

Плоштината на квадрат е еднаква на квадратот од должината на неговата страна:

$$P = a^2$$



- Формулата $P = a \cdot h$ важи и кога основата и висината се изразени со кои било реални броеви.

👉 Наместо „должината на основата“, накусо се вели и само: „основата“. Слично за: „висината“, „дијагоналата“ и др.

4. Пресметај ја плоштината на правоаголник со основа 12,4 dm и висина 7,05 dm.

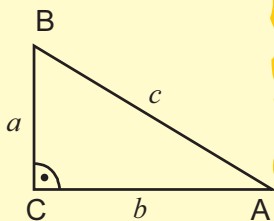
5. Пресметај ја плоштината на квадрат со страна $a = 3,4 \text{ cm}$.

Појсееи се!

- За правоаголниот $\triangle ABC$ со хипотенуза c и катети a, b важи равенството (Питагоровата теорема):

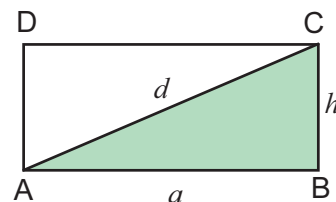
$$c^2 = a^2 + b^2$$

- Колку изнесува c , ако $a = 5, b = 12$?
- Колку е a , ако $c = 10, b = 6$?
- Колку е c , ако $a = b = 1$?



6. Пресметај ја плоштината P на правоаголник со основа $a = 12$ cm и дијагонала $d = 13$ cm.

- Ако не се сети, воочи ја постапката.
- Разгледај го правоаголникот ABCD на цртежот и воочи го правоаголниот $\triangle ABC$, во кој хипотенузата d и катетата a се познати, а не е позната катетата h .



- Изрази ја катетата h со помош на d и a .
- Добиената вредност за h ($h = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$) замени ја во формулата $P = a \cdot h$.

7. Пресметај ја плоштината P на квадрат со дијагонала $d = 6$ cm.

- Спореди го твоето решение и воочи ја постапката:

☞ Треба плоштината a^2 да ја изразиш со дијагоналата d .

☞ Во правоаголниот триаголник KLM, според Питагоровата теорема важи: $d^2 = a^2 + a^2$;

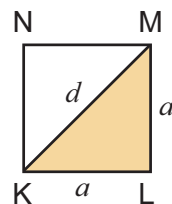
$$d^2 = 2a^2; \quad a^2 = \frac{d^2}{2}. \quad \text{Наместо } P = a^2 \text{ можеш да запишеш } P = \frac{d^2}{2}.$$

☞ $P = \frac{d^2}{2}$; $P = \frac{6^2}{2}$; $P = \frac{36}{2}$; $P = 18 \text{ cm}^2$.

- Важи и општо:

Плоштината P на квадрат со дијагонала d може да се пресмета со формулата

$$P = \frac{d^2}{2}.$$



Треба да знаеш:

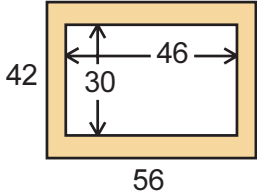
- ◆ да одредиш плоштина на правоаголник и квадрат по соодветната формула и да ја изразиш во соодветни мерни единици;
- ◆ да ги користиш својствата на правоаголник и квадрат во посложени задачи за плоштина.



Провери се!

- ▲ Плоштината на еден правоаголник е 72 dm^2 , а висината му е 60 cm . Колку е основата?
- ▲ Периметарот на еден квадрат е 10 dm . Колку е неговата плоштина?
- ▲ Плоштината на еден квадрат е 18 dm^2 . Колку е дијагоналата?

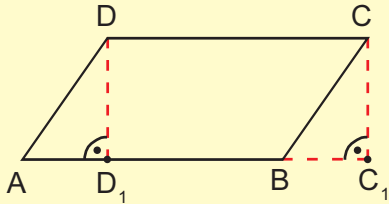
Задачи

1. Пресметај ја плоштината на правоаголник со страни:
 - а) 24 cm , 36 cm ; б) $7,8 \text{ dm}$; $4,5 \text{ dm}$;
 - в) $3\frac{1}{4} \text{ cm}$; $8\frac{1}{3} \text{ cm}$.
2. Пресметај го периметарот на квадрат, еднаквоплоштен со правоаголник со димензии 63 cm и 28 cm .
3. Најди ја плоштината на правоаголната рамка според цртежот. Димензиите се дадени во cm .
 
4. Пресметај ја плоштината на квадрат со:
 - а) страна $5,3 \text{ cm}$; б) дијагонала $6,4 \text{ dm}$.
5. Како ќе се промени плоштината на правоаголникот ако:
 - а) основата му се зголеми 3 пати, а висината 4 пати;
 - б) основата и висината му се намалат 2 пати;
 - в) основата му се зголеми 4 пати, а висината му се намали 4 пати;
 - г) основата му се зголеми 3 пати, а висината остане иста?
6. Како ќе се измени плоштината на квадратот ако неговата страна:
 - а) се зголеми 2 пати;
 - б) се намали 3 пати;
 - в) се зголеми 1,5 пати;
 - г) се зголеми 50%;
 - д) се намали 50%;
 - ѓ) се намали 60%?
7. Како ќе се промени плоштината на правоаголник со страни a и b (cm), при што $b > 1$ (cm), ако a се зголеми за 1 (cm), а b се намали за 1 (cm)?
8. Колкав процент ќе се зголеми плоштината на правоаголник ако должините на страните се зголемат по 10%?
9. Колку пати треба да се зголеми страната на квадратот за да се зголеми неговата плоштина 2,25 пати?
10. Плоштината на еден правоаголник е 168 cm^2 , а едната страна му е 24 cm . Пресметај ја дијагоналата.
11. Дијагоналата на еден квадрат е $4\sqrt{2} \text{ cm}$. Пресметај ја:
 - а) плоштината;
 - б) периметарот на квадратот.
12. Периметарот на некој правоаголник е 12 cm , а мерните броеви на неговите страни се природни броеви.
 - а) Колку такви правоаголници постојат? Пресметај ги нивните плоштини.
 - б) Кој од нив има најголема плоштина?
13. Должината на една соба е $4,2 \text{ m}$, а ширината е $5,4 \text{ m}$. Во собата има два прозорци со ширина $1,2 \text{ m}$ и висина $1,6 \text{ m}$. Осветленоста на собата се смета за доволна, ако плоштината P_1 на прозорците претставува 20% од плоштината P на подот. Дали е доволно осветлена собата?

14 ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

Појсетии се!

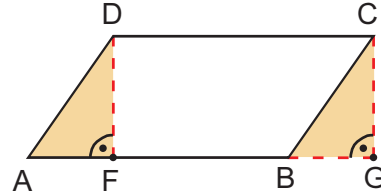
- Која било од страните на паралелограмот може да се нарече **основа** на паралелограмот.
- Четириаголникот ABCD, на цртежот е паралелограм, а отсечките DD_1 и CC_1 се нормални на основата AB.



- Какви се меѓу себе должините $\overline{DD_1}$ и $\overline{CC_1}$?
- Што се отсечките DD_1 , CC_1 (и нивните должини) за паралелограмот ABCD?
- Какви се меѓу себе $\sphericalangle DAD_1$ и $\sphericalangle CBC_1$?
- Како се вика паралелограмот ABCD, ако:
 - a) $\overline{AB} = \overline{AD}$?
 - b) $\sphericalangle A = 90^\circ$?
 - v) $\overline{AB} \neq \overline{AD}$ и $\sphericalangle A$ е остар?



1. Од темињата D и C на паралелограмот (на цртежот) се спуштени висини кон основата AB.



- Разгледај ги $\triangle AFD$ и $\triangle BGC$ и размисли дали тие се складни.

- Можеш да согледаш дека:

👉 $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\sphericalangle DAF = \sphericalangle CBG$ и $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BCG$ (агли со паралелни краци).

👉 $\triangle AFD \cong \triangle BGC$ (според признакот **АСА**).

- Покажи дека четириаголникот FGCD е правоаголник.
- Објасни зошто $\overline{AB} = \overline{FG}$.

Дали се еднаквоплошни паралелограмот ABCD и правоаголникот FGCD? Зошто?



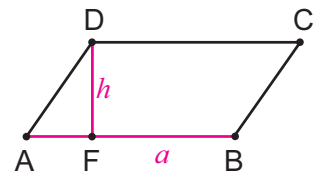
Да, зашто секој од нив е составен од траpezот FBСD и од по еден триаголник, а тие триаголници се складни.

- Од тоа можеш да согледаш дека:
Плоштината P на паралелограмот ABCD е еднаква со плоштината на правоаголникот FBСD, па $P = \overline{FG} \cdot \overline{FD} = \overline{AB} \cdot \overline{FD}$.

Важи и ошито:

- За паралелограм со основа $\overline{AB} = a$ и висина $\overline{DF} = h$ плоштината е производ од неговата основа и соодветната висина, т.е.

$$P = a \cdot h.$$



2. Пресметај ја плоштината на паралелограм со основа $a = 6,2$ cm и висина спуштена кон таа основа, $h = 4,5$ cm.

$$P = a \cdot h; \quad P = 6,2 \cdot 4,5; \quad P = 27,9 \text{ cm}^2.$$

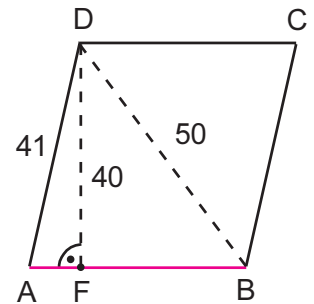
3. Страните на еден ромбоид се $a = 8$ cm и $b = 6$ cm. Висината кон страната a е 3 cm. Колкава е висината кон страната b ?

4. Страната на еден ромб е 12,5 cm, а плоштината му е 40 cm^2 . Пресметај ја висината на ромбот.

5. Поголемата страна на еден паралелограм е 41 cm, висината кон помалата страна е 40 cm, а помалата дијагонала е 50 cm. Пресметај ја плоштината на паралелограмот.

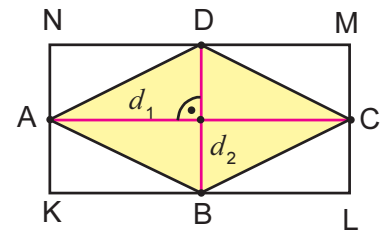
■ За да ја пресметаш плоштината на паралелограмот во овој случај неопходно е да ја примениш Питагоровата теорема.

■ Направи цртеж како дадениот и воочи дека $P = \overline{AB} \cdot 40 \text{ cm}^2$. За да ја најдеш \overline{AB} , разгледај ги правоаголните триаголници AFD и BFD, а потоа пресметај ги: \overline{AF} , \overline{FB} , $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$.



6. На цртежот е претставен ромб ABCD. Потоа е конструиран четириаголникот KLMN, така што неговите страни се паралелни со дијагоналите на ромбот.

- Со помош на цртежот, обиди се да најдеш формула за пресметување плоштина на ромбот ако се дадени неговите дијагонали d_1 и d_2 .



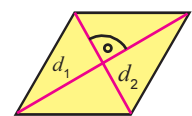
Разгледај го цртежот и одговори на следниите прашања

- Каква е заемната положба на дијагоналите на ромбот?
- Од кој вид е четириаголникот KLMN?
- Колку изнесува плоштината на четириаголникот KLMN, изразена со помош на d_1 и d_2 ?
- Колку пати е поголема плоштината на четириаголникот KLMN од плоштината на ромбот?

■ Ако одговори правилно на претходните прашања, можеш да заклучиш дека:

Плоштината P на ромб со дијагонали d_1 и d_2 е еднаква на половината од производот на дијагоналите, т.е.

$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$



7. Пресметај ја плоштината на ромб со дијагонали $d_1 = 6$ dm и $d_2 = 45$ cm.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 45 = 1\,350; \quad P = 13,5 \text{ dm}^2.$$

Треба да знаеш:

- ◆ да пресметуваш плошина на паралелограм (ромб и ромбоид) според соодветна формула;
- ◆ да ја образложиш точноста на формулите за пресметување плошина на ромбоид и ромб;
- ◆ да ги користиш својствата на ромбоид и ромб за решавање посложени задачи за плошина.

Задачи

1. Пресметај ја плоштината на метална плоча во форма на ромбоид со страна 25,8 cm и висина кон таа страна 8,4 cm.
2. Пресметај ја плоштината на ромб со дијагонали 18 cm и 3 dm.
3. Пресметај ја плоштината на ромбоид на кој страните му се 12,5 dm и 32,5 cm, а висината кон помалата страна е 10 cm. Потоа, најди ја другата висина.
4. Страните на еден паралелограм се 9 cm и 12 cm. Пресметај ја неговата плошина ако поголемата од неговите висини е 8 cm.
5. Пресметај ја плоштината на паралелограм со страни 6 cm и 8 cm, а со остар агол од 30° .
6. Пресметај ја плоштината на ромб кој има страна 8,4 dm и тап агол од 150° .
7. Четириаголникот на цртежот е паралелограм. Изврши ги неопходните мерења на него и пресметај му ја плоштината.



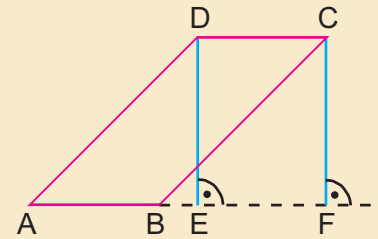
Провери се!

- ▲ Колку е плоштината на ромбоид со основа 12 cm и висина 7 cm?
 - ▲ Колкава е страната на ромб со висина $h = 8$ cm и плошина $P = 96$ cm²?
 - ▲ Ромб со дијагонала $d_1 = 9$ dm има плошина $P = 27$ dm². Колкава е другата дијагонала?
8. Може ли плоштината на паралелограм да биде еднаква на производот од основата и една дијагонала?
 9. Плоштината на еден паралелограм е 144 cm². Пресекот на дијагоналите е оддалечен од страните 3 cm и 4 cm. Пресметај го периметарот на паралелограмот.
 10. а) Како да се подели даден ромб на три дела, од кои може да се состави правоаголник, така што основата да му биде едната од дијагоналите на ромбот?
б) Користејќи го тоа, изведи ја формулата што ја изразува плоштината на ромбот преку неговите дијагонали.
 11. Помалата страна на паралелограмот е 13 cm, висината спуштена кон поголемата страна е 12 cm, а помалата дијагонала е 15 cm. Најди ја плоштината на паралелограмот.

Обиди се...

12. Подножјата Е и F од висините на паралелограмот ABCD, спуштени од D и C соодветно, паѓаат надвор од основата АВ (како на цртежот).

- Покажи дека плоштината P_{ABCD} (на паралелограмот ABCD) е еднаква со плоштината P_{EFCD} (на правоаголникот EFCD) и $P_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{DE}$.



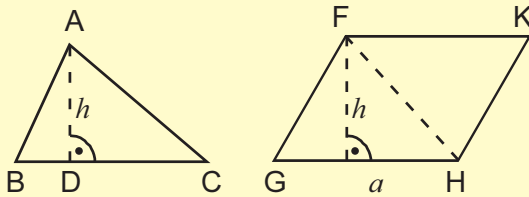
Помош:

$$P_{ABCD} + P_{BFC} = P_{EFCD} + P_{AED}; \Delta AED \cong \Delta BFC, \text{ па } P_{ABCD} = P_{EFCD}; \overline{AB} = \overline{EF}.$$

15 ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Пошсетти се!

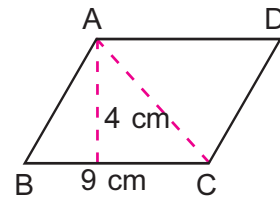
- За ΔABC на цртежот, која било од страните може да се земе за негова **ОСНОВА**. Отсечката AD (и должината $\overline{AD} = h$) е **ВИСИНА**, соодветна на основата BC.



- Разгледај го паралелограмот FGHK.
- Колку е неговата плоштина, ако a е основата и h соодветната висина?
- Какви се меѓу себе ΔFGH и ΔHKF ?

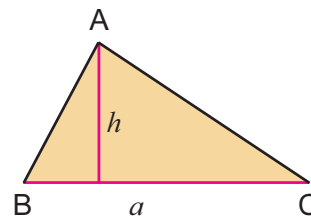


1. Паралелограмот ABCD на цртежот има основа $a = 9$ cm и висина $h = 4$ cm.



- Пресметај ја неговата плоштина.
- Согледај дека $\Delta ABC \cong \Delta CDA$; какви се меѓу себе плоштините на тие триаголници?
- Колку е плоштината на ΔABC ? Зошто? Колку пати таа е помала од плоштината на паралелограмот?

2. На цртежот е даден ΔABC , чијашто основа е a и соодветната висина h .

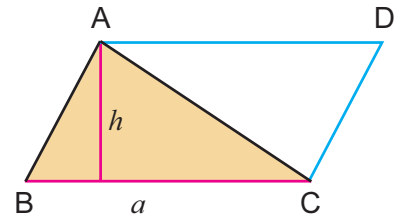


Формулата за пресметување на плоштината на $\triangle ABC$ е: $P = \frac{1}{2} a \cdot h$.

● Обиди се да го докажеш тоа.

■ При решавањето на задачата 1, работеше со паралелограм ABCD како на цртежот.

● Дали тоа ти дава идеја како ќе се добие бараната формула од она што го знаеш за паралелограмот?



■ Ако не се сети, проследи го следното размислување.

● Какви се меѓу себе $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$? ☞ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (Зошто?)

● Колку е плоштината на паралелограмот ABCD? ☞ $P_{ABCD} = a \cdot h$

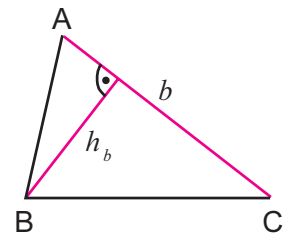
● Каква врска има плоштината на $\triangle ABC$ со плоштината на паралелограмот ABCD? ☞ $P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{2} a \cdot h$

Значи: плоштината на $\triangle ABC$ е $P = P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h$, а тоа требаше да го докажеш.

3. Пресметај ја плоштината на триаголник со основа $a = 8$ cm и соодветна висина $h_a = 9$ cm.

■ $P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36$; $P = 36$ cm².

4. Како гласи формулата за плоштината на $\triangle ABC$ со основа b и соодветна висина h_b ?



Воочи и зајомни

■ Секоја страна на $\triangle ABC$ може да се земе за основа и затоа е точно дека

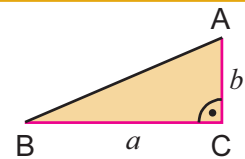
$$P = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$$

т.е. плоштината на триаголникот е еднаква со полупроизводот од основата и соодветната висина.

5. На цртежот е даден правоаголен $\triangle ABC$ со катети a и b .

● Што е соодветната висина на катетата a ?

● Запиши ја формулата за пресметување на неговата плоштина.



- Пресметај ја плоштината на правоаголниот триаголник со катети $a = 10 \text{ dm}$ и $b = 7 \text{ dm}$.

■ Плоштината на правоаголен триаголник со катети a и b може да се пресмета со формулата:

$$P = \frac{1}{2} ab.$$



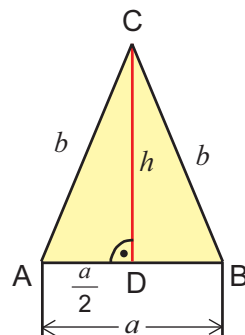
6. Пресметај ја плоштината P на рамнокракиот триаголник со основа $a = 10 \text{ cm}$ и крак $b = 13 \text{ cm}$.

■ Размисли како ќе ја најдеш висината $h = \overline{CD}$ за да ја примениш формулата $P = \frac{1}{2} ah$.

👉 Искористи го својството на рамнокрак триаголник: висината спуштена од врвот е симетрала на основата, па $\overline{AD} = \overline{BD}$.

👉 Примени ја Питагоровата теорема:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$



7. Пресметај ја плоштината на рамностран триаголник со страна $a = 8 \text{ cm}$.

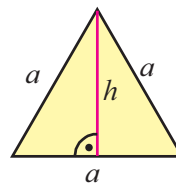
■ Потсети се дека за рамностран триаголник важи:

👉 $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4};$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2};$

$P = \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$

$P = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}.$



8. Даден е $\triangle ABC$ со страни $a = 7 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$ и $c = 12 \text{ cm}$. Колку е неговата плоштина?

■ Плоштината на триаголник со страни a , b и c може да се пресмета и

по формулата

$$P = \sqrt{s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)},$$

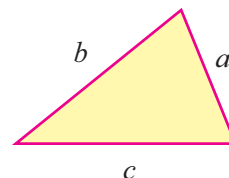
каде што s е полусбирот од страните, т.е.

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Оваа формула се вика **Херонова формула** (по името на античкиот математичар Херон).

● $s = \frac{7 + 9 + 12}{2} = 14;$

● $P = \sqrt{14 \cdot (14 - 7) \cdot (14 - 9) \cdot (14 - 12)} = \sqrt{14 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{980}; P \approx 31,3 \text{ cm}^2.$



Треба да знаеш:

- ◆ да одредиш плоштина на триаголник со дадена основа и соодветни висини;
- ◆ да ја образложиш формулата $P = \frac{1}{2} ah$, за плоштина на триаголник;
- ◆ да решаваш посложени задачи за плоштина на триаголник.

Задачи

1. Најди ја плоштината на триаголник со основа a и соодветна висина h ако:
а) $a = 7$ cm, $h = 8$ cm;
б) $a = 6$ dm, $h = 12$ cm;
в) $a = 18,4$, $h = 13,5$.
2. Колку ќе се промени плоштината на триаголник ако:
а) основата му се зголеми трипати, а висината му се намали двапати;
б) основата му се намали двапати и висината му се намали петпати?
3. Колку проценти ќе се зголеми плоштината на триаголник ако основата му се зголеми 50%, а висината му се намали 30%?
4. Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник со катети a и b , ако:
а) $a = 15$, $b = 9$;
б) $a = 20$ и еден од аглиите е 45° .



Провери се!

- ▲ Плоштината на еден триаголник е 56 cm², а една негова страна е 14 cm. Колкава е соодветната висина?
- ▲ Во еден правоаголен триаголник, едната катета е 12 mm, а хипотенузата е 13 mm. Колкава е плоштината?

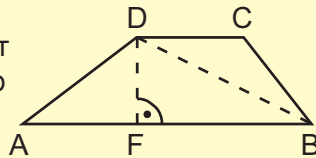
5. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со основа 18 cm и крак 41 cm.
6. Пресметај ја плоштината на рамностран триаголник со страна $a = 8$ cm.
7. Најди ја плоштината на триаголник ако се дадени трите страни:
а) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm; $c = 10$ cm;
б) $a = 13$ dm, $b = 14$ dm; $c = 15$ dm;
в) $a = 7$ cm, $b = 11$ cm; $c = 12$ cm.
8. Најди ја плоштината на рамнокрак правоаголен триаголник, ако должината на неговата хипотенуза е c .

Обиди се...

9. Најди ја плоштината на рамнокрак триаголник, ако висината, спуштена кон основата е 30 cm, а висината спуштена кон бочната страна е 36 cm.

Поисети се!

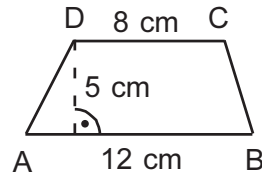
- Четириаголникот ABCD на цртежот е траpez, при што $AB \parallel DC$.



- Именувај ги: основите, краците и висината на траpezот.
- Пресметај ја: а) плоштината на $\triangle ABD$; б) плоштината на $\triangle BCD$, ако $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$, $\overline{DC} = 5 \text{ cm}$, $\overline{DF} = 4 \text{ cm}$.



- На цртежот е даден траpez со основи 12 cm и 8 cm, и висина 5 cm.



- Одреди ја неговата плоштина.
- Ако с уште не се сети, еве една идеја: раздели го траpezот (со една дијагонала) на два триаголника – како за задачата во „Потсети се!“, на пример, со DB; ќе добиеш:

$$P = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 50; \quad P = 50 \text{ cm}^2.$$



Воочи дека изразот $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5$ може да се запише $\frac{12+8}{2} \cdot 5$. Кои операции се извршени со дадените елементи на траpezот?

Плоштината на траpezот е пресметана така што полузбирот од основите е помножен со висината.

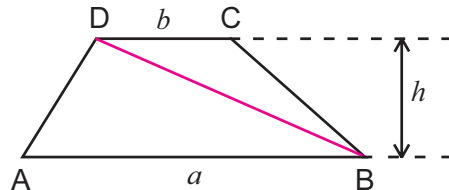


- Даден е траpez со основи a и b , и висина h . Покажи дека неговата плоштина може да се пресмета со формулата:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

т.е. плоштината на траpezот е еднаква со производот на полузбирот од неговите основи и висината.

- Разгледај го траpezот ABCD, којшто е поделен со дијагонала BD на два триаголника.
- Во каква врска е плоштината P на траpezот со плоштините P_{ABD} и P_{BCD} (на $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$)?
- Со помош на a , b и h , запиши колку е P_{ABD} и колку е P_{BCD} , а потоа собери ги добиените изрази.

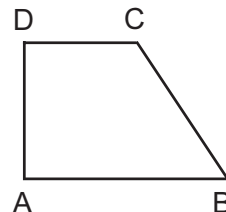


Воочи дека од претходните две барања произлегува следното:

$$P = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h, \text{ т.е. формулата што се бараше.}$$

3. Пресметај ја плоштината на траpezот со основи 5 dm и 4 dm, и висина 25 cm.

4. Четириаголникот ABCD на цртежот е правоаголен траpez. Изврши ги неопходните мерења колку што можеш попрецизно, и пресметај му ја плоштината.



• Која е висината на траpezот?

5. Пресметај ја плоштината на рамнокракиот траpez со основи $a = 48$ cm, $b = 30$ cm и крак 41 cm.

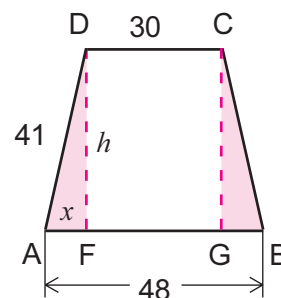
Обиди се сам, а потоа проследи го упатството.

Нацртај рамнокрак траpez ABCD како на цртежот.

За да ја најдеш висината h , прво треба да го одредиш $x = \overline{AF}$.

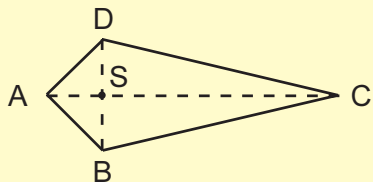
Воочи дека $\overline{AF} = \overline{GB} = x$, па $x = \frac{a-b}{2} = \frac{48-30}{2} = 9$.

Потоа, за да ја одредиш висината h , примени ја Питагоровата теорема.



Поисети се!

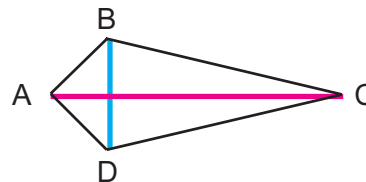
Четириаголникот ABCD на цртежот е делтоид (со: $\overline{AB} = \overline{AD}$).



- Кои страни се еднакви меѓу себе?
- Какви се меѓу себе неговите дијагонали?
- Какви се меѓу себе $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$?
- Ако $\overline{AC} = 10$ cm и $\overline{BD} = 6$ cm, колку е плоштината на а) $\triangle ACD$; б) $\triangle ABC$?



6. Пресметај ја плоштината P на делтоидот ABCD (на цртежот), ако дијагоналите се: $\overline{AC} = 14$ cm, $\overline{BD} = 8$ cm.



Пресметај ја прво плоштината P_{ABC} , потоа плоштината P_{ADC} и, на крајот, пресметај: $P = P_{ABC} + P_{ADC}$.

7. Најди формула за пресметување на плоштината на делтоид со помош на неговите дијагонали d_1 и d_2 .

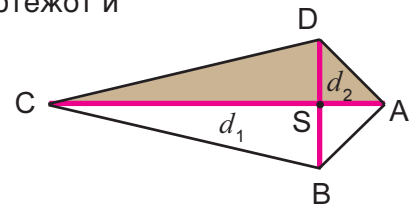
■ Размисли сам, а потоа разгледај го делтоидот ABCD на цртежот и проследи го објаснението.

👉 $\triangle ABC \cong \triangle ADC;$

👉 $\overline{SB} = \overline{SD} = \frac{1}{2} d_2;$

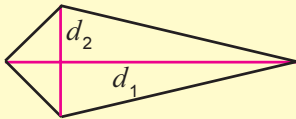
👉 $P_{ABC} = P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{SD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot \frac{1}{2} d_2 = \frac{1}{4} d_1 d_2.$

👉 $P = P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC} = \frac{1}{4} d_1 d_2 + \frac{1}{4} d_1 d_2 = \frac{1}{2} d_1 d_2.$



Воочи и зайомни:

■ Плоштината на делтоидот е еднаква на полупроизводот од неговите дијагонали, т.е.



$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

■ Со истата формула може да се пресмета плоштината и на кој било четириаголник со заемно нормални дијагонали d_1 и d_2 .

8. Даден делтоид има плоштина 90 dm^2 , а едната дијагонала му е 15 dm . Колкава е другата дијагонала?

Треба да знаеш:

◆ да пресметуваш плоштина на трапез и делтоид.



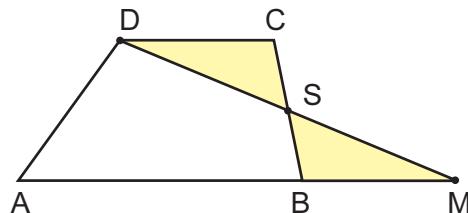
Провери се!

- ▲ Пресметај ја плоштината на трапезот со основи $a = 9 \text{ dm}$ и $b = 5 \text{ dm}$ и висина 8 cm .
- ▲ Еден делтоид има плоштина 90 cm^2 , а едната дијагонала е 20 cm . Колкава е другата дијагонала?

Задачи

1. Основите на еден трапез се 8 cm и 4 cm , а неговата плоштина е 42 cm^2 . Пресметај ја висината.
2. Плоштината на еден трапез е 150 cm^2 , едната основа е 11 cm , а висината е 10 cm . Колкава е другата основа?
3. Пресметај ја должината на средната линија на трапез, чијашто плоштина е 180 cm^2 , а висината е 12 cm .
4. Пресметај ја плоштината на еден правоаголен трапез, ако помалата основа му е 7 cm , а краците се 4 cm и 5 cm .
5. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи 9 cm и 15 cm , а еден од аглиите при основата е 45° .
6. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со:
 - а) основи 17 cm и 7 cm , и крак 13 cm ;
 - б) помала основа 16 cm , крак 25 cm и висина 24 cm .

7. Пресметај ја плоштината на делтоид со дијагонали 15 cm и 4 cm.
8. Пресметај ја плоштината на делтоид со страни 16 cm и 20 cm, а дијагоналата што не е симетрала на неговите агли е 24 cm.
9. Пресметај ја плоштината на трапез чишто основи се 11 cm и 9 cm, а едниот од краците има 10 cm и образува со основата агол од 30° .
10. На цртежот е даден трапезот ABCD, при што точката S е средина на кракот CB.

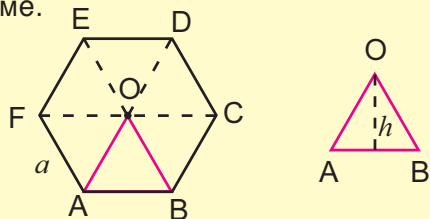


- а) Врз основа на цртежот, утврди дека трапезот е еднаквоплоштен со триаголникот AMD.
- б) Изведи ја формулата за плоштина на трапез, користејќи ја формулата за плоштина на триаголник.

17 ПЛОШТИНА НА ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК

Појсетии се!

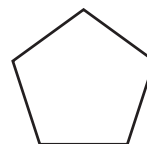
- Многуаголник на кој сите страни му се еднакви и сите агли му се еднакви се вика *правилен многуаголник*.
- На цртежот е даден правилен шестаголник ABCDEF. Од неговиот центар O е повлечен радиусот до секое негово теме.



- На колку триаголници е разделен шестаголникот?
- Кој било од тие триаголници, на пример $\triangle ABO$, се вика *карактеристичен триаголник* за шестаголникот.
- Како се вика неговата висина h ?
- Како се вика неговата страна OA?
- Колку е периметарот L на шестаголникот ако страната му е $a = 4$ cm?



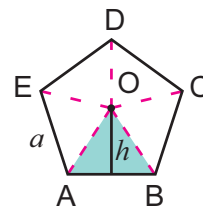
1. На цртежот е претставен правилен петаголник.



- Пресметај ја неговата плоштина P, ако му е зададена страната $a = 3$ cm и апотемата $h = 2$ cm.
- Колку пати плоштината на петаголникот е поголема од плоштината на карактеристичниот триаголник?

- Ако не се сети, проследи ја постапката.

- Сврзи го секое теме на петаголникот ABCDE со неговиот центар O, како на цртежот – ќе добиеш пет складни триаголници.



- Пресметај ја плоштината на карактеристичниот $\triangle ABO$.

- Пресмета дека: $\frac{a \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$.



Секој карактеристичен триаголник на петаголникот има плошина 3 cm^2 . Како ќе ја пресметаш плоштината на петаголникот?

Плоштината P на петаголникот е петпати поголема од $\frac{a \cdot h}{2}$, т.е.



$$P = 5 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 5 \cdot 3; P = 15 \text{ cm}^2.$$

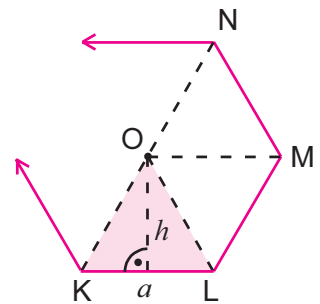
■ Согледај дека важи и општо:

■ Плоштината на правилен n -аголник со дадена страна a и апотема h се добива кога плоштината $\frac{a \cdot h}{2}$ на карактеристичниот триаголник на n -аголникот ќе се помножи со n , т.е.

$$P = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}.$$

2. Даден е правилен n -аголник со темиња K, L, M, N, \dots , страна a и апотема h . Од неговиот центар O се повлечени радиусите до темињата, како на цртежот.

● Изрази ја плоштината P на n -аголникот со помош на неговиот периметар L .



Согледај дека:

● n -аголникот е разделен на n складни триаголници.

● Плоштината на секој од тие триаголници е $\frac{a \cdot h}{2}$.

● Плоштината на n -аголникот е $n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$, т.е. $\frac{(n \cdot a)h}{2}$.

● Бидејќи $na = L$, следува дека $P = \frac{1}{2} Lh$.

■ Важи општо:

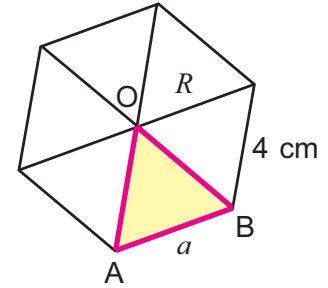
■ Плоштината на правилен многуаголник е еднаква со полупроизводот од неговиот периметар и апотемата, т.е.

$$P = \frac{1}{2} Lh.$$

3. Пресметај ја плоштината на правилен шестаголник со страна $3,5 \text{ dm}$ и апотема $0,3 \text{ m}$.

4. Најди ја страната на правилен десетаголник со плошина $P = 769 \text{ cm}^2$ и апотема $h = 15,38 \text{ cm}$.

$$P = 10 \cdot \frac{a \cdot h}{2}; 769 = 10 \cdot \frac{a \cdot 15,38}{2}; 769 = 76,9 a; a = 10 \text{ cm}.$$



5. Најди ја плоштинта P на правилен шестаголник со страна 4 cm .

Воочи дека $\sphericalangle AOB = 360^\circ : 6 = 60^\circ$.

Карактеристичниот триаголник ABO е рамностран триаголник. Зошто?

Воочи дека во правилен шестаголник радиусот на опишаната кружница е еднаков со неговата страна, т.е. $R = a$.

Плоштината на карактеристичниот триаголник е: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Плоштината на правилниот шестаголник е: $P = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

$$P = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}.$$

За $a = 4 \text{ cm}$, $P = \frac{3}{2} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{3} = 24 \sqrt{3}$; $P \approx 24 \cdot 1,73$; $P \approx 41,52 \text{ cm}^2$.

Треба да знаеш:

- да ја изразиш плоштината на правилен n -аголник со помош на страната и апотемата и обратно;
- да решаваш задачи за плоштината на правилен многуаголник.



Провери се!

- Запиши ја формулата според која ќе се пресметува плоштината на правилен седумаголник.
- Колку лим е потребен за да се изработи таблата СТОП (правилен осумаголник) со страна $a = 32 \text{ cm}$ и апотема $h = 38,62 \text{ cm}$?



Задачи

- Пресметај ја плоштината на правилен n -аголник со страна a и апотема h :
 - $n = 3$; $a = 8 \text{ cm}$; $h = 2,31 \text{ cm}$.
 - $n = 4$; $a = 6 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$.
 - $n = 5$; $a = 4 \text{ cm}$; $h = 2,74 \text{ cm}$.
 - $n = 8$; $a = 16,6 \text{ cm}$; $h = 2 \text{ dm}$.
- Најди ја страната на правилен петаголник со плошина $P = 61,5 \text{ cm}^2$ и апотема $4,1 \text{ cm}$.
- Најди ја плоштината на правилен десетаголник со периметар 14 dm и апотема k .
- Најди ја плоштината на правилен триаголник со:
 - страна 6 cm ;
 - апотема 3 cm ;
 - периметар 24 cm .

5. Најди ја плоштината на правилен шестаголник со:
- страна 12 cm;
 - радиус на опишаната кружница 6 cm;
 - апотема $2\sqrt{3}$ cm;
 - периметар 48 cm.
6. Правилен десетаголник има периметар 40 и плошина $40k$. Најди ја апотемата.

Обиди се ... не е задолжително

7. Најди ја должината на страната a на правилен шестаголник со плошина еднаква на плоштината од рамностран триаголник со периметар 36 cm.
8. Докажи дека: ако еден правилен триаголник и еден правилен шестаголник имаат еднакви периметри, тогаш плоштината на триаголникот е $\frac{2}{3}$ од плоштината на шестаголникот.

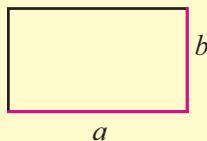
18 ЗАДАЧИ ЗА ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИЦИ

Поисети се!

- За пресметување плошина на разни видови многуаголници можеш да користиш соодветни формули:

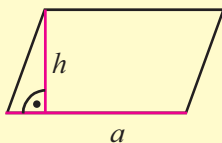
- правоаголник:

$$P = a \cdot b$$



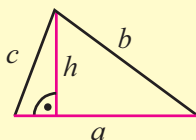
- паралелограм:

$$P = a \cdot h$$



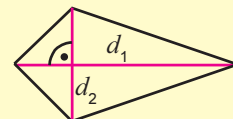
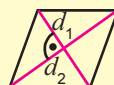
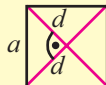
- триаголник:

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$



$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

- квадрат, ромб и делтоид

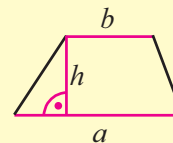


$$P = \frac{d^2}{2}$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

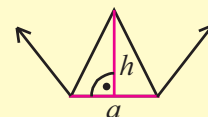
- трапез:

$$P = \frac{a+b}{2} h$$



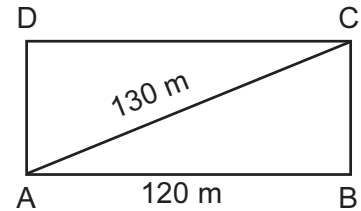
- правилен n -аголник

$$P = \frac{n \cdot a \cdot h}{2}; \quad P = \frac{L \cdot h}{2}$$





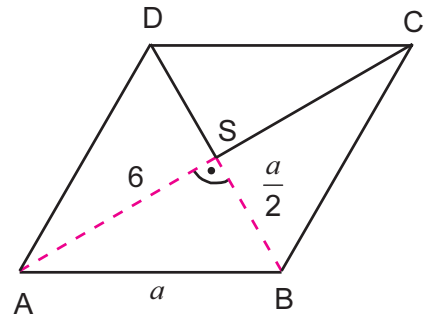
1. Колку декари има нивата со форма на правоаголник (како на цртежот) со страна $\overline{AB} = 120$ m и дијагонала $\overline{AC} = 130$ m?



- За да ја пресметаш плоштината, треба да ја одредиш должината на страната BC.
- Пресметај ја \overline{BC} од правоаголниот $\triangle ABC$: $\overline{BC} = \sqrt{130^2 - 120^2}$.
- Треба да добиеш: $P = 120 \cdot 50 = 6\,000$, т.е. $P = 6\,000$ m²; 1 da = $1\,000$ m², па $P = 6$ da.

2. Пресметај ја плоштината на една градина со форма на правоаголник на кој едната од страните е 65 m и дијагоналата е 97 m. Изрази ја плоштината P во:
- а) квадратни метри; б) ари; в) декари.

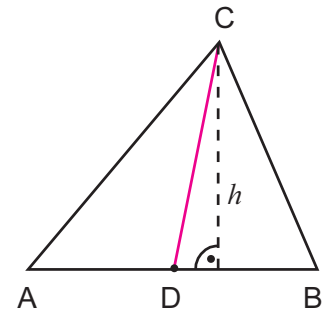
3. Покусата дијагонала на еден ромб има иста должина како страната. Пресметај ја плоштината на ромбот, ако подолгата дијагонала е 12 cm.



- Разгледај го ромбот ABCD од цртежот, на кој $\overline{DB} = \overline{AB} = a$ и $\overline{AC} = 12$ cm.
- Изрази ја плоштината P на ромбот со помош на неговите дијагонали (или како збир од плоштините на $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$).
- За да ја одредиш страната a, примени ја Питагоровата теорема на $\triangle ABS$.
- Ако решаваше правилно, сигурно доби: $P = 6a$; $a = 4\sqrt{3}$; $P = 24\sqrt{3}$ cm².
- Реши ја задачата со директно користење на формулата за плоштина на рамностран триаголник.

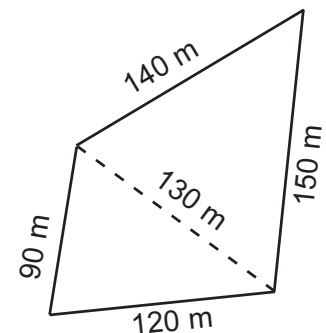
4. Двајца браќа треба да поделат нива со форма на триаголник, на два триаголника со еднакви плоштини. Можеш ли да им ја извршиш поделбата?

- Ако ти е неопходна помош, разгледај го $\triangle ABC$ на цртежот; h е висината, а CD е тежишната линија кон страната AB.
- Зошто $\triangle ADC$ и $\triangle DBC$ имаат еднакви плоштини?



5. Пресметај ја плоштината на земјишната парцела во форма на четириаголник, претставена на цртежот.

- Плоштината P на четириаголникот е еднаква на збирот од плоштините P_1 и P_2 на двата триаголника на кои е поделен.
- Со која формула може да се пресмета плоштината на триаголник чии страни се зададени?



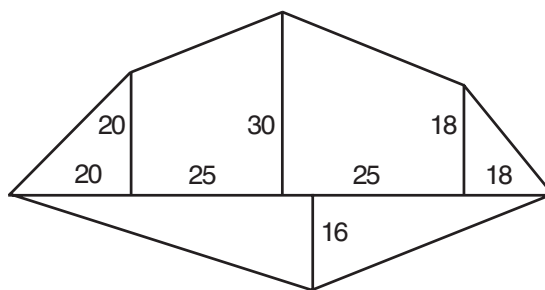
$$s_1 = \frac{1}{2} (90 + 120 + 130) = 170; P_1 = \sqrt{170 \cdot 80 \cdot 50 \cdot 40} \approx 5\,215; s_2 = \frac{1}{2} (130 + 140 + 150) = 210;$$

$$P_2 = \sqrt{210 \cdot 80 \cdot 70 \cdot 60} = 8\,400; P = P_1 + P_2 \approx 13\,615 \text{ m}^2.$$

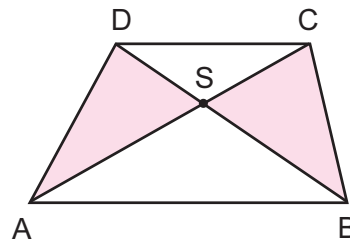
Задачи

1. Плоштината на националниот парк Галичица е 23 000 ha. Колку квадратни километри е тоа?
2. Парцела во форма на правоаголник со страни 140 m и 180 m е насеана со пченка. При сеењето е потрошено во просек 115 kg на 1 ha. Колку семе е вкупно употребено?
3. Во еден правоаголен ходник со димензии 5,1 m и 2,7 m треба да се стават квадратни плочки со страна 15 cm. Колку плочки се потребни за тоа?
4. Колку пиперки ќе се добијат од парцела со форма на правоаголник на кој димензиите му се 250 m и 180 m, ако приносот изнесува 14,5 t на 1 ha?
5. Дворно место со форма на правоаголник ABCD има плоштина 2 000 m² и страна $\overline{AB} = 80 \text{ m}$; од него, со права паралелна на страната AD да се оддели парцела со плоштина 750 m².
6. Конструирај квадрат со дијагонала 5 cm; потоа конструирај квадрат што ќе има двапати помала плоштина.
7. Колку пати е поголема плоштината на опишаниот квадрат од плоштината на впишаниот квадрат во една кружница?
8. Одреди ја најголемата висина на триаголникот чии страни се 13, 84, 85.

9. Најди ја плоштината на парцелата во ари, ако нејзиниот план е даден на цртежот. На цртежот должините се дадени во милиметри, а секој милиметар означува 1 m во природата.



10. Во трапезот ABCD се повлечени дијагоналите. Докажи дека:



- а) $\triangle ABD$ е еднаквоплоштен со $\triangle ABC$;
- б) $\triangle ACD$ е еднаквоплоштен со $\triangle BDC$;
- в) $\triangle ASD$ е еднаквоплоштен со $\triangle BSC$.

■ За а): воочи дека триаголниците имаат заедничка основа AB и еднакви висини, па $P_{ABD} = P_{ABC}$.

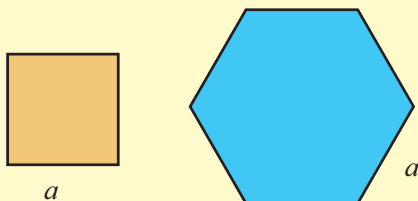
За в): $P_{ASD} = P_{ABD} - P_{ABS} = P_{ABC} - P_{ABS} = P_{BSC}$.

ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА НА КРУГ

19 ПЕРИМЕТАР НА КРУГ. ДОЛЖИНА НА КРУЖЕН ЛАК

Појсетти се!

- На цртежот е претставен квадрат со страна a и правилен шестаголник со страна a .

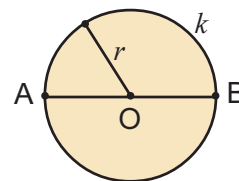


- Запиши ја формулата за пресметување на периметарот на секоја од тие фигури.
- Измери ги страните на квадратот и одреди го неговиот периметар L (во mm).



1. На цртежот е дадена кружница со центар O и радиус r .

- Што е отсечката AB за кружницата? Измери ја и спореди ја со r .



- Како се вика фигурата образуваната од кружницата и нејзината внатрешна област?

- Бидејќи кругот е дел од рамнината, ограничен со кружница, за должината на кружницата е вообичаено да се вели дека е **периметар на кругот**.

2. Означи точка O и со произволен отвор на шестарот нацртај круг со центар O . Измери го: а) радиусот; б) дијаметарот на кругот.

- Размисли како би ја измерил или пресметал должината на кружницата, т.е. периметарот на кругот.

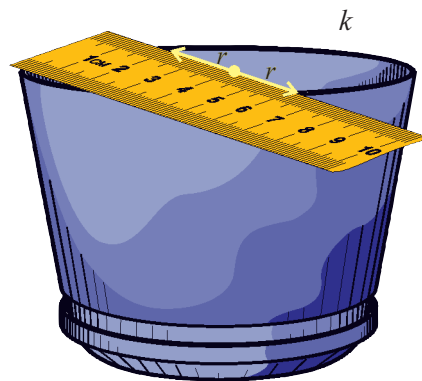
- Секако оваа задача е потешка од задачата за периметарот на квадратот или шестаголникот.

- Во наредната задача ќе го согледаш одговорот.

3. Кружни форми има кај разни предмети (на пример: кофа, чаша, метални пари, предмети со цилиндрична форма).

■ На цртежот е претставена саксија чиј отвор има кружна форма; нејзиниот отвор ќе го сметаме за круг.

● Кои мерења (и како) треба да се извршат за да се пресмета количникот $L : 2r$, каде што L е периметарот, а $2r$ е дијаметарот на кругот?



■ Разгледај го цртежот и воочи ги постапките.

👉 Со конец (или со лента) и со метар ќе ја измериме должината (L) на кружницата k .

👉 Должината на дијаметарот ($2r$) ќе ја измериме со метар.

👉 Ќе го пресметаме количникот $L : 2r$. (Ќе се добие број што е малку поголем од 3.)

4. ▶ Пронајди три (или повеќе) модели на круг. Изврши ги неопходните мерења, нацртај таблица како што е прикажано и пополни ја.

$2 \cdot r$					
L					
$L : 2r$					

■ За количниците $L : 2r$ си добил вакви броеви: 3; 3,1; 3,14; итн., што зависи од прецизноста на твоето мерење.

■ Математичарите што го решавале овој проблем дошле до заклучок дека:

■	За кој било круг, количникот од периметарот L и дијаметарот $2r$ е постојан број.
■	Тој број е ирационален и приближно изнесува: 3,14159... Се означува со грчката буква π (се чите: „пи“)
■	Значи за секој круг важи: $L : 2r = \pi$, т.е. $L = 2r\pi$.

Воочи и зайомни

Периметарот на кругот е еднаков на производот од неговиот дијаметар и бројот π .

$$L = 2r\pi$$

$$\pi \approx 3,14$$

■ При практични пресметувања, обично се зема: $\pi \approx 3,14$.

■ Античкиот математичар Архимед за бројот π земал $\frac{22}{7}$.

5. Пресметај го периметарот на кругот со: а) радиус 4 cm; б) дијаметар 10 cm.

а) $L = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 4 \cdot \pi \approx 8 \cdot 3,14$; $L \approx 25,12$ cm. б) $L = 2 \cdot r \cdot \pi = 10 \cdot \pi \approx 10 \cdot 3,14$; $L \approx 31,4$ cm.

6. Периметарот на некој круг е 25,12 cm. Колкав е неговиот радиус?

Спореди го твоето решение со даденото:

$$L = 2 \cdot r \cdot \pi; \quad 2r = \frac{L}{\pi}; \quad r = \frac{L}{2\pi}; \quad r \approx \frac{25,12}{6,28} = 4; \quad r \approx 4 \text{ cm.}$$



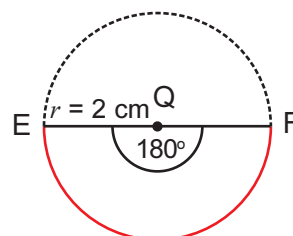
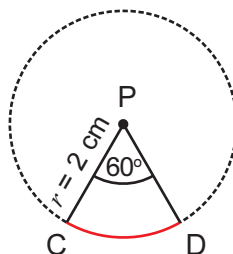
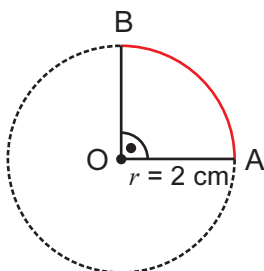
7. На цртежот се прикажани три кружници со радиуси $r = 2$ cm, централни агли и соодветни кружни лаци.

Колкав дел од должината на кружницата претставува должината на кружниот лак:

\widehat{AB} , \widehat{CD} и \widehat{EF} ?

Пресметај ги должините на кружните лаци

\widehat{AB} , \widehat{CD} и \widehat{EF} .



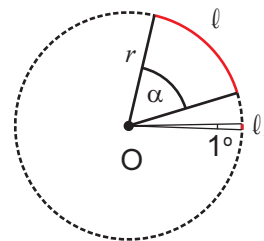
8. Како ќе ја пресметаш должината l на кружен лак во кружница со радиус r , ако соодветниот централен агол е α ?

Разгледај го цртежот и следи го размислувањето.

Замисли дека кружницата е поделена на 360 еднакви делови – кружни лаци со централен агол 1° .

Должината l_1 на кружен лак со централен агол од 1° е 360 пати помала од должината на кружницата, т.е. $l_1 = \frac{2\pi r}{360}$ или $l_1 = \frac{r\pi}{180}$.

Ако, пак, на кружниот лак му одговара агол α , тогаш неговата должина ќе биде α пати поголема од l_1 , т.е. $l = \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha$.



Воочи и
зайомни

Должината на кружниот лак се пресметува со формулата:

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}$$



9. Во кружница со радиус $r = 12$ cm, пресметај ја должината на кружен лак со централен агол: а) $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = 30^\circ 45'$.

■ Спореди го твоето решение со даденото:

а) $l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{12 \cdot \pi \cdot 30}{180} = 2\pi$; $l = 2\pi$ cm или $l \approx 6,28$ cm.

б) Прво треба $\alpha = 30^\circ 45'$ да го претвориш во степени; $45' = \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = 0,75^\circ$, па $\alpha = 30,75^\circ$;

$$l = \frac{12 \cdot \pi \cdot 30,75}{180} = 2,05\pi$$
; $l = 2,05\pi$ или $l \approx 6,437$ cm.

10. Како можеш од формулата $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ да го пресметаш:

а) радиусот r , ако се зададени α и l ; б) централниот агол α , ако се зададени r и l ?

■ Твоето решение спореди го со даденото. Од $l = \frac{r\pi\alpha}{180}$ се добива $r\pi\alpha = 180l$, па:

$$r = \frac{180l}{\pi\alpha}$$

$$\alpha = \frac{180l}{\pi r}$$

11. Пресметај го:

а) радиусот на кружницата, ако на централен агол од 40° му припаѓа кружен лак со должина 6,28 cm;
 б) централниот агол, ако се дадени $r = 6$ cm и $l = 7,85$ cm.

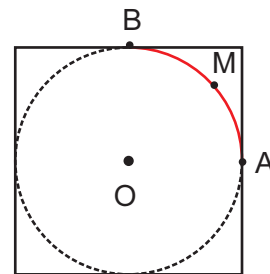
Треба да знаеш:

- ◆ да образложиш што претставува бројот π ;
- ◆ да запишеш периметар на круг со помош на радиусот и бројот π ;
- ◆ да ја одредиш едната од величините: должина на кружен лак, централен агол, радиус, ако се познати другите две.



Провери се!

- ▲ Колку е количникот од периметарот и дијаметарот на даден круг?
- ▲ Колкава треба да биде должината на железна прачка за да може од неа да се направи обрач со радиус 45 cm?
- ▲ Страната на квадратот е 4 cm. Пресметај ја должината на лакот АВ на впишаната кружница. Колку е должината на \widehat{AMB} ?



Задачи

1. Пресметај го периметарот на кругот со радиус: а) 3 cm; б) 0,5 dm; в) $4\frac{1}{2}$ cm.
2. Пресметај го радиусот на кругот ако периметарот е:
а) 31,4 cm; б) 18,84 cm; в) 8π cm.
3. Нацртај два различни круга, изврши ги неопходните мерења и пресметај им ги периметрите.
4. Препиши ја и пополни ја таблицата во која се дадени некои елементи на круг.

r cm	3	3,14			
L cm			10π	25,12	π

5. Пресметај ја должината на кружницата
а) впишана во квадрат со страна 11 cm;
б) опишана околу квадрат со страна 11 cm;
6. Колкав ќе биде дијаметарот на обрач направен од метална лента со должина 31,4 dm?
7. Пресметај ја должината на екваторот (сметајќи го за кружница) ако радиусот на Земјата се земе 6 370 km.
8. Круг со периметар 25,12 cm е впишан во квадрат. Пресметај го периметарот и плоштината на тој квадрат.

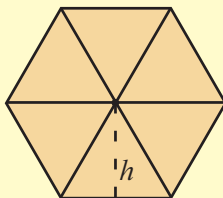
9. Периметарот на еден круг е 62,8 cm. Колкав е периметарот на круг чијшто радиус е помал за 1 cm?
10. Пресметај ја должината l на кружен лак во кружница со радиус $r = 18$ cm и централен агол α :
а) 15° ; б) 120° ; в) $25^\circ 36'$.
11. Определи го централниот агол ако:
а) $r = 5$ cm, $l = 6,28$ cm;
б) $r = 3$ cm, $l = 2\pi$ cm.
12. Пресметај го радиусот на кружницата ако се дадени:
а) $\alpha = 150^\circ$, $l = 31,4$ cm;
б) $\alpha = 80^\circ$, $l = 18$ cm.
13. Дијаметарот на тркалото од една локомотива е 1 m. За 2,5 минути тоа свртува 500 пати. Пресметај ја брзината на движењето на локомотивата.
14. Тетивата во една кружница е еднаква на радиусот. Пресметај ја должината на помалиот соодветен кружен лак, ако радиусот е 2,5 cm.
15. Периферен агол од $37^\circ 30'$ зафаќа кружен лак со должина 15,7 cm. Пресметај го радиусот на кружницата.
16. Кружен лак што одговара на централен агол од 150° во кружница со радиус 12 cm, свиткан е во кружница. Пресметај го радиусот на таа кружница.

20 ПЛОШТИНА НА КРУГ, КРУЖЕН ИСЕЧОК И КРУЖЕН ПРСТЕН

Појсетѝ се!

- Плоштината на правилен многуаголник се пресметува со формулата $P = \frac{1}{2}Lh$, каде што L е периметарот, а h е апотемата.

- Како се добива таа формула?



- Правилниот многуаголник раздели го на триаголници, како на цртежот, и потоа плоштината на многуаголникот пресметај ја како збир од плоштините на триаголниците, т.е. $P = \frac{nah}{2} = \frac{1}{2}Lh$.

$$P = \frac{nah}{2} = \frac{1}{2}Lh.$$

вилен многуаголник поделен на складни рамнокраки триаголници, како на цртежот.

- Правилниот многуаголник впишан во круг има плоштина $P_1 = \frac{1}{2}L_1 h_1$.

- Замисли дека во кругот е впишан правилен многуаголник со уште поголем број страни (како на цртежот). Тој би имал периметар L_2 , апотема h_2 и плоштина P_2 .

- Процени и подреди ги по големина, почнувајќи од најмалиот: а) периметарот L на кругот, L_1 и L_2 ; б) радиусот r на кругот, h_1 и h_2 .

- Ако бројот на страните на впишаниот правилен многуаголник неограничено се зголемува, тогаш:

- периметарот на многуаголникот ќе се разликува занемарливо малку од периметарот на кругот;

- апотемата на многуаголникот би била приближно еднаква на радиусот на кругот.

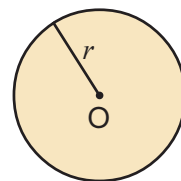
- Бидејќи периметарот на кругот е $L = 2\pi r$, можеме да заклучиме дека:

- Плоштината P на кругот може да се пресмета со формулата:

$$P = \frac{L \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2}, \quad \text{т.е.} \quad P = r^2\pi$$



- Даден е круг со радиус r .

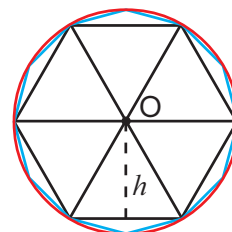


- Како да најдеме начин (формула) со кој ќе одредиме број што ќе претставува плоштина на кругот?

- Ќе примениме слична постапка како за правилните многуаголници.

- Воочи ја идејата и постапката.

- Можеме ли кругот да го поделиме на триаголници?



- Очигледно не можеме, но можеме да впишеме пра-

■ На пример, плоштината на круг со радиус $r = 3$ cm е:

$$P = r^2 \pi; \quad P = 3^2 \pi \approx 3 \cdot 3 \cdot 3,14 = 28,26; \quad P \approx 28,26 \text{ cm}^2.$$

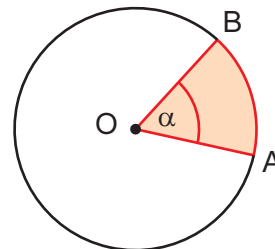
2. Препиши ја и пополни ја следната таблица.

r cm	3	2	10	$\frac{1}{10}$	0,5	$1\frac{1}{2}$
P cm ²	28,26					



■ Делот од кругот (на цртежот) ограничен со радиусите OA, OB и кружниот лак AB се вика **кружен исечок**.

■ Аголот $\angle AOB = \alpha$ е **централен агол** на кружниот исечок.



3. Нацртај круг со радиус 3 cm, а потоа во него кружен исечок со централен агол: а) 90°; б) 60°; в) 180°.

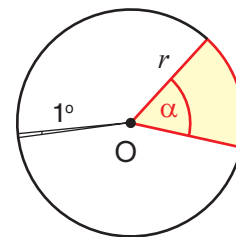
■ Кружниот исечок со централен агол од 180°, всушност, е полуокруг, па неговата плоштина е еднаква на половината од плоштината на кругот.

● Колкав дел од плоштината на кругот е плоштината на кружниот исечок со централен агол: а) 90°; б) 60°?

● Пресметај ја плоштината на секој од тие кружни исечоци.

4. Размисли како ќе ја пресметаш плоштината на кружен исечок којшто има радиус r и централен агол α .

■ Разгледај го цртежот и замисли дека кругот е разделен на 360 еднакви кружни исечоци, секој со централен агол 1°. Воочи го следното:



👉 Плоштината P_1 на еден таков кружен исечок е 360 – ти дел од плоштината на кругот,

$$\text{т.е. } P_1 = \frac{r^2 \pi}{360}.$$

👉 Ако централниот агол е α , тогаш кружниот исечок ќе има α пати поголема плоштина од

$$P_1, \text{ т.е. } P = P_1 \cdot \alpha = \frac{r^2 \pi}{360} \cdot \alpha.$$

Заклучоци

■ Во круг со радиус r , плоштината на кружен исечок со централен агол α се пресметува со формулата

$$P = \frac{r^2 \pi}{360} \cdot \alpha$$

5. Пресметај ја плоштината на кружен исечок ако $r = 3$ cm и $\alpha = 40^\circ$.



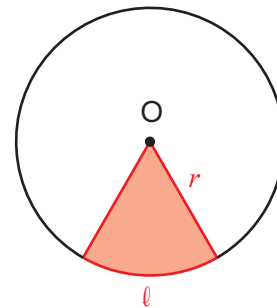
6. Во круг со радиус 4 cm, даден е кружен исечок чишто кружен лак има должина $\ell = 6,28$ cm. Пресметај ја плоштината на кружниот исечок.

- Потсети се дека должината на кружен лак се пресметува со:

$$\ell = \frac{r\pi\alpha}{180} \text{ и воочи дека плоштината на кружниот исечок е:}$$

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{r \cdot r\pi\alpha}{2 \cdot 180} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{r \cdot \ell}{2}; \quad P = \frac{r \cdot \ell}{2};$$

- $P = \frac{4 \cdot 6,28}{2} = 2 \cdot 6,28 = 12,56; \quad P = 12,56 \text{ cm}^2.$



7. Пресметај ја плоштината на кружниот исечок, ако:

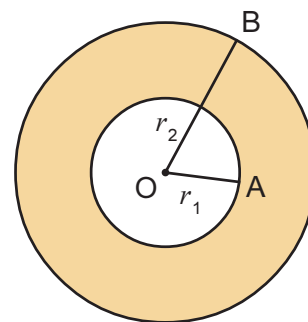
а) $r = 2$ cm, $\ell = 3,14$ cm; б) $r = 3$ cm, $\ell = \frac{\pi}{2}$ cm.

8. Нацртај два концентрични круга, едниот со радиус $r_1 = 2$ cm, а другиот со радиус $r_2 = 4$ cm. Пресметај ја разликата на нивните плоштини.

- Два концентрични круга со радиуси $r_1 = \overline{OA}$ и $r_2 = \overline{OB}$ ($r_1 < r_2$) ограничуваат дел од рамнината којшто се вика **кружен прстен** (обоениот дел на цртежот).

- Плоштината на кружниот прстен е еднаква на разликата од плоштините на круговите, т.е.

$$P = r_2^2\pi - r_1^2\pi; \quad P = (r_2^2 - r_1^2)\pi$$



9. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен, ако радиусите на круговите се 6 cm и 5 cm.

Треба да знаеш:



Провери се!

- да пресметуваш плоштина на: круг, кружен исечок и кружен прстен.

- Страната на еден квадрат е 2,5 cm. Колку е плоштината на впишаниот круг?
- Пресметај го централниот агол и плоштината на кружниот исечок ако радиусот е 6 cm, а соодветниот лак е $\ell = 3,14$ cm.

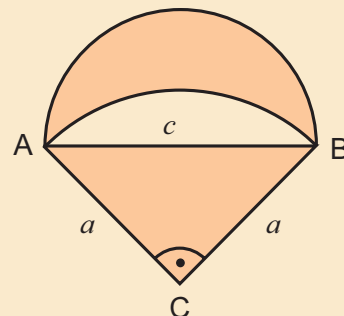
Задачи

1. Пресметај ја плоштината на круг со:
 - а) радиус 8 cm;
 - б) дијаметар 9 cm;
 - в) периметар 18,84 cm.
2. Одреди го радиусот на круг со плоштина $200,96 \text{ cm}^2$.
3. Колку пати ќе се зголеми плоштината на кругот ако неговиот радиус се зголеми 10 пати?
4. Две кружници, едната со радиус 6 cm, а другата со 2 cm, се допираат однатре. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена од тие кружници.
5. Катетите на правоаголен триаголник се 9 cm и 12 cm. Пресметај ја плоштината и периметарот на опишаниот круг околу триаголникот.
6. Дадени се два круга со радиуси 6 cm и 8 cm. Најди го радиусот на кругот чија плоштина е еднаква:
 - а) на збирот од нивните плоштини;
 - б) на разликата од нивните плоштини.
7. Пресметај ја плоштината на кружен исечок ако се дадени:
 - а) $r = 6 \text{ cm}$ и $\alpha = 45^\circ$;
 - б) $r = 4,8 \text{ cm}$ и $\alpha = 80^\circ$;
 - в) $r = 9 \text{ cm}$ и $\alpha = 45^\circ 30'$;
 - г) $r = 7,8 \text{ cm}$ и $\ell = 10 \text{ cm}$.
8. Кружен исечок со радиус 10 cm има плоштина $78,5 \text{ cm}^2$. Одреди го централниот агол.
9. Во круг со радиус 6 cm е даден кружен исечок со централен агол 70° . Пресметај ја должината на неговиот лак и неговата плоштина.

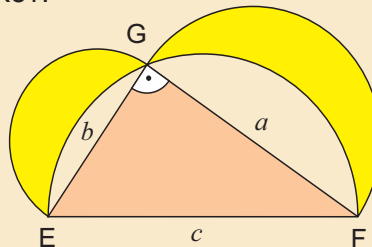
10. Колку проценти од плоштината на целиот круг е плоштината на кружен исечок со централен агол 108° ?
11. Пресметај ја плоштината на кружен прстен што го формираат опишаната и впишаната кружница:
 - а) на квадрат со страна $a = 4 \text{ cm}$;
 - б) на рамностран триаголник со страна 2 cm;
 - в) на правилен шестаголник со страна 6 cm.

Обици се ...

12. На цртежот е даден рамнокрак правоаголен $\triangle ABC$. Над хипотенузата AB , како над дијаметар, опишана е полу-кружница, а и кружен лак со центар C и радиус \overline{CA} . Покажи дека обоените делови имаат еднакви плоштини.



13. Обоените фигури над катетите се наречени **Хипократови месечини**. Тие се ограничени со полукружници на кои дијаметри им се страните на правоаголниот триаголник EFG . Докажи дека збирот од плоштините на месечините е еднаков со плоштината на триаголникот.



21 СЕКТОРСКИ ДИЈАГРАМ

Појсеејте се!

- Податоците дадени во проценти или како дел од цело најчесто се претставуваат со секторски дијаграм.

Воочи!

- Овие податоци може да се претстават со секторски дијаграм.

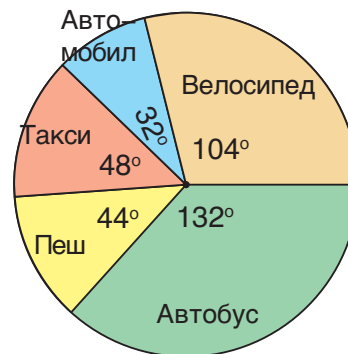


Еве како ќе го пресметаш аголот во секторски дијаграм. Полниот агол има 360° ; а бројот на ученици е 90. $360^\circ : 90 = 4^\circ$. Агол од 4° во дијаграмот одговара на еден ученик. Колкав агол ќе одговара на учениците што одат пеш?

Бидејќи 11 ученици одат пеш, следува дека $11 \cdot 4^\circ = 44^\circ$ и 44° е аголот што одговара на делот ученици што одат пеш на училиште.



Начин на патување	Број на ученици	Агол во секторскиот дијаграм	
Пеш	11	$11 \cdot 4$	44°
Велосипед	26	$26 \cdot 4$	104°
Автобус	33	$33 \cdot 4$	132°
Такси	12	$12 \cdot 4$	48°
Автомобил	8	$8 \cdot 4$	32°
Вкупно	90	$90 \cdot 4$	360°



Зайомни ја постојатката!

- За да се претстават податоци со секторски дијаграм треба:
 - да се одреди вкупниот број на податоци што треба да се претстават;
 - да се подели 360° (степените на полниот агол) со добиениот вкупен број;
 - секој од податоците да се помножи со добиениот количник, со што се добива аголот на секторот за тој податок.



- Податоците за начинот на кој патуваат до училиштето 90 ученици, се дадени во следната табела.

Начин на патување	Пеш	Велосипед	Автобус	Такси	Автомобил
Број на ученици	11	26	33	12	8

2. Податоците за времето во кое почнуваат со работа 1800 вработени во конфекцијата „Мода“.

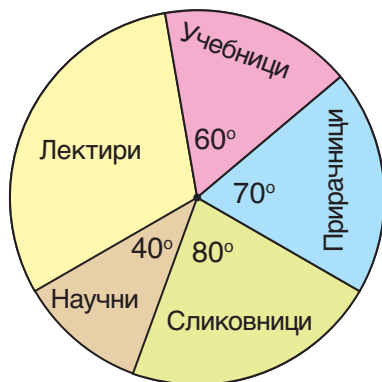
- Претстави ги податоците со секторски дијаграм.

Време	Број
Меѓу 5 h и 6 h	240
Меѓу 6 h и 7 h	180
Меѓу 7 h и 8 h	768
Меѓу 8 h и 9 h	612
Вкупно	1800



- Воочуваш дека: колку секторот во дијаграмот е поголем, толку е поголем и бројот на податоци што се претставени со тој сектор. Ако во секторскиот дијаграм е познат бројот на податоци претставени со еден од секторите, или вкупниот број податоци, лесно може да се одреди бројот во другите сектори.

3. Во една библиотека имало 720 книги. Тие биле групирани како: лектири, научни книги, учебници, прирачници и сликовници. Податоците се претставени со секторскиот дијаграм подолу.



- Вкупно имало 720 книги. Значи $360 : 720 = 0,5$, на една книга одговараат $0,5^\circ$ од кругот. Секторот за учебници има агол 60° , значи $60 : 0,5 = 120$, односно имало 120 учебници.
- Одреди го бројот на прирачници, научни книги и сликовници во училишната библиотека.
- Колку степени е аголот на секторот што ги претставува лектирите?
- Колкав е бројот на лектири во библиотеката?

Задачи

1. Податоците во табелата покажуваат на кој начин се загадуваат океаните.

$$1\% = 3,6^\circ$$

Загадувачи	Процент
Загадување од реките	54%
Загадување од воздух	33%
Загадување од рибарство	12%
Производство на нафта	1%
Вкупно	100%

- Претстави ги податоците со секторски дијаграм.

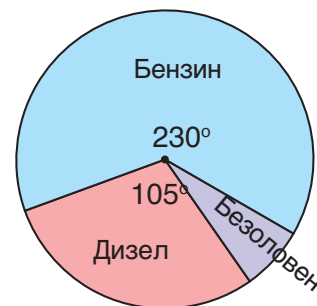
2. Во еден спортски центар членуваат луѓе од различни возрасти, и тоа:

Помлади од 20 години	30 лица
од 20 до 29 години	15 лица
од 30 до 39 години	29 лица
од 40 до 49 години	14 лица
постари од 50 години	12 лица

- Колку вкупно членови има спортскиот центар?
- Податоците претстави ги со секторски дијаграм.

3. На секторскиот дијаграм подолу се претставени податоците за различни видови гориво потрошени на едена бензинска пумпа. Било натоварено 2415 ℓ дизел гориво.

- Колку безоловен бензин е продадено?
- Колку бензин е продадено?
- Колку вкупно гориво е продадено?



4. Една туристичка агенција прибрала податоци за интересот за годишен одмор. Биле прашани 720 испитаници и нивните одговори се претставени во секторски дијаграм.

- Измери ги аглите на секој сектор;
- Колку степени претставува еден испитаник?
- По колку испитаници се изјасниле за секое од местата за годишен одмор?
- Колку испитаници се изјасниле за годишен одмор надвор од нашата земја?



22 АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА. МЕДИЈАНА. МОДА. РАНГ

Појсетти се!

- Членовите на ликовната секција биле прашани по колку часови ги работеле своите последни цртежи. Тие одговориле: 2, 3, 4, 3, 5, 10, 5, 6, 3.
- Ги подредуваме податоците почнувајќи од оној со најмала бројна вредност: 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 10.
- Податокот што најчесто се појавува е бројот 3. Бројот 3 е **мода** за овие податоци.
- Бројот 4 е податок што се наоѓа во средината на низата после подредувањето. Бројот 4 е **медијана** за овие податоци.

$$\frac{2+3+3+3+4+5+5+6+10}{9} = \frac{41}{9},$$

$\frac{41}{9} \approx 4,55$, вредноста 4,55 е **аритметичка средина** за овие податоци.



■ Аритметичката средина, медијаната и модата се вредности што се користат за опишување на „центарот“, т.е. средината на низа податоци. Тие се викаат **мерки на централна тенденција**.

1. ■ Аритметичката средина или просечната вредност се пресметува така што збирот од бројните вредности на низа податоци се поделува со бројот на податоците.

■ Пресметај ја аритметичката средина на низата:

- 8, 11, 14, 8, 9;
- 18, 14, 18, 14, 18, 17;
- 9, 12, 10, 9, 9, 11, 12, 11;
- 21, 46, 29, 27, 42, 34, 25;
- 9, 8, 9, 8, 9, 8.

2. Податокот што се наоѓа во средината на низата, кога членовите во низата ќе се подредат почнувајќи од најмалиот е **медијана**.

● Одреди ја медијаната во низите под а, б и г во задача 1.

■ Внимавај, медијаната за низа од парен број податоци е аритметичка средина на двата податока во средината.

3. Податокот што се јавува најчесто во една низа податоци се вика **мода**. Едно множество податоци може да нема мода, да има една мода или да има повеќе од една мода.

● Одреди ја модата за низите а, б, в, г, д во задача 1.

4. Дадена е низата броеви: 61, 57, 55, 60 и 62.

● Одреди ги аритметичката средина и медијаната.

● Бројот 62 замени го со 262 и за така добиената низа одреди ги аритметичката средина и медијаната.

● Во низата дадена на почетокот, замени го бројот 55 со 5 и за така добиената низа одреди ги аритметичката средина и медијаната.

● Спореди ги вредностите на добиените аритметичка средина и медијана. На што влијае повеќе големата или малата вредност на податокот: на аритметичката средина или на медијаната?

5. Запиши:

● низа од 5 броеви чија медијана е 7, а мода е 6;

● низа од 5 броеви со медијана 8 и аритметичка средина 7;

● низа од 5 броеви со мода 4 и аритметичка средина 6.

6. Запиши 6 броеви кои формираат низа во која медијаната е број помал од 10, аритметичката средина на низата е 10 и најголемиот од шесте броеви е 25.



Попсетти се!

■ Еден ден во Битола била измерена највисока температура 17°C , а најниска -9°C . Разликата меѓу највисоката и најниската температура била 26°C .

$$17 - (-9) = 26.$$

● Разликата меѓу најголемата вредност на податоците и најмалата вредност на податоците се вика **ранг** (опсег).

$$\text{Ранг} = (\text{најголема вредност}) - (\text{најмала вредност})$$

7. Воочи го примерот.

■ Дадена е низата броеви: 29, 61, 17, 80, 32.

■ Најголема вредност е 80. ■ Најмала вредност е 17. ■ Ранг = $80 - 17 = 63$.

● Одреди го рангот на низите броеви: а) 107, 15, 36, 94, 27, 100; б) 3,26; -0,24; -5,15; 1,13; 7.

8. Десет ученици на тестот по математика ги освоиле следниве бодови:

Ученик	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}
Бодови	78	80	65	56	87	94	29	63	55	56

● Одреди го рангот меѓу ученикот со најголем број освоени бодови и ученикот со најмал број освоени бодови.

● За секој ученик посебно, одреди го рангот меѓу бројот на освоените бодови и 100 бодови (најголемиот број бодови што се предвидени за тестот).

9. Осумнаесет атлетичари се натпреварувале на 20 km. Нивните времиња во минути се следните:

96, 90, 115, 112, 111, 96, 100, 112, 117, 90, 98, 100, 101, 95, 99, 110, 98, 119.

● Кое е најдоброто време постигнато на трката?

● Кое е најслабото време постигнато на трката?

Задачи

1. Во 7 еднакви гајби имало праски. Бројот на праски во секоја гајба – соодветно бил: 35, 45, 46, 37, 55, 37, 32.

● Колку е просечниот број праски во една гајба?

● Одреди ја медијаната.

● Кој број е мода?

● Колку е рангот?

2. Од 5 теста, Тина освоила просечно 66 бода.

За да има петка, нејзиниот просек треба да биде 70 бода од 6 теста.

Колку најмалку бодови треба да освои Тина на шестиот тест?

3. Јован и Илија се натпреварувале во пикадо, со по 6 стрелки.

Нивните резултати (растојание од центарот во сантиметри) се дадени во табелата.



Стрелка	1	2	3	4	5	6
Јован	10	4	5	5	7	8
Илија	12	11	5	6	10	6

● Пресметај го просечното растојание до центарот за секој натпреварувач.

● Одреди го рангот на секој натпреварувач.

● Кој натпреварувач е поуспешен? Образложи го својот одговор.



УЧЕШЕ ЗА КРУГ, МНОГУАГОЛНИК И НИВНИТЕ ПЛОШТИНИ. ПРОВЕРИ ГО ТВОЕТО ЗНАЕЊЕ

- Збирот на еден периферен агол и неговиот соодветен централен агол е 180° . Одреди ја големината на аглите.
- Даден е остроаголен триаголник ABC . Полукружницата нацртана над страната AB ги сече другите две страни во точките M и N . Конструирај го ортоцентарот H на $\triangle ABC$ само со линијар.
- Во тетивен четириаголник $ABCD$ се познати $\sphericalangle A = 108^\circ$ и $\sphericalangle B = 98^\circ$. Најди ги $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle D$.
- За тангентниот четириаголник $ABCD$ е познато $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 12$ cm, $\overline{AD} = 5$ cm. Најди ја \overline{CD} .
- Колку страни има правилниот многуаголник, ако неговиот внатрешен агол има: а) 135° ; б) 150° ; в) 140° ?
- Нацртај правилен петаголник со апотема $h = 2,5$ cm.
- Која катета е поголема, a или b , кај правоаголен триаголник даден со $a = 7$ dm и $c = 25$ dm?
- Одреди го периметарот на рамнокрак триаголник со основа $a = 1$ dm и висина кон основата $h = 1,2$ dm.
- Колку штици со должина 3 m и ширина 25 cm се потребни за покривање на под со правоаголна форма, со димензии 6 m и 3,5 m?
- Пресметај ја плоштината на квадрат со дијагонала 6 cm.
- Страните на еден ромбоид се $a = 12$ cm и $b = 8$ cm. Висината кон страната a е 4 cm. Колкава е висината кон страната b ?
- Пресметај ја плоштината на правоаголен триаголник со катета 24 cm и хипотенуза 30 cm.
- Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи 18 cm и 10 cm, а крак 5 cm.
- Правилен деветаголник со страна $a = 8$ cm има плошина $P = 395,28$ cm². Колку е неговата апотема?
- Колку пати ќе се сврти тркалото на еден трактор, кое има радиус 40 cm, на пат од 2512 m?
- Во еден ромб со периметар 48 cm е впишан круг со плошина 25π cm². Пресметај ја плоштината на ромбот.

ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ ВО РАМНИНА

- | | |
|------------------------|-----|
| 1. Декартов производ | 174 |
| 2. Координатна рамнина | 176 |

ПРЕСЛИКУВАЊЕ (ФУНКЦИЈА)

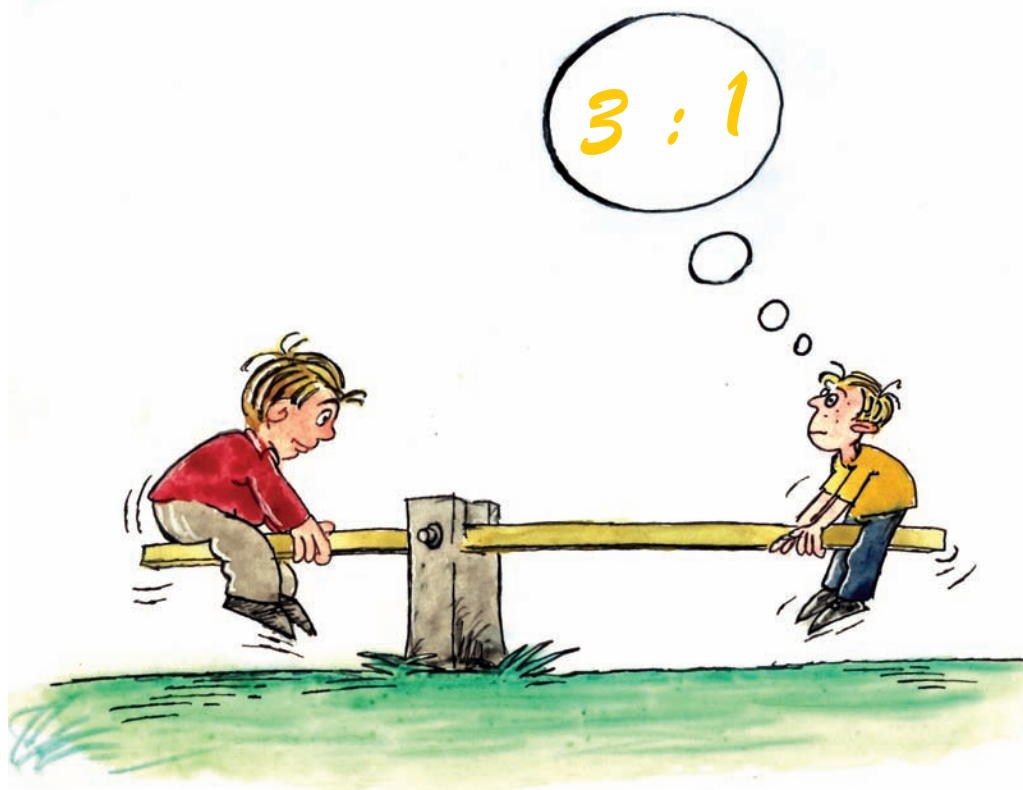
- | | |
|---------------------------------------|-----|
| 3. Релации | 181 |
| 4. Пресликување (функција) | 183 |
| 5. Начини на задавање на пресликувања | 187 |

ПРОПОРЦИЈА

- | | |
|---|-----|
| 6. Размер | 190 |
| 7. Пропорција | 195 |
| 8. Геометриска средина. Продолжена пропорција | 199 |

ПРОПОРЦИОНАЛНИ ВЕЛИЧИНИ

- | | |
|-------------------------------------|-----|
| 9. Право пропорционални величини | 202 |
| 10. Обратно пропорционални величини | 206 |
| 11. Просто тројно правило | 210 |
| Провери го твоето знаење | 213 |



ПРАВОАГОЛЕН КООРДИНАТЕН СИСТЕМ ВО РАМНИНА

1 ДЕКАРТОВ ПРОИЗВОД

Појсетти се!

Во V одделение учеше...

- Парот во кој a е прв елемент, а b е втор елемент се вика *подреден пар* и се означува со (a, b) .
- Елементите на подреден пар се викаат *компоненти*.
- Два подредени пара се *еднакви* ако соодветните компоненти им се еднакви.
- Одреди ги x и y така што $(x, 2) = (5, y)$.
- *Декартов производ* $A \times B$ на множествата A и B е множеството од сите подредени парови така што првата компонента е елемент од множеството A , а втората од множеството B .
- Нека $A = \{2, 3\}$, $B = \{5, 10, 15\}$. Одреди го множеството $A \times B$ и претстави го на табеларен начин.
- Множеството $A \times A$ или A^2 се вика *декартов квадрат*.
- Нека $A = \{a, b\}$. Одреди го A^2 .



■ Подреден пар графички се претставува со стрелка од првата до втората компонента.

■ На цртежот со стрелки се претставени подредените парови (a, b) , (c, c) и (h, g) .



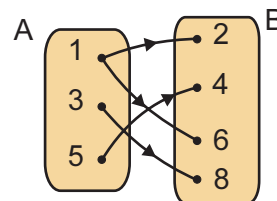
1. Воочи ги подредените парови на цртежот.

● Запиши ги сите подредени парови.

● Дали е претставен подредениот пар $(4, 5)$?

● Од кое множество се првите компоненти на подредените парови?

● Дали има подреден пар чија прва компонента е од множеството B ?



2. Дадени се множествата $A = \{a, b\}$ и $B = \{m, n, p\}$.

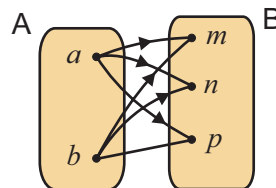
● Претстави ги со венев дијаграм.

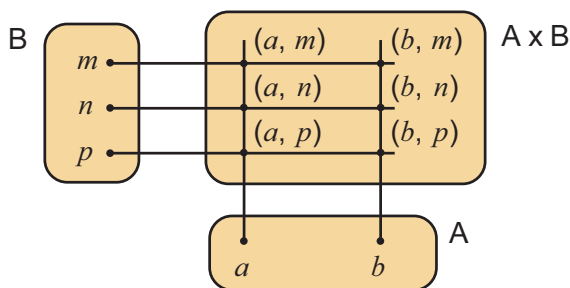
● Елементите на декартовиот производ $A \times B$ претстави ги со стрелки.

■ Согледај го тоа на цртежот и спореди го твоето решение.

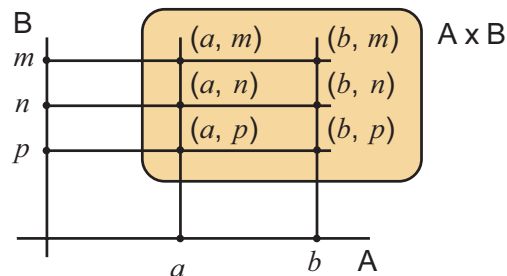
👉 За вака претставен декартов производ велиме дека е даден со *граф*.

👉 Декартов производ графички може да се претстави и со *координатна шема* на следниот начин:



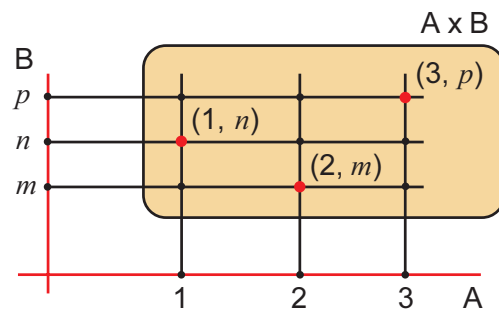


Поїрактично



3. Декартовіот производ $G \times H$ на множествата $G = \{1, 2, 3, 4\}$ и $H = \{a, b\}$ претстави го
- на табеларен начин;
 - со граф;
 - со координатна шема.

4. Во координатната шема на декартовіот производ $A \times B$, се запишани елементите $(1, n)$, $(2, m)$ и $(3, p)$.
- Запиши ги елементите на множеството A и на множеството B .
 - Запиши го декартовіот производ $A \times B$ на табеларен начин.

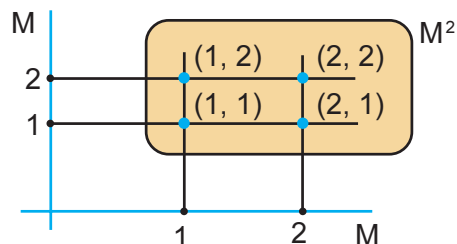
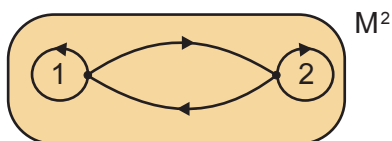


■ Спореди го твоето решение со даденото.

- 👉 Елементот $(1, n) \in A \times B$, што е запишан во шемата, покажува дека $1 \in A$ и $n \in B$.
- 👉 На сличен начин воочи дека $2 \in A$, $m \in B$, $3 \in A$ и $p \in B$. Значи $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{m, n, p\}$.
- 👉 $A \times B = \{(1, m), (1, n), (1, p), (2, m), (2, n), (2, p), (3, m), (3, n), (3, p)\}$.

5. Претстави го со граф и со координатна шема декартовіот квадрат на множеството а) $M = \{1, 2\}$; б) $P = \{a, b, c\}$.

■ Воочи ги графот и координатната шема на M^2 и спореди го твоето решение.



6. Даден е декартовіот производ $K \times L = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$. Запиши ги табеларно множествата K и L .

Треба да знаеш:

- ◆ графички да претставиш подреден пар;
- ◆ да претставиш декартов производ со граф и со координатна шема.

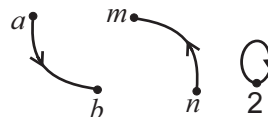
Задачи

1. Нацртај граф на секој од подредените парови $(1, 5)$, $(m, 2)$ и $(4, 4)$.
2. Нека $A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$. Запиши ги елементите на множествата A и B .
3. Претстави го со координатна шема декартовиот производ на множествата $A = \{O, *, \Delta\}$ и $B = \{d, m, p, s\}$.

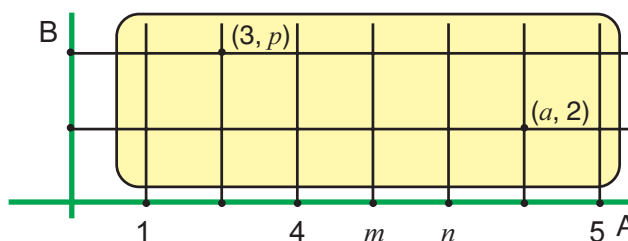


Провери се!

- ▲ Кои подредени парови се дадени на цртежот?
- ▲ Претстави го со граф декартовиот квадрат P^2 на множеството $P = \{1, 5\}$.

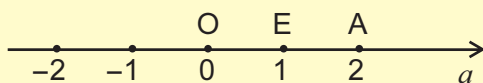


4. Запиши ги множествата A и B според координатната шема на декартовиот производ $A \times B$.



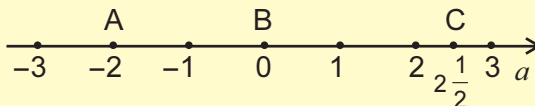
2 КООРДИНАТНА РАМНИНА

Појсеси се!



- На бројната права a со стрелка е означена позитивната насока. Бројната права се вика и **бројна оска**.
- На точката O е придружен бројот 0 , а на точката A бројот 2 .
- Отсечката OE е единична отсечка, т.е. $\overline{OE} = 1$.

- Како се вика бројот што е придружен на дадена точка од бројната оска?



- Воочи ја точката A на бројната оска. Таа има координата -2 , т.е. $A(-2)$.
- Запиши ги точките B и C со нивните координати.
- Претстави ги точките $M(-1\frac{1}{2})$ и $P(3, 4)$ на бројна оска.



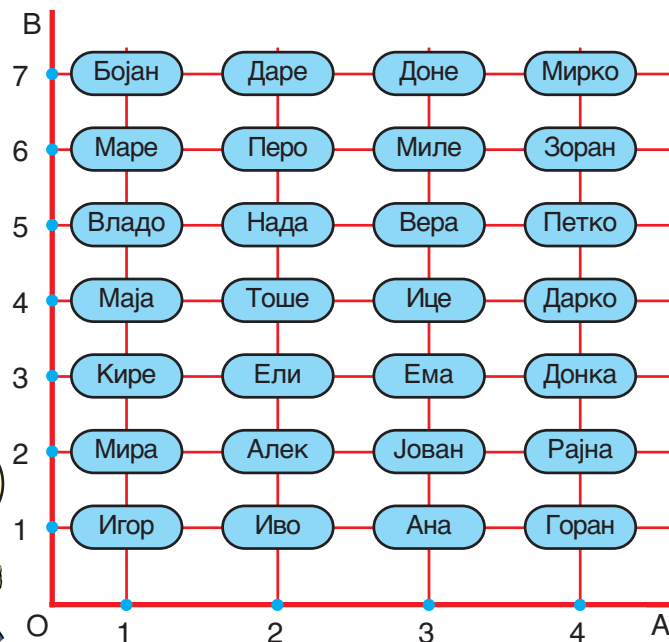
■ На цртежот се прикажани имињата на учениците од едно одделение, како што седат во училницата. На вертикалната линија OB се означени редните броеви на редиците, а на хоризонталната линија OA – редните броеви на колоните.

- Како може да се претстави местото на кое седи одреден ученик?



Каде седи Јован? Како ќе го претставиш неговото место?

Јован седи во 3-та колона и 2-та редица. Тоа може да се претстави со подредениот пар $(3, 2)$.



- Одреди го местото на ученикот според колоната и редицата и запиши го како подреден пар: а) Игор; б) Нада; в) Доне; г) Дарко.
- Именувај го ученикот што седи на местото: а) $(2, 1)$; б) $(2, 3)$; в) $(4, 7)$; г) $(3, 5)$.
- Опиши ја положбата на местата на кои седат учениците Ице и Донка. Запиши ги подредените парови на тие места. Што забележуваш за тие парови?
- Запиши го местото како подреден пар на кое ти седиш во твојата училница.

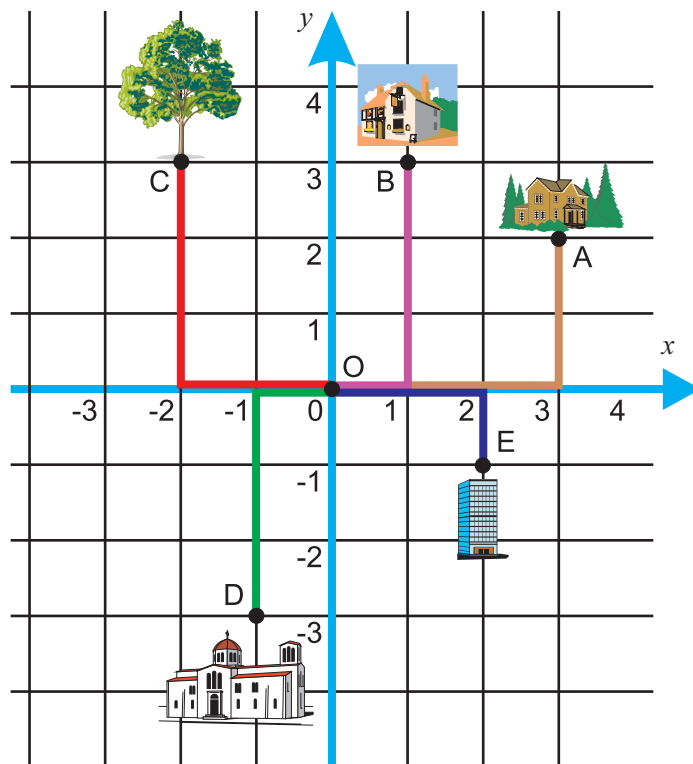
2.

На цртежот се дадени две заемно нормални бројни оски x и y , со еднакви единични отсечки. Тие се сечат во точката O . Во рамнината на оските се објектите (точките) A, B, C, D и E . Патекаата до секој објект „поаѓа“ од O . Таа е означена со боја.

Воочи ги патекиите



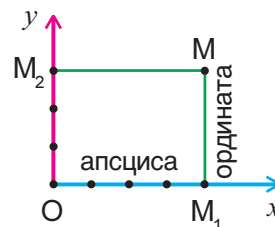
Патекаата до A е: 3 единици во позитивната насока на оската x (т.е. $+3$), а потоа 2 единици во позитивната насока на оската y (т.е. $+2$).



- ☞ Скратено можеш да запишеш $A(+3, +2)$ или $A(3, 2)$.
 - ☞ Патеката до B , запишана скратено е $B(+1, +3)$ или $B(1, 3)$.
 - ☞ Патеката до C : 2 единици во негативната насока на оската x (т.е. -2), а потоа 3 единици во позитивната насока на оската y (т.е. $+3$).
 - ☞ Скратен запис: $C(-2, +3)$ или $C(-2, 3)$.
- Компонентите на подредениот пар $(-2, 3)$ се викаат **координати** на точката C .
 - Запиши ги скратено патеките до објектите D и E .
 - Изминатиот пат го означуваме со $+$ или $-$, зависно од тоа дали се движиме во позитивна или негативна насока на оската.

Зайомни!

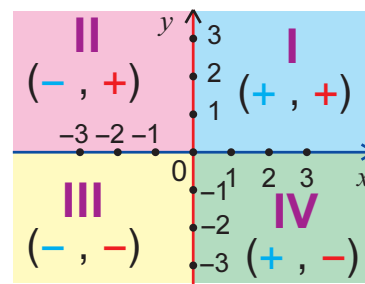
- Координатите на точка се викаат **апсциса** и **ордината**. Тие претставуваат подреден пар во кој апсцисата е прва компонента, а ординатата втора.
- За точката P што има апсциса a и ордината b запишуваме $P(a, b)$.
- За точката M (на цртежот) велиме дека има апсциса $+4$ и ордината $+3$. Запишуваме $M(+4, +3)$ или само $M(4, 3)$.
- Заемно нормалните бројни оски се викаат **координатни оски**, а нивниот пресек се вика **координатен почеток**.
- Едната координатна оска се вика **апсцисна оска** или x -оска, а другата **ординатна оска** или y -оска.
- Две заемно нормални бројни оски, со еднакви единични отсечки и со заедничка нулта точка (координатен почеток), образуваат целина (систем).
Тој се вика **декартов правоаголен координатен систем** (својоред Рене Декарт - француски математичар, физичар и филозоф кој ѝрв го вовел во употреба овој систем). Кусо се вели **координатен систем** и се означува: Oxy .



Рене Декарт
1596 – 1650



- Рамнината во која е даден декартов правоаголен координатен систем се вика **координатна рамнина**.
- Координатните оски ја делат рамнината на четири прави агли, кои се нумерирани како на цртежот. Тие се викаат **квадранти**.



Зайомни!

- Во I квадрант: апсцисата и ординатата се позитивни.
- Во II квадрант: апсцисата е негативна, а ординатата позитивна.
- Во III квадрант: апсцисата и ординатата се негативни.
- Во IV квадрант: апсцисата е позитивна, а ординатата негативна.

3. Одреди во кој квадрант се наоѓа секоја од точките $A(+3, +5)$, $B(-2, -1)$, $C(+4, 2; -6\frac{1}{4})$, $D(-1, +5)$.

Воочуваш дека:

Апсцисата и ординатата на A се позитивни, т.е. точката A се наоѓа во I квадрант.

Точката B се наоѓа во III квадрант. Објасни зошто. Постапи слично за точките C и D .

Ова е важно

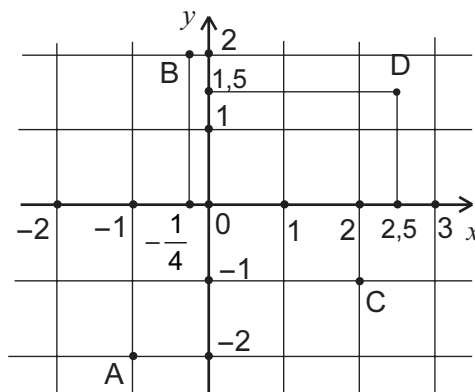
- На секоја точка од координатната рамнина одговара само еден пар координати.
- На секој пар координати одговара само една точка од координатната рамнина.

4. Претстави ги во координатна рамнина точките:

$$A(-1, -2), B(-\frac{1}{4}, 2), C(2, -1), D(2,5; 1,5).$$

Спореди го твоето решение со даденото.

- Точките од x -оската имаат ордината 0.
- Точките од y -оската имаат апсциса 0.
- Координатниот почеток има апсциса 0 и ордината 0.



5. Претстави ги во координатна рамнина точките $A(0, -3)$, $B(-2, 0)$, $C(0, 0)$, $D(0, 1)$, $E(2, 0)$.

6. Одреди ги координатите на точките A_1 и B_1 што се симетрични со точките $A(-2, 5)$ и $B(4, 7)$ во однос на а) x -оската; б) y -оската.

Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш како е формиран правоаголниот координатен систем;
- ◆ што е координатна рамнина;
- ◆ што се координати на точка;
- ◆ да претставиш точка во координатна рамнина.

Задачи

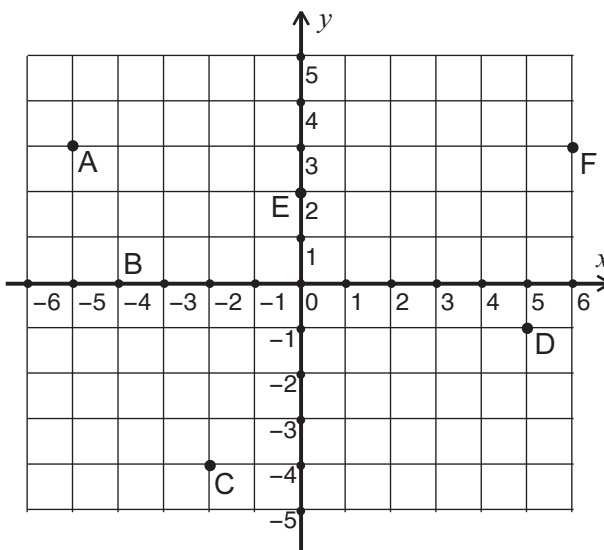
1. Одреди ги точките во координатна рамнина што одговараат на подредените парови:
 - $(3, 2)$; ● $(-1, -\frac{1}{2})$; ● $(1, -1)$;
 - $(-\frac{1}{4}, 2)$; ● $(-4, 1)$; ● $(0, -2)$;
 - $(-3, -1)$; ● $(-2, 4; 0)$.
2. Одреди ги координатите на точката што е симетрична со точката $M(2, -1)$ во однос на:
 - а) апсцисната оска и означи ја со M_1 ;
 - б) ординатната оска и означи ја со M_2 ;
 - в) координатниот почеток и означи ја со M_3 .
3. Нацртај отсечка AB ако $A(-1, 3)$, $B(-4, -2)$.
4. Нацртај триаголник ABC , ако:
 - а) $A_1(-2, -1)$, $B_1(3, -2)$, $C_1(-1, 3)$;
 - б) $A_2(-3, 0)$, $B_2(0, -4)$, $C_2(3, 1)$;



Провери се!

- ▲ Која од точките $P(3, 8)$ или $S(5, 1)$ е поблиску до x -оската?
- ▲ Што е координатна рамнина?
- ▲ Во кој квадрант лежи точката $A(2, -4)$?
- ▲ На која од координатните оски лежи точката $M(0, -1)$?

5. Одреди ги координатите на точките A , B , C , D , E и F според цртежот:



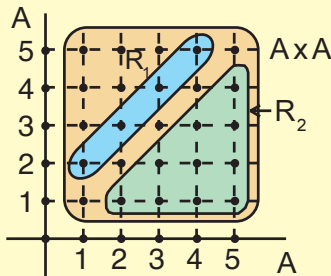
6. Нацртај го $\triangle ABC$, а потоа одреди ги должините на неговите страни ако:
 - а) $A_1(-4, 0)$, $B_1(0, 1)$, $C_1(-1, 3)$;
 - б) $A_2(-1, -3)$, $B_2(4, 0)$, $C_2(3, -4)$.
7. Во координатната рамнина претстави точка M со апсциса $\sqrt{3}$ и ордината $-\sqrt{2}$. Потоа нацртај го $\triangle ABC$:
 $A(\sqrt{2}, 1)$, $B(-3, \sqrt{3})$, $C(-2, -3)$.

ПРЕСЛИКУВАЊЕ (ФУНКЦИЈА)

3 РЕЛАЦИИ

Појсетти се!

- Со координатна шема е претставен декартовиот квадрат на множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



- Воочи ги подмножествата R_1 и R_2 за кои важи:

$$R_1 \subset A \times A \text{ и } R_2 \subset A \times A.$$

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}.$$

- За елементите на R_1 важи: првата компонента е за 1 помала од втората компонента.
- Запиши го табеларно множеството R_2 .
- Искажи некоја врска (релација) меѓу компонентите во подредените парови на множеството R_2 .



Дали секој подреден пар што припаѓа на R , припаѓа и на $A \times B$? Што претставува множеството R за декартовиот производ $A \times B$?

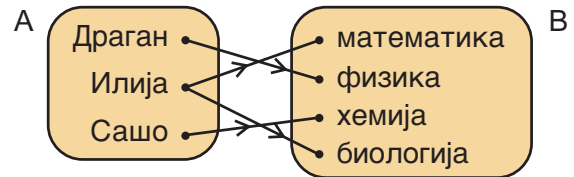
Ако подредениот пар му припаѓа на R , тогаш тој му припаѓа и на $A \times B$, т.е. $R \subset A \times B$.



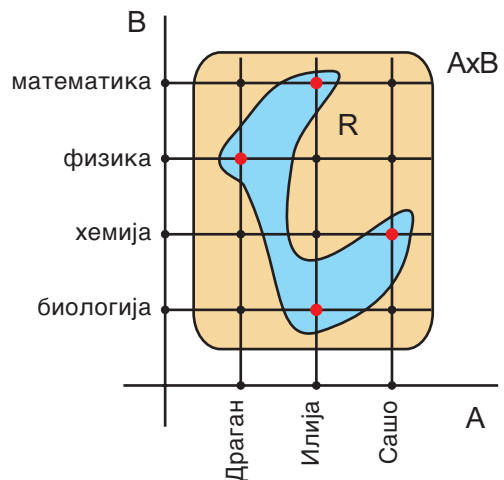
1.

Дадени се множествата $A = \{\text{Драган, Илија, Сашо}\}$ и

$B = \{\text{математика, физика, хемија, биологија}\}$. Меѓу елементите на множествата A и B е дадена врска (релација): „... има одлична оценка по ...“, која на графот е претставена со стрелки од A кон B .



- Колку елементи има декартовиот производ $A \times B$ и кои се тие?
- Запиши го на табеларен начин множеството R од подредени парови за кои важи релацијата „... има одлична оценка по ...“.
- Претстави ги множествата $A \times B$ и R во координатна шема.
- Спореди го твоето решение со даденото.



Зайомни!

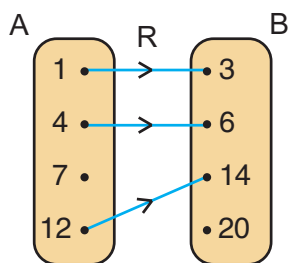
Кое било подмножество R од декартовиот производ $A \times B$ се вика **релација од A кон B** .

Нека $R \subseteq A \times B$.

Ако подредениот пар $(x, y) \in R$, често запишуваме $x R y$; читаме: x е во релација R со y .

Множеството од сите подредени парови кои му припаѓаат на R уште се вика **график на релацијата R** и се означува со \bar{R} , т.е. $\bar{R} = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ и } x R y\}$.

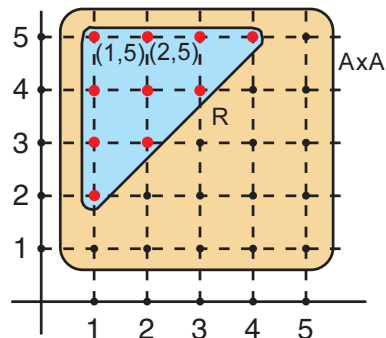
2. Релацијата R : „... е помал за 2 од ...“ од множеството $A = \{1, 4, 7, 12\}$ кон множеството $B = \{3, 6, 14, 20\}$ е претставена со граф.



- Претстави го декартовиот производ $A \times B$ со координатна шема.
- Запиши ги подредените парови што се елементи на графикот \bar{R} .
- Покажи дека графикот \bar{R} е подмножество на декартовиот производ $A \times B$.

3. На цртежот е дадено множеството $A \times A$ и релацијата R во множеството A .

- Провери дали со релацијата R е претставена следната врска меѓу елементите „... е помал од ...“, т.е. дали $R = \{(x, y) \mid x, y \in A \text{ и } x < y\}$.
- Претстави ја релацијата со граф.



4. Едно семејство има пет члена: татко – Мирко, мајка – Цвета и деца: Билјана, Јован и Сашо. Претстави ја со граф релацијата R :

а) „... е мајка на ...“; б) „... е брат на ...“;

Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш што е релација од дадено множество A кон дадено множество B ;
- ◆ да претставиш дадена релација со граф, со график и со координатна шема.



Провери се!

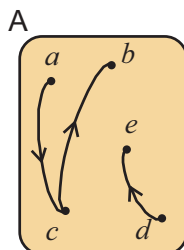
- ▲ Во множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$ е дадена релацијата R : „... е за 2 поголем од ...“. Претстави ја релацијата R со граф и со график.

Задачи

1. Со граф претстави ја релацијата R од множеството $A = \{12, 16, 22, 28, 32\}$ кон множеството $B = \{17, 21, 27, 33, 37\}$, ако:

а) $R: „<“$; б) $R: „... е за 5 помал од ...“$.

2. Во множеството $A = \{a, b, c, d, e\}$ со граф е дадена релацијата R . Запиши го графикот на релацијата R на табеларен начин.



3. Во множеството $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ дадена е релацијата R со:

$$\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in S \text{ и } y = 2x\}.$$

- а) Претстави ја релацијата R со граф.
б) Графикот на релацијата претстави го на табеларен начин.

4. Претстави ја со граф и со координатна шема релацијата дадена со:

$$\bar{R} = \{(0, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 5), (1, 5)\} \text{ од } A = \{0, 1, 2, 3\} \text{ кон } B = \{1, 3, 5\}.$$

5. Во множеството $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ е дадена релација R со:

$$\bar{R} = \{(x, y) \mid x, y \in M \text{ и } y = 6 - x\}.$$

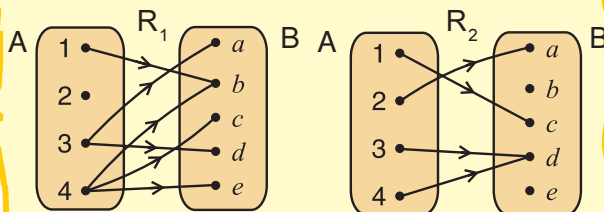
- а) Запиши го графикот на R табеларно.
б) Претстави ја релацијата R со граф.
в) Претстави ја релацијата R со координатна шема.

4 ПРЕСЛИКУВАЊЕ (ФУНКЦИЈА)

Појсеји се!

- Релација од A кон B е кое било подмножество од декартовиот производ $A \times B$ на множествата A и B .

- Разгледај ги релациите R_1 и R_2 .



- Образложи за која од релациите R_1 или R_2 важи следното:

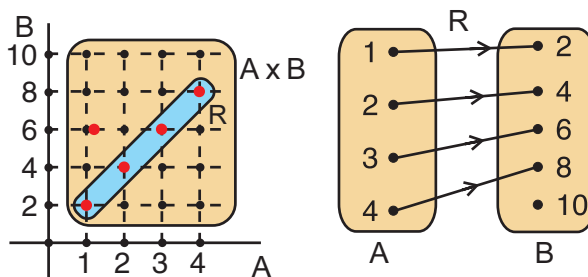
- секој елемент од A е во релација со елемент од B ;
- секој елемент од A е во релација само со по еден елемент од B .



- Ќе разгледуваме само такви релации меѓу две множества при кои секој елемент од првото множество е во релација само со по еден елемент од второто множество.

1. Од множеството $A = \{1, 2, 3, 4\}$ кон множеството $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ е дадена релацијата $R: „... е 2 пати помал од...“$

- Воочи ги координатната шема и графикот на релацијата.



- Можеш да согледаш дека секој елемент од A е во релација само со по еден елемент од B .
- За таква релација се вели дека е *пресликување*.

Затојни

- Ако секој елемент од множеството A е во релација R само со по еден елемент од множеството B , таквата релација се вика **пресликување** (или **функција**) од A во B .

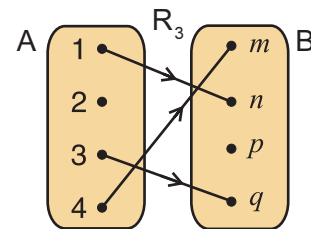
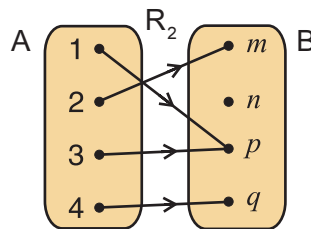
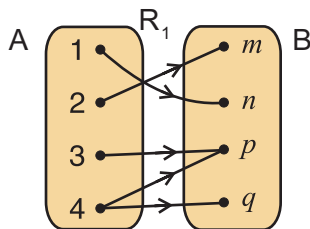


Како од графот на релацијата R од A кон B ќе одредиш дали таа е пресликување?

Ако секој елемент од A има само една стрелка кон некој елемент од B .



- Која од релациите R_1 , R_2 и R_3 е пресликување?



- Само релацијата R_2 е пресликување.
- R_1 не е пресликување, бидејќи од 4 има две стрелки.
- R_3 не е пресликување, бидејќи од 2 нема стрелка кон елемент од B .



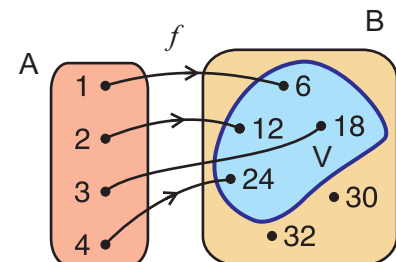
- **Пресликување** f од множеството A во множеството B е релација од A кон B при која секој елемент од A е во врска само со еден елемент од B и се означува со:

$$f: A \rightarrow B \text{ или } A \xrightarrow{f} B$$

- 👉 Множеството A се вика **домен** или **дефиницијоно множество**.
- 👉 Множеството B се вика **кодомен** на пресликувањето f .

- 2. Дадено е со граф (на цртежот) пресликување $f: A \rightarrow B$, каде што $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 32\}$.

- Кој е доменот, а кој е кодоменот на ова пресликување?



- Елементот $1 \in A$ е во релација f со елементот $6 \in B$. Се вели: на елементот 1 му е придружен со f елементот 6 или 6 е **слика** на 1 при пресликувањето f . Запишуваме $1 \xrightarrow{f} 6$ или $f(1) = 6$. За 1 се вели дека е **оригинал** за 6 при пресликувањето f .

- Запиши ги сликите на елементите 2, 3 и 4 од A , при пресликувањето f .
- Воочи дека $V \subseteq B$. За V велиме дека е **множеството слики**, т.е. **множеството вредности** на f .

Ќе запишуваш: $f(1) = 6$; $f(2) = 12$; $f(3) = 18$; $f(4) = 24$.

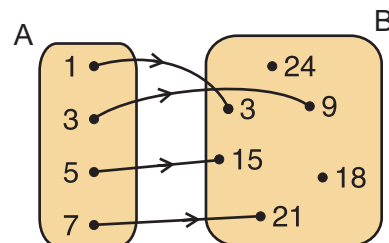
- Кои броеви се слики на броевите 3 и 4?

Општио

- Множеството чии елементи се сликите на елементите од доменот при дадено пресликување се вика **множество вредности на пресликувањето**.
- Ако $y \in B$ е вредност на $x \in A$, т.е. y е слика на x при пресликувањето f , запишуваме $f: x \rightarrow y$ или $y = f(x)$.
- Множеството од сите подредени парови на релацијата f од A кон B што претставува пресликување се вика **график** на пресликувањето f и се означува со Γ_f .
Значи ако $f: A \rightarrow B$, тогаш $\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y = f(x)\}$.

3. Со граф е претставено пресликувањето f : „... е 3 пати помал од ...”, од множеството $A = \{1, 3, 5, 7\}$ кон множеството $B = \{3, 9, 15, 18, 21, 24\}$.

- Запиши го табеларно графикот на f .
- Одреди ги доменот, кодоменот и множеството вредности на f .
- Запиши на што е еднакво: $f(3)$.



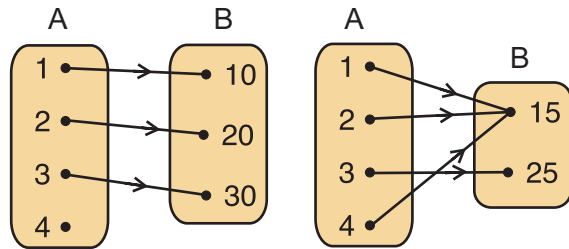
Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш што е пресликување;
- ◆ да претставиш пресликување со граф и график;
- ◆ да образложиш што е домен, кодомен и множество вредности на пресликување.



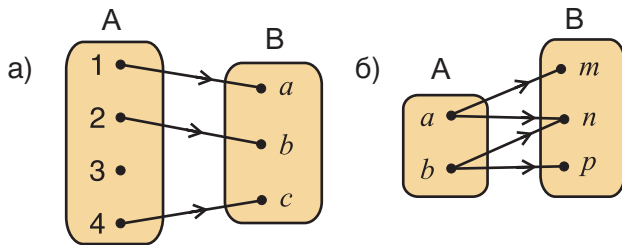
Провери се!

- ▲ Со кој од цртежите е дадено пресликување од A во B?
- ▲ Од графикот $\Gamma_f = \{(1, 5), (3, 2), (5, 4), (6, 7), (8, 11)\}$ одреди ги доменот и множеството вредности на пресликувањето f .

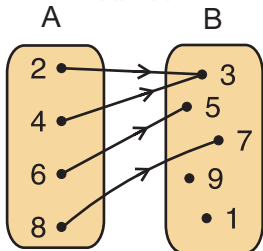


Задачи

1. Објасни зошто релацијата R, што е дадена со графот, не е пресликување.



2. Со графот е дадена функцијата $f: A \rightarrow B$. Одреди ги:



- доменот;
- кодоменот;
- множеството вредности на функцијата f .

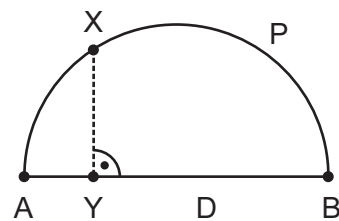
3. Пресликувањето $f: A \rightarrow B$, каде што $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 20, 22\}$ е определено со релацијата: „... е за 5 помал од ...“, т.е. $f(x) = x + 5$. Одреди го a во равенството:

- $f(1) = a$; $f(5) = a$; $f(9) = a$;
- $f(a) = 8$; $f(a) = 12$.

4. Дадено е пресликувањето $f: A \rightarrow B$, каде што $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{0, 1, 2, \dots, 10, 11, 12\}$, со правилото $f: x \rightarrow 2x$, т.е. $f(x) = 2x$.

- Одреди: $f(0)$; $f(3)$ и $f(5)$.
- Запиши го множеството вредности на функцијата.

5. Точките од полукружницата P се пресликуваат во точки од дијаметарот D така што сликата Y на точка $X \in P$ се наоѓа во пресекот на нормалата од точката X кон дијаметарот.



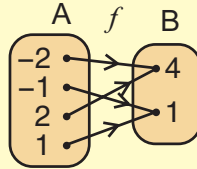
- Одреди ги: доменот, кодоменот и множеството вредности на ова пресликување.

5 НАЧИНИ НА ЗАДАВАЊЕ НА ПРЕСЛИКУВАЊА

Појсетти се!

- На кои начини досега задававме пресликување?

Пресликувањето $f: A \rightarrow B$ е дадено со графот.



- Запиши го графикот Γ_f на пресликувањето f .
- Запиши ги елементите на Γ_f во табела.
- Претстави го пресликувањето со координатна шема.



1. Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Пресликувањето $f: A \rightarrow B$, е дадено со правилото: "x е за 5 помал од y"

- Според даденото правило состави табела на оригиналите и сликите при ова пресликување.

- Спореди го твоето решение со даденото.



Воочи дека сликата y е за 5 поголема од оригиналот x .

Затоа: $f: 1 \rightarrow 1 + 5$, т.е. $f(1) = 1 + 5$; $f(1) = 6$;

$f: 2 \rightarrow 2 + 5$, т.е. $f(2) = 2 + 5$; $f(2) = 7$.

Слично следи: $f(3) = 8$; $f(4) = 9$; $f(5) = 10$.



Ги доби подредените парови од оригинали и слики: $(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)$.



Внеси ги во табела така што во еден ред да бидат оригиналите, а во друг нивните слики.

x	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	6	7	8	9	10

- Пресликувањето може да биде зададено со табела во која се внесени оригиналите (т.е. елементи од доменот) и нивните слики (т.е. соодветните елементи од кодоменот). Таквото задавање се вика **табеларен начин** на задавање на пресликување.

2.

Пресликувањето f е дадено со табела во која се содржи доменот и кодоменот.

x	1	3	4	0	-1	-3	-10
$y = f(x)$	a	a	a	n	b	b	b

- Запиши ги
 - а) графикот;
 - б) доменот;
 - в) множеството вредности на пресликувањето.



3. Дадено е пресликувањето $f: A \rightarrow B$, каде што $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ со правилото "x е 4 пати помал од y".

- Според правилото, запиши формула со која се добиваат сликите при тоа пресликување.
- Одреди го множеството вредности на пресликувањето.
- Спореди го твоето решение со даденото.
- Воочи дека сликата y е 4 пати поголема од оригиналот x .



Примени го тоа за да ги одредиш сликите на елементите од множеството A .

$$f: 1 \rightarrow 4 \cdot 1, \text{ т.е. } f(1) = 4 \cdot 1 = 4; f: 2 \rightarrow 4 \cdot 2, \text{ т.е. } f(2) = 4 \cdot 2 = 8; \text{ итн.}$$

$$f: 5 \rightarrow 4 \cdot 5, \text{ т.е. } f(5) = 4 \cdot 5 = 20.$$

Општо, за кој било елемент $x \in A$, и за неговата слика $y = f(x)$ важи:

$$f: x \rightarrow 4 \cdot x, \text{ т.е. } f(x) = 4x.$$

Записот $f(x) = 4x$ претставува општа постапка (формула) по која се врши пресликувањето.

Воочи дека

Пресликувањето може да биде зададено со формула по која се одредуваат вредностите на пресликувањето.

Ова се вика **аналитички начин** на задавање на пресликувањето.

4. Пресликувањето $f: A \rightarrow B$, каде $A = \{-5, -4, -3, 0, 2, 4, 5\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ е дадено со формулата $f(x) = x + 1$.

Запиши го: а) графикот Γ_f ; б) множеството вредности на f .

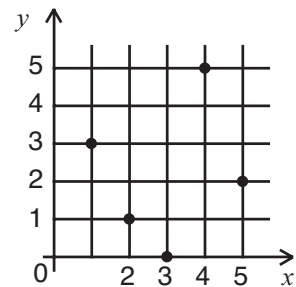


5. Пресликувањето $f: A \rightarrow B$ каде што $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, е дадено со график во координатна шема.

Одреди ги елементите на множеството вредности $V \subseteq B$ на f .

Кои броеви треба да стојат на местата од прашалниците:

а) $f(?) = 3$; б) $f(?) = 0$; в) $f(4) = ?$



Спореди го твоето решение со даденото.

Означените точки на цртежот имаат координати: $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$, $(4, 5)$ и $(5, 2)$.

Елементи на множеството вредности V се вторите координати на точките.

$$\text{Значи } V = \{3, 1, 0, 5, 2\}$$

$$f: 1 \rightarrow 3, \text{ т.е. } f(1) = 3; f: 4 \rightarrow 5, \text{ т.е. } f(4) = 5;$$

$$f: 2 \rightarrow 1, \text{ т.е. } f(2) = 1; f: 5 \rightarrow 2, \text{ т.е. } f(5) = 2.$$

$$f: 3 \rightarrow 0, \text{ т.е. } f(3) = 0;$$

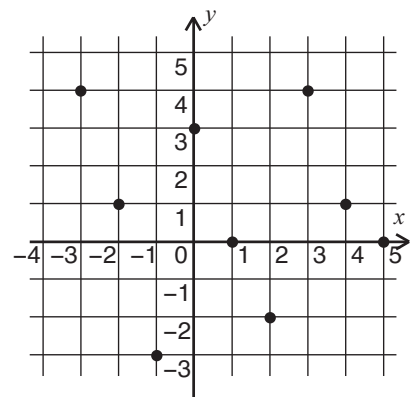
Пресликувањето може да биде зададено графички со координатна шема.

Во таков случај велиме дека тоа е зададено **графички**.

6. Пресликувањето $f: A \rightarrow B$, $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -3 \leq x \leq 5\}$ и $B = \mathbf{Z}$ е зададено на цртежот со график, во координатната шема.

Претстави го графикот Γ_f на пресликувањето f табеларно.

Состави табела на пресликувањето.



Треба да знаеш:

- ◆ да ги објасниш начините на кои може да биде зададено едно пресликување.



Провери се!

- ▲ Пресликувањето $f: A \rightarrow B$, каде што $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ е зададено со правилото $f: x \rightarrow x - 2$.
- Состави ја табелата на тоа пресликување.
- Запиши го графикот табеларно. Потоа, точките од графикот претстави ги во координатна рамнина.

Задачи

1. Пресликувањето $f: A \rightarrow B$ е зададено со табела. Во неа се дадени сите елементи на A и B .

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

в)

x	$f(x)$
0	0
1	5
2	10
3	15

б)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	-1	-1	0	1	1

- Одреди ги доменот и множеството вредности на f .

2. Графикот на пресликувањето f е:
 $\Gamma_f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$.

- Одреди колку е $f(1)$ и $f(3)$.
- За која вредност на x е $f(x) = 1$?

3. Пресликувањето $f: A \rightarrow B$, каде што $A = \{-5, -2, -1, 0, 2\}$, а $B = \mathbf{Q}$, е зададено со правилото $f: x \rightarrow \frac{x}{2}$. Запиши го графикот Γ_f табеларно.

4. Претстави ја графички функцијата $f(x)$ зададена аналитички со формулата $f(x) = x - 1$, каде што доменот и кодоменот е множеството \mathbf{R} (за оваа функција велиме дека е **реална функција**).

Постапи според барањата.

- Пополни ја табелата

x	-2	0	0,5	3
$f(x)$				

- Добиените подредени парови во табелата запиши ги како координати на точки, по ред: A, B, C и D .
- Претстави ги точките A, B, C и D во координатна рамнина.
- Провери со линијар дали точките лежат на иста права.
- Избери произволно неколку вредности за x . Одреди ги нивните слики $f(x)$ и добиените подредени парови претстави ги на истиот цртеж.
- Провери дали и тие точки лежат на иста права.
- Воочи дека графикот на функцијата $f(x) = x - 1$ е: $\Gamma_f = \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ и } y = x - 1\}$ и тој, претставен графички, е права.

ПРОПОРЦИЈА

6 РАЗМЕР

Појсетти се!

- Пресметај го количникот $28 : 7$. Што покажува вредноста (4) на овој количник?
- Запиши количник според реченицата: „Деленикот е 42 и тој е 3 пати поголем од делителот.“



1. Пресметај:

- $27 : 3$; ● $\frac{3}{5} : 6$; ● $9,6 : 1,2$.

- За секој од трите количници се вели дека е размер или однос меѓу дадените броеви.

Се чита: „27 спрема 3“, „ $\frac{3}{5}$ спрема 6“, ...

Општо

- Ако a и b се два броја при што $b \neq 0$, тогаш **размер** или **однос** на бројот a спрема бројот b се вика количникот $a : b$ (или $\frac{a}{b}$); a се вика *прв член*, а b – *втор член* на размерот. Ако $a : b = k$, бројот k се вика **вредност** на размерот.

2. Одреди ја вредноста на размерот: а) $255 : 17$; б) $17 : 255$.
Што покажува неговата вредност?

- Спореди го твојот одговор со дадениот.

а) $255 : 17 = 15$. Вредноста 15 покажува дека бројот 255 е 15 пати поголем од бројот 17.

б) $17 : 255 = \frac{1}{15}$. Вредноста $\frac{1}{15}$ покажува дека бројот 17 е $\frac{1}{15}$ дел од бројот 255.

3. Спореди ги броевите: а) 184 и 23; б) 16 и 48.

4. Вредноста на еден размер е 5. Одреди го првиот член, ако вториот член е 8.

5. Дадени се размерите $18:3$ и $\frac{2}{5} : \frac{1}{15}$. Одреди ги нивните вредности и спореди ги.

- Спореди го твоето решение со даденото.

Првиот размер $18:3$ има вредност 6. И вториот размер има вредност 6, т.е.

$$\frac{2}{5} : \frac{1}{15} = \frac{2}{5} \cdot 15 = \frac{30}{5} = 6.$$

■ Размерите што имаат еднакви вредности се викаат **еднакви размери**.

6. ▶ Провери дали се еднакви размерите: а) $4 : 25$ и $\frac{3}{5} : \frac{15}{4}$; б) $1,4 : 3,5$ и $0,2 : 0,5$.

Појсеејте се!

■ Реципрочната вредност на бројот 5 е бројот $\frac{1}{5}$, а на $\frac{3}{7}$ е $\frac{7}{3}$.

● Која е реципрочната вредност на 0,4?

● Одреди го производот на бројот $\frac{2}{7}$ и неговата реципрочна вредност.

7. ▶ Размерите $3 : 5$ и $5 : 3$ се разликуваат по местата на нивните членови.

● Запиши еден размер на два броја. Потоа, состави го размерот на истите броеви, но со обратен редослед од претходниот размер.

Забомни

Размерите $a : b$ и $b : a$ ($a \neq 0, b \neq 0$) се викаат **заемно обратни размери**, т.е. размерот $a : b$ е **обратен** на размерот $b : a$, а размерот $b : a$ е **обратен** на размерот $a : b$.

8. ▶ ● Запиши го обратниот размер на:
а) $5 : 8$, б) $1 : 4$.

● Одреди го производот на секој од дадените размери со обратниот размер.

■ Спореди го твоето решение за а). Обратен на размерот $5 : 8$ е размерот $8 : 5$.

$$(5 : 8) \cdot (8 : 5) = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} = 1.$$

Важи и ојшишо

■ Производот на еден размер $a : b$ со обратниот размер $b : a$ е 1, т.е.

$$(a : b) \cdot (b : a) = 1, (a \neq 0, b \neq 0).$$

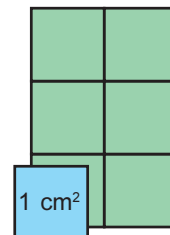
9. ▶ Како ќе објасниш дека размерите $a : b$ и $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$, $a \neq 0, b \neq 0$ се заемно обратни размери?

Помош. Вториот размер запиши го како двојна дробка и упрости го.



10. ▶ а) Правоаголникот на цртежот има 6 cm^2 .

● Што е мерено кај правоаголникот и е добиен бројот 6 cm^2 ?



б) Цветан се измерил на домашната вага и утврдил дека има 46 kg.

- Што мерел Цветан на вагата и добил 46 kg?

в) Дадени се отсечките $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ и $\overline{CD} = 2 \text{ cm}$.

- Отсечката AB е за 4 cm поголема од отсечката CD, затоа што

$$\overline{AB} - \overline{CD} = 6 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$$

- Што споредуваше кај двете отсечки и го доби бројот 4 cm?



Спореди ги твоите одговори со следниите

- Бројот 6 cm² претставува *плоштина* на правоаголникот; Цветан на вагата ја мерел сопствената *маса*; кај отсечките AB и CD ги споредувавме нивните *должини*.



Како утврди дека во кесето има 3 kg шеќер?



Кесето го ставив на вага и неговата маса ја споредив со масата на теговите. Вагата беше во рамнотежа кога ставив 3 тега од по 1 kg.

Заклучоци

- *Плоштина, маса, должина, волумен, температура, време, брзина...* претставуваат **величини**.
- Карактеристика на величините е што тие можат **да се мерат**.
- Да се **измери** една величина значи таа да се **спореди** со соодветна мерна единица и да се одреди колку пати мерната единица се содржи во таа величина, т.е. да се одреди **мерниот број** на величината.

11. Колку пати отсечката $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ е подолга од отсечката $\overline{CD} = 2 \text{ cm}$?

Ова ти е познато

Отсечката од 6 cm е 3 пати подолга од отсечката од 2 cm, т.е. $6 \text{ cm} : 2 \text{ cm} = 3$. Отсечката од 2 cm е $\frac{1}{3}$ од отсечката од 6 cm, т.е. $2 \text{ cm} : 6 \text{ cm} = \frac{1}{3}$.



Воочуваш

- Споредувањето на должините на отсечките го извршивме преку споредување на нивните мерни броеви.
- Вредноста на размерот на две должини е *неименуван број*.
- Се споредуваат само *истородни величини*.

Воочи и зайомни

- **Размер** или однос на две истородни величини се вика количникот од мерниот број на едната величина и мерниот број на другата величина, мерени со иста мерна единица.
- Вредноста на размерот секогаш е *неименуван број*.

12. Кои од следниве количници се размери:
а) $3 : 31$; б) $12 \text{ m}^2 : 4 \text{ m}^2$; в) $6 \text{ m} : 3$; г) $8 \text{ min} : 5 \text{ s}$?



Зошто количникот $6 \text{ m} : 3$ не е размер? Дали $8 \text{ min} : 5 \text{ s}$ може да се смета за размер?

- Вредноста на количникот $6 \text{ m} : 3$ е 2 m , а тоа е именуван број. Затоа овој количник не е размер.
- Количникот $8 \text{ min} : 5 \text{ s}$ може да се смета за размер ако неговите членови се претстават со иста мерна единица.



13. Одреди ја вредноста на размерите:
а) $72 : 4$; б) $4 \text{ kg} : 60 \text{ kg}$; в) $5 \text{ km} : 200 \text{ m}$; г) $2 \text{ l} : 5 \text{ dl}$.

Поисети се!

- Дропката $\frac{3}{4}$ прошири ја со 5.
- Дропката $\frac{20}{36}$ скрати ја со 4.



14. Даден е размерот $12 : 8$.

- Одреди ја неговата вредност.
- Членовите на размерот помножи ги прво со 2, а потоа со 4, и пресметај ја вредноста на секој од добиените размери.
- Спореди ги вредностите на размерите.



Што воочи?

- Вредностите на трите размери се еднакви на 1,5.



Важни описи

Вредноста k на размерот $a : b$ не се менува ако неговите членови се помножат или, пак, се поделат со ист број $m \neq 0$,

$(a \cdot m) : (b \cdot m) = k$
проширување на
размерот

$(a : m) : (b : m) = k, (m \neq 0)$
скратување на размерот

■ Тоа е **основно својство на размерот**.

15. Членовите на размерот (или мерните броеви во нив) запиши ги со природни броеви.

- $4,8 : 0,12$; ● $1,5 \text{ kg} : 5 \text{ kg}$; ● $\frac{3}{4} : 2,5$; ● $450 \text{ m} : 2,5 \text{ km}$.

16. Следните размери се изедначени со нивните вредности. Одреди ја непознатата во секое равенство:

- а) $x : 3 = 5$; б) $a : 12 = 20$; в) $6 : y = 2$; г) $25 : b = 12,5$.

■ Проследи го решението за а) и в).

а) x е деленик. Деленикот е еднаков на производот од делителот и количникот, т.е. $x = 3 \cdot 5$; $x = 15$.

в) y е делител; $y = 6 : 2$; $y = 3$.

Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш што е размер; што се членови и што е вредност на размер;
- ◆ да го искажеш и користиш основното својство на размер;
- ◆ кои размери се еднакви, а кои се заемно обратни;
- ◆ да одредиш размер на две величини.



Провери се!

- ▲ Одреди ја вредноста на размерот $27 : 36$.
- ▲ Провери дали размерите $6 : 5$ и $90 : 75$ се еднакви.
- ▲ Размерот $3 : 10$ прошири го со 4.
- ▲ Зошто $15 \text{ m}^3 : 5 \text{ m}^2$ не е размер?
- ▲ Одреди го x ако а) $x : 2 = 20$; б) $8 : x = 32$.

Задачи

1. Дедото има 63 години, а внуката има 9 години.

- За колку години дедото е постар од внуката?
- Колку пати дедото е постар од внуката?

2. Дали се еднакви размерите:

а) $\frac{3}{5} : \frac{2}{9}$ и $27 \text{ m}^3 : 10 \text{ m}^3$?

б) $2\frac{3}{4} : 3\frac{4}{5}$ и $76 : 55$?

3. Кој размер е обратен на размерот:

а) $96 : 24$; б) $3,4 : 3\frac{3}{4}$?

4. Кој од количниците претставува размер:

а) $4 \text{ m} : 24$; б) $3 \text{ kg} : 8 \text{ kg}$;

в) $5 \text{ km} : 5 \text{ cm}$; г) $\frac{3}{5} \text{ kg} : 8 \text{ cm}$?

5. Одреди ја вредноста на размерот:

а) $324 : 4$; б) $4,74 : 3$;

в) $90 \text{ min} : \frac{3}{4} \text{ h}$; г) $6 \text{ km} : 600 \text{ m}$.

д) $1 \text{ dm} : 1 \text{ m}$; ф) $1 \text{ km} : 1 \text{ m}$;

е) $1 \text{ m}^2 : 1 \text{ ар}$.

6. Запиши го размерот така што првиот член да му биде 1:

а) $4 : 5$; б) $\frac{2}{3} : 5$; в) $2,7 \text{ m} : 12 \text{ cm}$.

7. Пресметај го непознатиот член x :

а) $x : \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{3} : x = 5$;

в) $x : 0,1 = 0,01$; г) $2,7 : x = \frac{2}{7}$.

8. Во каков размер се:

а) плоштините; б) волумените;

на две коцки со рабови 4 m, односно 6 m?

7 ПРОПОРЦИЈА

Поисети се!

- Најди ја вредноста на размерите $32 : 8$ и $20 : 5$.
- Какви се меѓу себе тие два размери?
- Кое точно равенство меѓу нив можеш да го запишеш?



1. Размерот $24 : 8$ е еднаков со размерот $45 : 15$. Затоа можеш да го запишеш (точно) бројно равенство

$$24 : 8 = 45 : 15, \text{ т.е. } \frac{24}{8} = \frac{45}{15}.$$

- Запиши два еднакви размери и состави (точно) равенство меѓу нив.

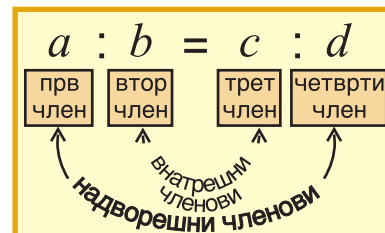
Зайомни

- Равенство на два еднакви размери се вика **пропорција**.
- Размерите $a : b$ и $c : d$ што имаат еднакви вредности, т.е. $a : b = k$ и $c : d = k$ ја образуваат

пропорцијата $a : b = c : d$, т.е. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Се чита: „ a спрема b се однесува исто како c спрема d “.

- a, b, c и d се членови на пропорцијата.
 a е **прв член**, b е **втор**, c е **трет**, d е **четврти член**.
 a и d се викаат **надворешни членови**, а b и c се викаат **внатрешни членови**.



- Секој член од пропорцијата се вика **четврта геометриска пропорционала** за другите три члена.
- Вредноста k на размерите се вика **коэффициент на пропорционалноста**.

2. Во пропорцијата $17 : 68 = 21 : 84$ на местото од секој размер запиши го неговиот обратен размер и увери се дека добиеното равенство е пропорција.

Важи и обвршо

Ако $a, b, c, d \neq 0$ и $a : b = c : d$ е пропорција, тогаш и равенството $b : a = d : c$ е пропорција.

■ Воочи го образложението.

👉 Од $a : b = k$, следува дека $b : a = \frac{1}{k}$.

👉 Од $c : d = k$, следува дека $b : a = \frac{1}{k}$.

👉 Размерите $b : a$ и $d : c$ се еднакви, па $b : a = d : c$ е пропорција.

3. Провери дали пак се добива пропорција ако во пропорцијата $15 : 9 = 90 : 54$ се променат местата на:

- 15 и 54;
- 15 и 90;
- 9 и 90;
- 9 и 54.

Незадолжително

Со разместување на членовите во една пропорција $a : b = c : d$ се добиваат уште 7 пропорции.

Согледај ги

$$\begin{array}{ll} a : b = c : d & c : a = d : b \\ c : d = a : b & d : c = b : a \\ d : b = c : a & b : a = d : c \\ a : c = b : d & b : d = a : c \end{array}$$

Поисети се!

■ Воочи: од $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ следи $3 \cdot 20 = 5 \cdot 12$.

● Одреди го x во равенството $\frac{x}{3} = \frac{8}{27}$ така што ќе извршиш „вкрстено множење“.

■ $x \cdot 27 = 3 \cdot 8$, т.е. $x = \frac{8}{9}$.



4. ● Запиши ги размерите во пропорцијата $4 : 5 = 28 : 35$ во вид на дробка.

● Изврши вкрстено множење и спореди ги добиените производи.

● Што воочуваш?

Воочив: од $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$ следува $4 \cdot 35 = 5 \cdot 28 = 140$, т.е. производот од надворешните членови на пропорцијата е еднаков на производот од внатрешните членови.



Важно и интересно

- Во пропорцијата $a : b = c : d$ производот од надворешните членови е еднаков на производот од внатрешните членови.

Ова е **основно својство на пропорцијата**.

- Проследи го образложението.

Еднаквите размери имаат еднакви вредности:

$$a : b = k; c : d = k, \text{ т.е. } a = kb; c = kd.$$

Производот на надворешните членови a и d е: $a \cdot d = (k \cdot b) \cdot d = k \cdot (b \cdot d)$. (Зошто?)

Производот на внатрешните членови b и c е: $b \cdot c = b \cdot (k \cdot d) = k \cdot (b \cdot d)$. (Зошто?)

Значи $a \cdot d = k \cdot (b \cdot d) = b \cdot c$.

$$a : b = c : d$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

5. Одреди го непознатиот член x во пропорцијата:

● $x : 12 = 9 : 4$;

● $15 : x = 3 : 5$;

● $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = x : \frac{3}{8}$.

- За да го одредиш x во секоја од трите пропорции искористи го основното својство на пропорцијата.

6. Одреди ја четвртата геометриска пропорционала за членовите во пропорцијата:

а) $2 : 3 = 5 : x$; б) $2 : 7 = x : 77$.

7. За броевите 3, 4, 9 и 12 е точно $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$. Состави пропорција чии членови ќе бидат 3, 4, 9 и 12.



Едно решение е $3 : 4 = 9 : 12$.
Има 8 решенија. Најди уште некое.

На пример: $3 : 9 = 4 : 12$;
 $12 : 4 = 9 : 3$; $12 : 9 = 4 : 3$ итн.



Важно и интересно

- Ако за некои четири броја a, b, c и d , што се различни од нула, производот на два од тие броеви е еднаков со производот на другите два броја, тогаш тие четири броја се членови на пропорција.

7. Состави пропорција (ако е можно) од броевите:
 а) 3; 16; 6; 8; б) 3; 0,4; 0,5; 2,4; в) 2; 3; 4; 5.

Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш што е пропорција и да ги именуваш нејзините членови;
- ◆ да го искажеш и применуваш основното својство на пропорција;
- ◆ да одредиш непознат член во пропорција.



Провери се!

- ▲ Искажи го основното својство на пропорција.
- ▲ Дали е точно дека $2 : \frac{3}{4} = 3 : \frac{9}{8}$?
- ▲ Одреди го x во пропорцијата $1 : 5 = x : 4$.
- ▲ Дали бројот 3 е четврта геометриска пропорционала за броевите 5, 12 и 20?

Задачи

1. Прочитај ја пропорцијата и именувај ги надворешните и внатрешните членови:
 а) $0,2 : 3 = 1 : 15$; б) $a : x = b : y$.
2. Состави пропорција за која 5 е коефициент на пропорционалноста.
3. Дадени се пропорциите:
 а) $14 : 56 = 23 : 92$; б) $\frac{1}{4} : \frac{15}{16} = \frac{8}{12} : \frac{5}{2}$.
 ● Размени ги местата на членовите во секој размер.
 ● Провери дали пак се доби пропорција.
4. Во пропорцијата $4 : \frac{1}{3} = 8 : \frac{2}{3}$ размени ги местата на:
 а) 4 и $\frac{2}{3}$; б) 4 и 8; в) $\frac{1}{3}$ и 8.
 Дали секогаш се добива пропорција?
5. Одреди го x во пропорцијата:
 а) $x : 63 = 8 : 21$; г) $2 : x = 5 : 30$;
 б) $304 : 456 = x : 768$; д) $3,03 : x = 5,05 : 6$;
 в) $2x : 3,7 = 8 : 7,4$; ф) $3,4 : 17 = 0,1x : 4$.
6. Состави пропорција од броевите во равенството:
 а) $6 \cdot 8 = 16 \cdot 3$; б) $\frac{7}{9} \cdot \frac{12}{35} = \frac{14}{15} \cdot \frac{2}{7}$.
7. Дали може да се состави пропорција од броевите:
 а) 3, 4, 9 и 12; в) 3, 5, 8 и 13;
 б) 1, 5, 17 и 85; г) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ и $\frac{1}{20}$?
8. Првиот член во една пропорција е 7,5 пати поголем од вториот член. Ако третиот член е $6\frac{2}{3}$, одреди го четвртиот член.
9. Бројот на членовите во секцијата „Млади математичари“ спрема бројот на членови во секцијата „Млади природници“ се однесува како 5 : 2. Ако бројот на млади природници е 24, колкав е бројот на млади математичари?

8 ГЕОМЕТРИСКА СРЕДИНА. ПРОДОЛЖЕНА ПРОПОРЦИЈА

Поисети се!

- Со помош на основното својство на пропорција, провери дали е пропорција:

а) $1 : 3 = 3 : 9$; б) $5 : 2 = 12,5 : 5$.



1. Пресметај го непознатиот член x во пропорцијата:

а) $3 : x = x : 27$; б) $x : 4 = 36 : x$

така што членовите да бидат позитивни.

- Проследи го решението за а).

☞ Примени го својството на пропорција: $3 : x = x : 27$; $3 \cdot 27 = x \cdot x$; $x^2 = 81$.

☞ Пресметај ја вредноста на x : $x = +\sqrt{81}$, $x = -\sqrt{81}$; $x = 9$, $x = -9$.

☞ Одреди го решението според условот: $x = 9$.



Што воочуваш кај членовите на двете пропорции?

Кај првата пропорција внатрешните членови се еднакви, а кај втората – надворешните членови се еднакви.



Зайомни

Ако во една пропорција внатрешните членови се еднакви ($a : b = b : c$), тогаш членот што се повторува се вика **геометриска средина** (или **средна геометриска пропорционала**) за другите два члена.

$a : b = b : c$ ☞ $b = \sqrt{ac}$
 b е геометриска средина за a и c .

$a : b = c : a$ ☞ $a = \sqrt{bc}$
 a е геометриска средина за b и c .

2. Одреди ја геометриската средина на броевите:

● 4 и 16; ● $\frac{1}{2}$ и 8; ● 4 и 9; ● 1 и 49.



Кој позитивен број е геометриска средина за броевите 4 и 16?

Тоа е бројот $\sqrt{4 \cdot 16}$, односно бројот 8.



3. Спореди ги вредностите на размерите: $\frac{3}{4} : 5$; $8 : \frac{160}{3}$ и $3 : 20$.

- Спореди го твоето решение со даденото:

☞ $\frac{3}{4} : 5 = 0,15$; ☞ $8 : \frac{160}{3} = 24 : 160 = 0,15$; ☞ $3 : 20 = 0,15$.

☞ Значи, вредностите на трите размери се еднакви.

- Можеш да запишеш: $\frac{3}{4} : 5 = 8 : \frac{160}{3} = 3 : 20$.

Важни оїшїїїї

- Ако три или повеќе размери, на пример $a : a_1$, $b : b_1$ и $c : c_1$, се еднакви, тогаш тие можат да се запишат во вид на **продолжена пропорција** $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$, т.е. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

- Скратено се запишува:

$$a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$$

први втори
членови членови

- 4. Запиши ја скратено продолжената пропорција:

● $2 : 6 = 3 : 9 = 7 : 21$; ● $\frac{17}{16} : 5 = 21,25 : 100 = \frac{17}{20} : 4$.

- 5. Дадена е продолжената пропорција $3 : 5 = \frac{1}{2} : \frac{5}{6} = 2,4 : 4$.

- Формирај размер чијшто прв член е збирот на првите членови на пропорцијата, а втор член – збирот на вторите членови.
- Спореди ја вредноста на овој размер со вредноста на кој било размер на продолжената пропорција. Што забележуваш?

- Спореди го твоето решение со даденото:

👉 $(3 + \frac{1}{2} + 2,4) : (5 + \frac{5}{6} + 4) = \frac{59}{10} : \frac{59}{6} = \frac{6}{10} = 0,6$.

- 👉 Сите размери се еднакви. Нивната вредност е $3 : 5 = 0,6$.

- 👉 Вредноста на добиениот размер е еднаква на вредноста на кој било размер од продолжената пропорција.

Важни оїшїїїї

- Во продолжена пропорција збирот на сите први членови на пропорцијата спрема збирот на сите нејзини втори членови е еднаков на вредноста на кој било размер од продолжената пропорција.

- На пример, ако $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = d : d_1 = k$, тогаш

$$(a + b + c + d) : (a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = k, \text{ т.е. } \frac{a + b + c + d}{a_1 + b_1 + c_1 + d_1} = k.$$

- Ова се вика **основно својство на продолжена пропорција**.

6. Во еден триаголник внатрешните агли α , β и γ се однесуваат како:

а) $2 : 3 : 4$; б) $1 : 5 : 12$.

Одреди ги аглите α , β и γ .

Работи според упатството и спореди го решението.

Запиши го збирот на аглите во триаголникот: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \dots (1)$

Запиши ја продолжената пропорција (преку еднакви размери) $\alpha : 2 = \beta : 3 = \gamma : 4$.

Нека е k вредноста на секој размер. Изрази ги аглите α , β и γ со помош на k .

$\alpha : 2 = k$, т.е. $\alpha = 2k$; $\beta : 3 = k$, т.е. $\beta = 3k$; $\gamma : 4 = k$, т.е. $\gamma = 4k$.

Замени ги изразите за α , β и γ во равенството (1) и пресметај го k .

$$2k + 3k + 4k = 180; \quad 9k = 180; \quad k = 20.$$

Одреди ги аглите α , β и γ . $\alpha = (2 \cdot 20)^\circ$; $\alpha = 40^\circ$; $\beta = (3 \cdot 20)^\circ$, $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 80^\circ$.

Треба да знаеш:

- да пресметаш геометриска средина на два броја или на две величини;
- да објасниш што е продолжена пропорција;
- да го искажеш и применуваш основното својство на продолжена пропорција;



Провери се!

- Како се вика членот a во пропорцијата $8 : a = a : 32$?
- Дали 6 е геометриска средина на броевите 1 и 36?
- Провери дали записите: $3 : 9 = 5 : 15 = 28 : 84$ и $3 : 5 : 28 = 9 : 15 : 84$

Задачи

1. Одреди го x од пропорцијата:

а) $x : 8 = 50 : x$; б) $x : 15 = 15 : \frac{45}{16}$.

в) $6 : x = x : 24$.

2. Формирај пропорција чии членови ќе бидат 8, 12, 18 и 12.

3. Одреди ги броевите a , b и c така што $a + b + c = 39$ и $a : b : c = 3 : 4 : 6$.

претставуваат иста продолжена пропорција.

4. Дадена е продолжената пропорција $3 : 2 = 15 : 10 = 105 : 70$ при која секој размер има вредност 1,5. Без да пресметуваш, одреди ја вредноста на размерот $(3 + 15 + 105) : (2 + 10 + 70)$.

4. Бројот 2 160 претстави го како збир на 3 броја кои ќе се однесуваат како:

● $1 : 5 : 12$; ● $1 : 10 : 25$.

5. За собирање на летнината во една фарма работеле фирмите А, В и С. Тие оствариле соодветно 16 000, 20 000 и 30 000 работни часа. За извршената работа фармата им исплатила вкупно 330 000 денари, пропорционално според остварените работни часови. По колку денари добила секоја фирма?

ПРОПОРЦИОНАЛНИ ВЕЛИЧИНИ

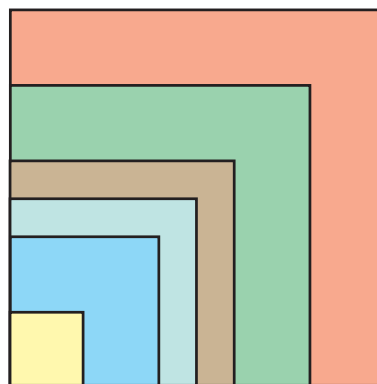
9 ПРАВО ПРОПОРЦИОНАЛНИ ВЕЛИЧИНИ

Појсетти се!

- Даден е размерот 21 : 7.
- Запиши три размери што се еднакви со него.
- Вредноста на размерот $a : b$ е 5.
- Ако членот b е 8, колку е членот a ?
- Ако b се намали 4 пати, како ќе се промени членот a ?



1. Како ќе се промени периметарот L на квадрат ако неговата страна a :
- а) се зголеми; б) се намали?



- Воочи го тоа менување на следната табела:

a (cm)	1	2	2,5	3	4	5
L (cm)	4	8	10	12	16	20

- Забележуваш дека има две **променливи величини** (или само: **променливи**): *страната на квадратот и периметарот на квадратот.*
- Согледај од табелата колку пати ќе се зголеми периметарот, ако страната се зголеми двапати (на пример: од 2 на 4 или од 2,5 и 5).

2. Еден автомобил се движи рамномерно и изминува 2 km за 1 min.
- Колку километри ќе изнесува изминатиот пат ако времетраењето на движењето е 2 min; 4 min; 5 min?
 - Ако се зголеми времетраењето на движењето, што ќе се случи со изминатиот пат?

Воочи дека

- ☞ И во оваа задача има две променливи: *времтраењето на движењето на автомобилот (да ја означиме со x) и должината на изминатиот пат (да ја означиме со y).*
- ☞ Променливите x и y се *зависни меѓусебно*, зашто промената на вредноста на едната влијае на вредноста на другата променлива.
- ☞ Зависноста на променливите x и y се гледа подобро од следнава табела:

x (min)	1	2	3	3,5	5	6	6,5	8	10	10,5	12	15
y (km)	2	4	6		10	12		16				30



Што воочуваш кај вредностите на променливата x , а што кај вредностите на y ?

Вредностите на променливата x се дадени произволно од 1 до 15. Соодветните вредности на y се добиени со пресметување. Се воочува дека секоја вредност на y е двапати поголема од соодветната вредност за x .



- Можеш да запишеш дека $y : x = 2$ или $y = 2x$.



Како се променила должината на патот кога времетраењето на движењето на автомобилот се зголемува 2 пати (од 3 min на 6 min) или 3 пати (од 5 min на 15 min)?

Должината на патот се зголемила толку пати колку што се зголемило времетраењето на движењето: два пати (од 6 km на 12 km) или три пати (од 10 km на 30 km).



- Се вели дека: на зголемувањето (односно на намалувањето) на вредноста на едната променлива одговара *пропорционално зголемување* (односно *пропорционално намалување*) на вредноста на другата променлива.
- Таква зависност меѓу две величини се вика **права пропорционалност**, а променливите x и y се вели дека се **право пропорционални величини**.

Општо

- За променливата величина y се вели дека е **пропорционална** на величината x ако за кој било пар соодветни вредности на y и x , количникот $\frac{y}{x}$ е еднаков на еден ист број k ($k \neq 0$).

$$\frac{y}{x} = k, \text{ т.е. } y = k \cdot x$$

- Бројот k се вика **коэффициент на пропорционалности**, а равенката $y = kx$ **функција** (или **формула**) **на пропорционалности**.
- Равенката $y = kx$ може да се напише и во облик $x = \frac{1}{k}y$. Во тој случај x е пропорционално со y , со коэффициент на пропорционалности $\frac{1}{k}$.

3. Цената на 1 kg јаболка е 20 денари.

- Колку пари се потребни за 4,5 kg јаболка?
- Колку килограми јаболка може да се купат за 330 денари?

- Проследи го решението и воочи ја постапката:

 Означи ја со x масата на јаболка во kg, а со y соодветната сума денари.

☞ Поради $\frac{y}{x} = \frac{20}{1}$, можеш да запишеш $y = 20x$. За 4,5 kg јаболка се потребни $y = 20 \cdot 4,5 = 90$; 90 денари.

☞ Бидејќи $x = \frac{1}{k} \cdot y$, за $y = 330$ денари може да се купат $x = \frac{1}{20} \cdot 330 = 16,5$; $x = 16,5$ kg јаболка.

4. За да се варосаат 15 m² од станот потребно е 2,4 ℓ белило. Колку белило е потребно за да се варосаат 70 m²?

■ Спореди го твоето решавање со даденото:

☞ x – плошина (во m²), y – количина белило (во ℓ).

☞ $\frac{y}{x} = \frac{2,4}{15} = 0,16$ е коефициент на пропорционалност.

☞ За $x = 70$ m² се добива $y = 0,16 \cdot 70 = 11,2$; т.е. потребни се 11,2 ℓ белило.



5. Со формулата $y = \frac{1}{2}x$ е дадена права пропорционалност меѓу величините x и y .

● Препиши ја дадената табела и допиши ги во неа соодветните вредности за y .

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	-0,5					2

● Претстави ги паровите (x, y) : $(-2, -1)$, $(-1, -0,5)$, итн. (вкупно 7) како точки во координатна рамнина.

■ Твојот цртеж треба да е како дадениот.

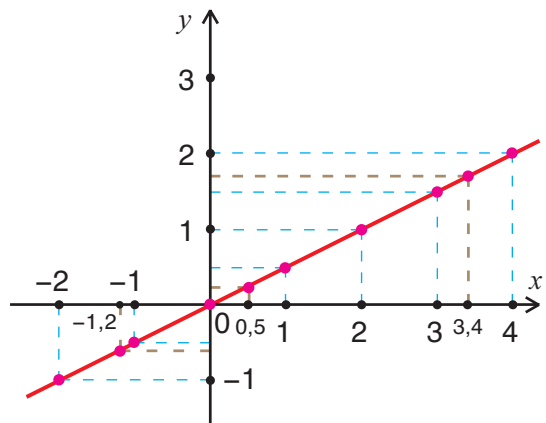
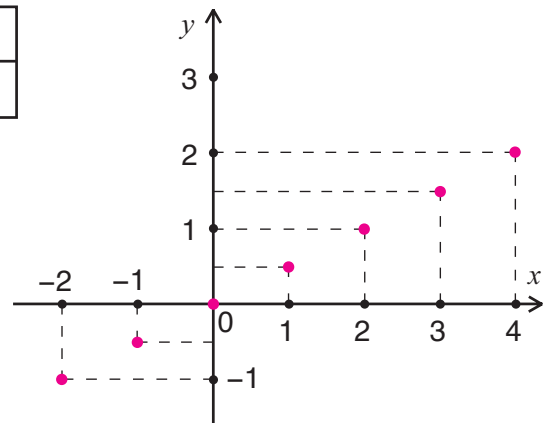
● Со помош на линијар увери се дека добиените точки на цртежот лежат на иста права.

● Како вредности за x земи ги броевите 0,5; -1; 2; 3; 4.

Пресметај ги соодветните вредности на y . Запиши ги добиените подредени парови од рационални броеви и претстави ги во координатната рамнина.

Увери се дека и тие се колинеарни со претходните точки.

■ Уште повеќе, секоја точка со апсциса x и ордината $y = 0,5x$, за $x \in \mathbb{R}$ лежи на истата права од цртежот.



Зайомни

Графикот на права пропорционалност што е зададен со формулата $y = 0,5x$ е права.

6. Нацртај график на права пропорционалност зададена со формулата $y = 2x$.

Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш кога две величини се право пропорционални;
- ◆ да ја препознаваш формулата на права пропорционалност;
- ◆ да нацрташ график на права пропорционалност.

Задачи

1. Кои од следните величини се право пропорционални?
 - а) Страна на квадрат и периметар на квадрат.
 - б) Радиус на круг и плоштина на круг.
 - в) Изминат пат и брзина при рамномерно движење.
 - г) Број на работници и време потребно за извршување на работа.
 - д) Раб на коцка и плоштина на коцка.
 2. Величините x и y се право пропорционални со коефициент на пропорционалност $k = 3$.
 - а) Запиши ја формулата на правата пропорционалност.
 - б) Одреди ги соодветните вредности за y ако $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
 3. Запиши формула за периметар на:
 - а) квадрат со страна a ;
 - б) кружница со радиус r ;
 - в) рамностран триаголник со страна y .
- За секоја формула одреди го коефициентот на пропорционалност и објасни дали таа е формула на права пропорционалност.

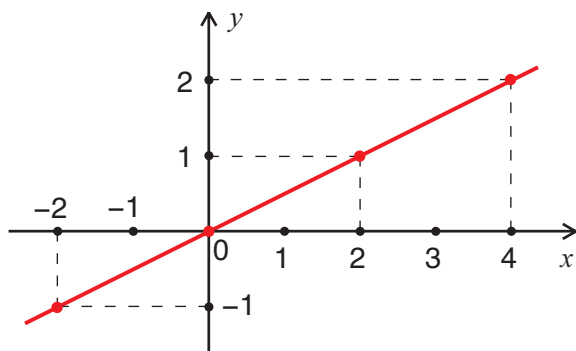


Провери се!

- ▲ Дадена е права пропорционалност на две величини x и y со формулата $y = 4x$. Состави табела. Потоа нацртај график на правата пропорционалност за

$$x \in \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

4. Претстави ја со график правата пропорционалност а) $y : x = 1 : 2$; б) $y = 3x$.
5. На цртежот е даден график на права пропорционалност на величините x и y .



- Состави таблица, според цртежот.
- Одреди го коефициентот на пропорционалноста.
- Запиши формула на правата пропорционалност.

Појсетѝ се!

- Нека x и y се право пропорционални величини, сврзани со формулата $\frac{y}{x} = 3$.
- За $x = 4$, колку е y ?
- Ако вредноста на x се зголеми 5 пати (на пример: од 4 на 20) како ќе се промени вредноста на y ?



1. Правоаголник со страна a и b има плоштина 36 cm^2 , т.е. $a \cdot b = 36$.

Во табелата се дадени должините на страните на неколку правоаголници со плоштина 36 cm^2 .

a (cm)	1	2	3	4	5	6
b (cm)	36	18	12	9	7,2	6

- Како се менува должината на страната b кога страната a се зголемува:
 - а) 2 пати (на пример: од 1 на 2; од 2 на 4);
 - б) 3 пати (на пример: од 1 на 3; од 2 на 6)?

Воочив дека колку пати се зголемува страната a , толку пати страната b се намалува.



2. Ако 24 работници со еднаква работоспособност една работа можат да ја сработат за 16 дена, за колку дена истата работа би ја сработиле: 2 пати помалку (т.е. 12) работници; 4 пати помалку (т.е. 6) работници; 2 пати повеќе (т.е. 48) работници?

■ Спореди го твоето решение со даденото:

- 👉 2 пати помалку (т.е. 12) работници би ја сработиле работата за 2 пати повеќе (т.е. 32) дена;
- 👉 4 пати помалку (т.е. 6) работници би ја сработиле работата за 4 пати повеќе (т.е. 64) дена;
- 👉 2 пати повеќе, (т.е. 48) работници би ја сработиле работата за 2 пати помалку (т.е. 8) дена.
- 👉 Согледај дека: $24 \cdot 16 = 12 \cdot 32 = 6 \cdot 64 = 48 \cdot 8 = 384$.

Општио

- Ако бројот на работниците е x , а бројот на деновите е y , тогаш $x \cdot y = k$ или $y = \frac{k}{x}$ (k – константа), т.е. производот од вредноста на променливата x и соодветната вредност на променливата y е константен.
- За вакви две величини се вели дека се обратно пропорционални.

Од примерите воочи

- Со зголемување на вредноста на едната променлива m пати, соодветната вредност на другата променлива се смалува m пати.
- Се вели: на зголемувањето на вредноста на едната променлива одговара *пропорционално* смалување на вредноста на другата променлива.
- Таквата зависност на две величини се вика *обратна пропорционалност*.

Запомни

За x и y се вели дека се **обратно пропорционални величини**, со коефициент на обратната пропорционалност k ($k > 0$), ако $x \cdot y = k$.

Равенството $y = \frac{k}{x}$ се вика **функција** (или **формула**) на **обратна пропорционалност**.

3. За секој пар соодветни вредности за x и y одреди го производот $y \cdot x$ и утврди дали величините x и y се обратно пропорционални.

а)

x	3	4	5	6
y	8	6	4,8	4

б)

x	10	20	30	40	60
y	60	70	40	30	20



4. Обратната пропорционалност меѓу величините x и y е дадена со формулата

$$y = \frac{12}{x}.$$

- Состави табела земајќи $x \in \{-12, -8, -6, -4, -3, -2, -1\frac{1}{2}, -1, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.
- Добиените подредени парови претстави ги како точки во координатна рамнина.

- Спореди го твоето решение со даденото:

x	-12	-8	-6	-4	-3	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	6	8	12
$y = \frac{12}{x}$	-1	$-1\frac{1}{2}$	-2	-3	-4	-6	-8	-12	12	8	6	4	3	2	$1\frac{1}{2}$	1

Воочуваи

☞ На позитивните вредности за x им одговараат позитивни вредности за y .

☞ На „големи“ вредности на x одговараат „мали“ вредности на y и обратно.

Пример: за $x = 12$: $y = 1$; за $x = 120$: $y = 0,1$; а за $x = 12\,000$: $y = 0,001$.
за $x = 2$: $y = 6$; за $x = 0,2$: $y = 60$; а за $x = 0,002$: $y = 6000$.

☞ На негативните вредности на x им одговараат негативни вредности за y .

5. Дадена е функцијата на обратна пропорционалност $y = \frac{6}{x}$.

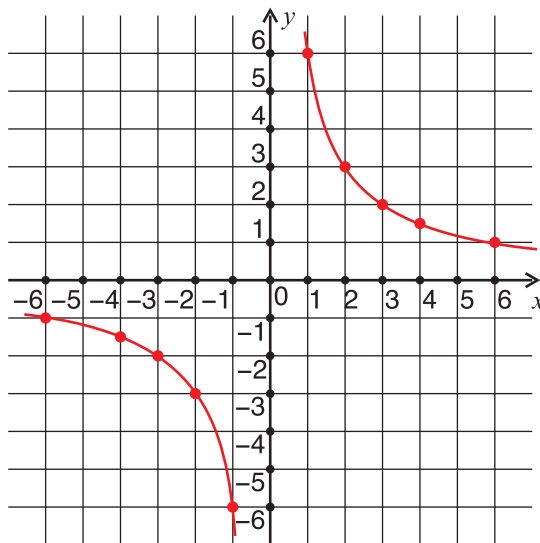
● За $x \in \{-6, -4, -3, -2, -1\frac{1}{2}, -1, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 3, 4, 6\}$ состави таблица на соодветни вредности.

● Добиените подредени парови (x, y) од таблицата, претстави ги како точки во правоаголен координатен систем.

● Нацртај го графикот на функцијата $y = \frac{6}{x}$.

● Дали точката $A(2\,400; 0,0025)$ му припаѓа на тој график?

■ Спореди го твојот график со дадениот на цртежот.



6. Кој број треба да стои на местото од прашалникот во табелата, ако се знае дека x и y се обратно пропорционални величини?

а)

x	1	2	3	4
y	?	?	4	?

б)

x	-3	-2	2
y	?	?	3

в)

x	1	5	50
y	?	20	?

● Запиши ја формулата на обратната пропорционалност во секој од случаите а), б), в).

Треба да знаеш:

- ◆ да објасниш кога две величини се обратно пропорционални;
- ◆ да запишеш формула за обратна пропорционалност;
- ◆ да утврдиш обратна пропорционалност на две величини според дадени вредности (таблица и сл.);
- ◆ да нацрташ график на обратна пропорционалност на две величини.

Задачи

1. Утврди кои од следните величини се право пропорционални, а кои обратно пропорционални:
 - а) напречен пресек на цевката од која се полни базенот и времето за кое се полни;
 - б) изминат пат на возилото и потрошениот бензин;
 - в) масата на телото и забрзувањето што тоа го добива при делување на сила со постојана јачина;
 - г) плоштината на квадрат и должината на неговата страна.
2. Величините x и y се обратно пропорционални со коефициент на пропорционалност $k = -4$.
Одреди ги вредностите за y ако $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Провери се!

- ▲ Од таблицата издвој два пара вредности за обратно пропорционалните величини X и Y и состави пропорција.

X	2	3	4	5	6
Y	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$

- ▲ Нацртај го графикот на функцијата на обратна пропорционалност $y = \frac{4}{x}$, откако ќе составиш таблица, земајќи $x \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$.

3. Обратната пропорционалност е зададена со формулата $y = \frac{8}{x}$.
 - а) Одреди ги вредностите за величината y соодветно на вредностите за $x \in \{-5, -4, -2, 2, 4, 5\}$.
 - б) Одреди ги вредностите за x соодветно на вредностите за $y \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 4\}$.
4. Претстави ја графички обратната пропорционалност:
 - а) $y = \frac{0,5}{x}$; б) $y = \frac{3}{x}$; в) $y = -\frac{10}{x}$.

11 ПРОСТО ТРОЈНО ПРАВИЛО

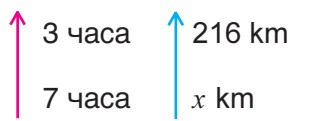
Поисети се!

- Миле се качувал по еден рид. Кога стрмината била поголема, Миле побавно се качувал. На местата каде што падините на ридот биле поблаги, Миле го забрзувал качувањето.
- Какви се меѓусебно величините: брзината на качувањето на Миле и стрмината на ридот?
- Миле патувал со автомобил. За 2 часа тој стигнал во местото во кое патувал. Ако со автомобилот се движел побрзо, тој ќе стигнел за помалку од 2 часа.
- Какви се меѓусебно величините: брзината на автомобилот на Миле и времетраењето на возењето до одреденото место?

Воочи

- Величините пат и време во задачавата се право пропорционални. Ако x е должината на бараниот пат, тогаш размерот 3 часа : 7 часа е еднаков на 216 km : x km, т.е. $3 : 7 = 216 : x$, $3x = 7 \cdot 216$, $x = 504$, т.е. 504 km.

- Попрегледно тоа се запишува на следниот начин:



- ☞ Во првиот ред се запишуваат познатите членови 3 часа 216 km.
- ☞ Во вториот ред се запишува преостанатиот познат член и непознатиот, водејќи сметка при потпишувањето еден под друг именуваните броеви да бидат од ист вид.
- ☞ Редот со познатите членови се вика **условен став**, а редот што го содржи непознатиот член – **прашален став**.
- ☞ Постава стрелка од непознатиот член до членот што е над него.



1. Еден автомобил што се движи рамномерно, за 3 часа поминал 216 km.

Колку километри ќе помине истиот автомобил за 7 часа?

- Мимоза и Роза решавале самостојно, секоја на свој начин.



Мимоза




За еден час автомобилот поминал $216 : 3 = 72$, т.е. 72 km.
За 7 часа тој ќе помине $7 \cdot 72 = 504$, т.е. 504 km.



Роза

Ако x е патот што треба да го помине автомобилот, тогаш за 3 часа автомобилот поминал $\frac{3}{7}$ од

патот x , т.е. $216 = \frac{3}{7} \cdot x$, $x = \frac{7 \cdot 216}{3} = 504$, т.е. 504 km.

-  Постави стрелка пред познатите два члена (во другата колона) истонасочена со стрелката пред x – ако величините се правопрпорционални, а спротивно насочени ако тие се обратно пропорционални.
-  Формирај пропорција од двата пара така што во секој од размерите првиот член да биде оној што е на почетокот, а втор оној што е на крајот од стрелката: $x : 216 = 7 : 3$.
-  Вредноста на непознатиот член на пропорцијата е решение на задачата; $3x = 216 \cdot 7$, $x = 504$ km.

Зайомни

■ Поставувањето пропорција според прикажаната шема се вика **просто тројно правило**.

2. За 6 дена кројачот може да соши 2 костуми.
 - а) Колку костуми би можел да соши тој кројач за 24 дена?
 - б) За колку дена тој кројач би сошил 9 костуми?
3. Некој ракопис од 126 страници има по 45 реда на секоја страница. Колку страници би имал ракописот ако на секоја страница има по 35 реда?
Еве како решавале Јован и Бојан.

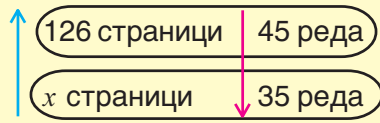
Јован


Ако секоја страница има по 35 реда, ракописот ќе има 126 страници и $(126 \cdot 10)$ реда = 1 260 реда; $1260 : 35 = 36$ страници. Вкупно ќе има $126 + 36 = 162$, т.е. 162 страници.


Бојан

Бројот на редовите и бројот на страниците се обратно пропорционални. Ако x е бројот на страниците на ракописот со по 35 реда на секоја страница, тогаш $45 : 35 = x : 126$; $35x = 45 \cdot 126$; $x = 162$, т.е. 162 страници.

Поирегледно



 условен став

 прашален став

$$x : 126 = 45 : 35; x = 162 \text{ страници.}$$

Во **прашалниот став** (вториот ред) се поставува прашањето: Ако бројот на редови на една страница треба да се намали (од 45 на 35), што ќе се случи со бројот на страниците на тој ракопис?

Одговор: Бројот на страниците ќе се зголеми

Значи, величините: *бројот на редовите на една страница* и *бројот на страниците* (за ист ракопис) се обратно пропорционални.

3. Фирмата „Здрава храна“ ги ора површините со 6 трактори, за кои има гориво за 15 дена. По 5 дена се вклучиле уште 4 такви трактори. За колку дена резервите гориво ќе се потрошат ако тракторите имаат иста потрошувачка?

Помош

- Колку дена орале 6 трактори, а колку 10 трактори?
- Разгледај две состојби за преостанатите 10 дена:
 - 1) кога би орале 6 трактори, гориво ќе има за 10 дена;
 - 2) кога би орале (6 + 4) трактори за колку дена ќе има гориво?

Треба да знаеш:

- ◆ да ги запишеш членовите на пропорцијата во два реда, така што во едниот од нив да се содржи членот што се бара;
- ◆ со **прашалниот став** да одредиш каква е пропорционалноста – права или обратна;
- ◆ да поставиш пропорција и да го одредиш непознатиот член во неа.



Провери се!

- ▲ Ако 12 kg кафе чини 2 160 денари, тогаш колку денари чини 23 kg кафе?
- Состави ја шемата!
- Постави ги стрелките.
- Пресметај го непознатиот член во пропорцијата.

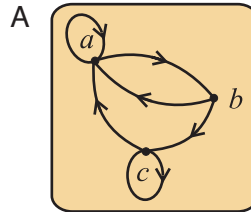
Задачи

1. Ако 17 kg месо чини 3 060 денари, тогаш колку денари чини 71 kg од истото месо?
2. Една работа 24 работници можат да ја завршат за 8 дена. За колку дена, под истите услови, работата можат да ја завршат 16 работници?
3. Еден автомобил потрошил 22,5 ℓ за да измине 250 km пат. Колку километри ќе измине автомобилот со 90 ℓ?
4. Еден автомобил се движел со 60 km/h и за 6 часа го поминал растојанието од местото А до местото В. За колку часа автомобилот ќе го помине растојанието од А до В ако се движи со брзина од 80 km/h?
5. Тројца сидари за 14 дена можат да сосидаат 150 m³ сид. За колку дена 7 сидари под исти услови можат да сосидаат 375 m³ сид?
Упатство: примени го двапати простото тројно правило.
6. Една пумпа за $4\frac{1}{2}$ часа подигнува 360 hl вода на височина од 25 m. Колку хектолитри вода дигалката ќе подигне за 8 часа на височина од 10 m?



УЧЕШЕ ЗА ФУНКЦИЈА И ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ. ПРОВЕРИ ГО ТВОЕТО ЗНАЕЊЕ

- 1.** Со графот треба да биде претставен декартовиот квадрат на множеството $A = \{a, b, c\}$. Колку стрелки недостасуваат? Кои се тие?



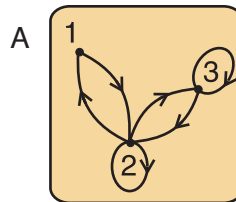
- 2.** Нацртај го $\triangle ABC$, $A(3,1)$, $B(-1,2)$, $C(-2,-3)$ во координатна рамнина.

- 3.** Дадени се множествата $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

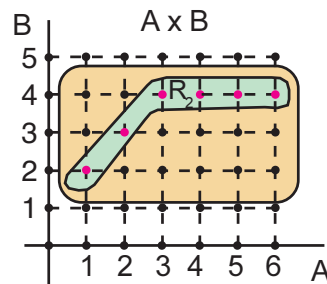
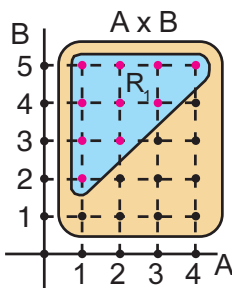
- Претстави го декартовиот производ $A \times B$ со координатна шема.
- Во координатната шема прикажи релација R , различна од $A \times B$.

- 4.** Во множеството $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ е дадена релацијата $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 4), (6, 5), (6, 6)\}$. Претстави ја релацијата R во координатна шема.

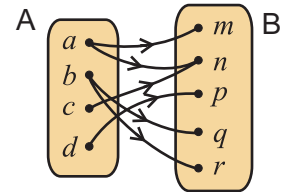
- 5.** Со графот е дадена релација R во множеството $A = \{1, 2, 3\}$. Запиши го нејзиниот график.



- 6.** Која од релациите R_1 или R_2 е пресликување (функција) од A во B ?



- 7.** Кои две стрелки треба да се избришат за да се добие пресликување од A во B ?



- 8.** Наброј ги начините на кои се задава пресликување.

- 9.** Одреди го непознатиот член во равенството: а) $x : 0,5 = 2,5$; б) $3 \cdot x = 4$.

- 10.** Состави пропорција чии членови ќе бидат множителите во равенството $7 \cdot 24 = 6 \cdot 28$.

- 11.** Пресметај го непознатиот член x во пропорцијата $3 : 8 = x : 60$.

- 12.** Величините x и y , што се дадени со табелата се право пропорционални.

x	2	4	6	7
y	7	14	21	?

- Одреди го коефициентот на пропорционалноста.

- Што треба да стои на местото од прашалникот во табелата?

- 13.** Величините x и y се обратно пропорционални со коефициент на пропорционалноста $k = 20$. Што треба да стои на местата од прашалниците во табелата?

x	4			4 800
y		120	64	

- 14.** За 5 дена 12 ученици посадиле 940 борчиња.

а) За колку дена истата работа би ја завршиле 30 ученици?

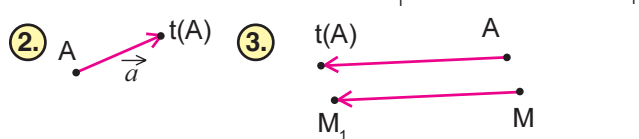
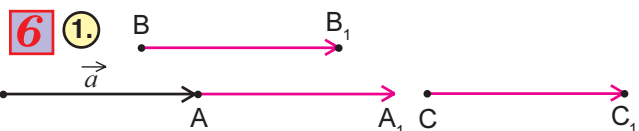
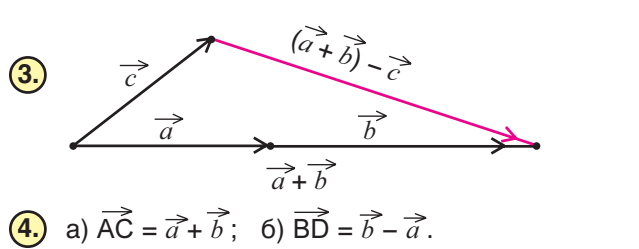
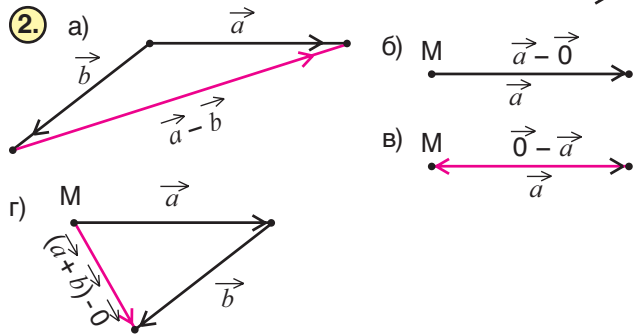
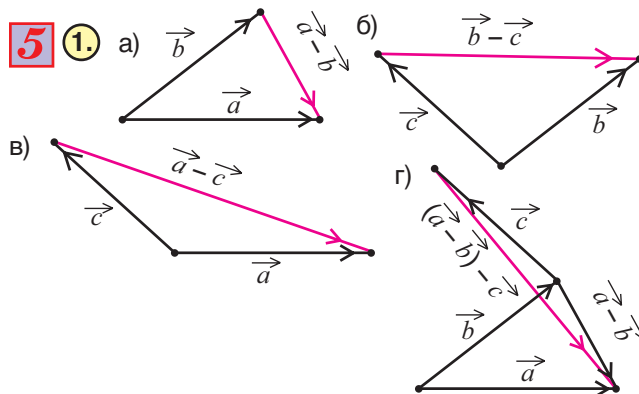
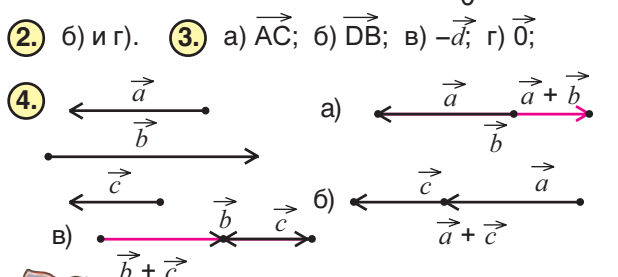
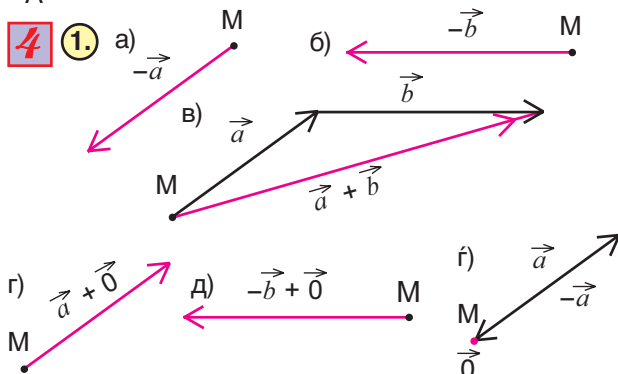
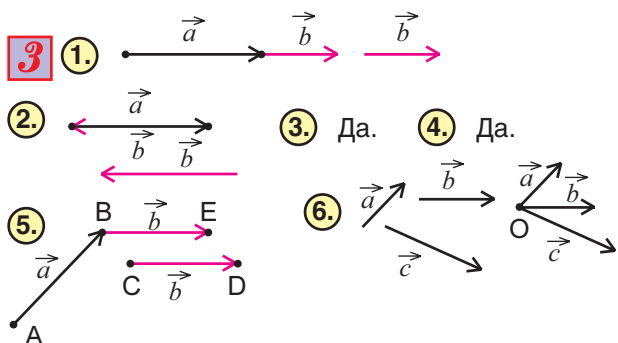
б) Колку ученици истата работа би ја завршиле за еден ден?

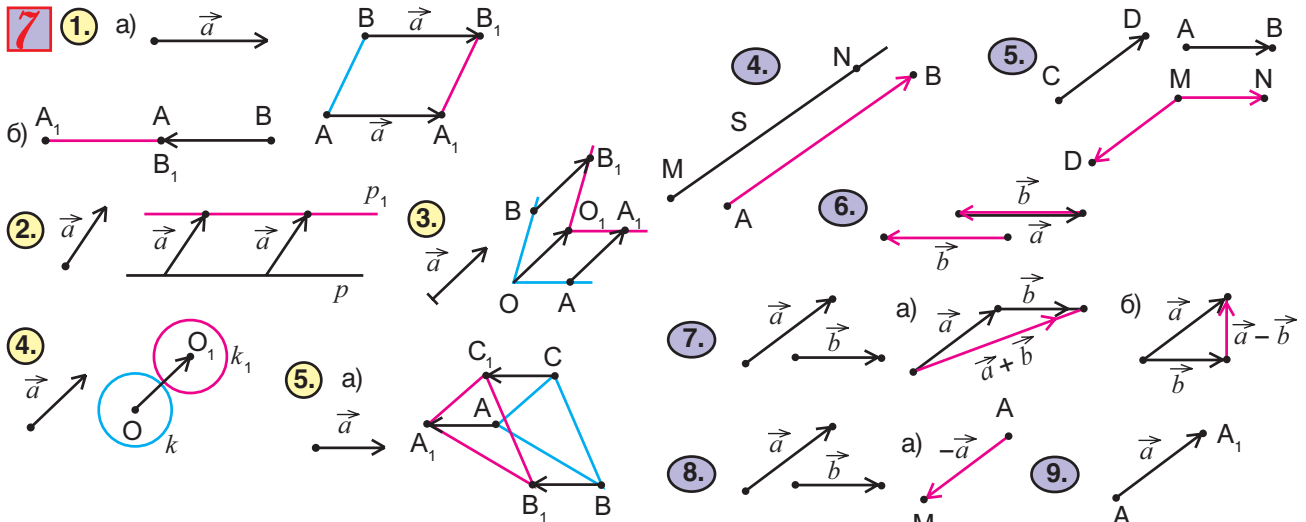
ОДГОВОРИ И РЕШЕНИЈА

НА *задачите*

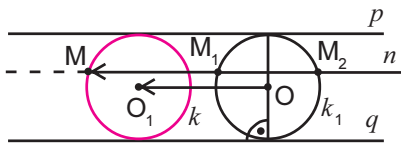
ТЕМА 1. ВЕКТОРИ, ТРАНСЛАЦИЈА И РОТАЦИЈА

- 1** ①. а) полуправа, б) точка, отсечка или \emptyset .
 ②. а) полуправа, б) права или „прекината права“.
 ③. а) АВ и DC; АО и ОС; б) АВ и ВА; DC и ВА.
 ④. $OA \uparrow \downarrow O_2A$.
2 ①. $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{EF}$. ②. Да; да.
 ③. Истонасочени се векторите под б), г), д).
 Спротивнонасочени се векторите под а), в).
 Насоките на векторите под \acute{r}) не се споредуваат.



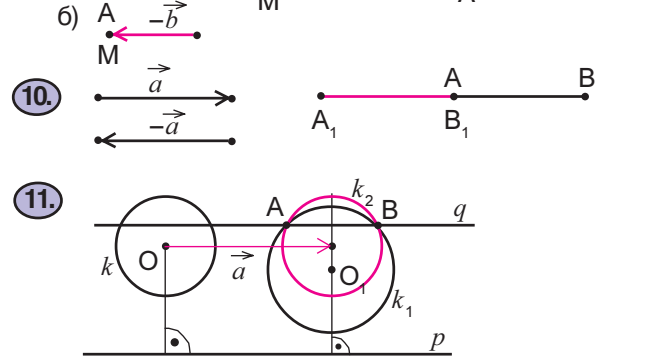


- 8** 1. Упатство. Изврши translација t на правата p за вектор \vec{VA} . Нека $p_1 = t(p)$, тогаш $p \cap p_1 = \{M\}$. Сликата на точката M при translација за вектор \vec{AB} е точката N .
2. Упатство. Конструирај кружница k_1 која ги допира правите p и q .



Низ M повлечи права n паралелна со p . $n \cap k_1 = \{M_1, M_2\}$. Изврши translација на k_1 за вектор $\vec{M_1M}$ (едно решение).
Второ решение: Изврши translација на k_1 за вектор $\vec{M_2M}$.

- Тест: 1. Види страница 5. 2. а) б) 3. Види страница 9.



Упатство: Изврши translација на k за вектор \vec{a} (според цртежот). $\vec{a} \parallel p$. $t(k) = k_2$; $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$. Правата AB е бараната права q .

12. Упатство. Нека кружницата k_1 има радиус r_1 и центар O_1 , k_2 радиус r_2 и центар O_2 . Нека $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$. Translацијата на k_1 за вектор $2\vec{O_1A}$ е кружницата k_3 . $k_2 \cap k_3 = \{A, M\}$. Со точките A и M е определена правата p . Правата AB е второ решение.

ТЕМА 2. СТЕПЕНИ. КВАДРАТЕН КОРЕН

- 1 1. Основа: $6; 3; 4,26; 3p; (-x+4); -p^8; \frac{x+1}{2}$ и 0 . Експонент: $3, 6, 7, m, p, 4, 3$ и 20 . 2. $(-2,5)^2; x^6; (a+b)^3; 6^5; \left(-\frac{1}{2}\right)^3; (x+6)^2$. 3. $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$; $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2); \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11}$; $(-x+3)(-x+3)(-x+3); \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right); m^3 \cdot m^3 \cdot m^3 \cdot m^3$. 4. $-32; 25; \frac{1}{8}; -0,0279936$.
- 2 1. $19 \cdot 10^{23}; 64 \underbrace{000\dots 0}_{19 \text{ нули}}; 1000 \underbrace{\dots 0}_{14 \text{ нули}}$.

② ● 4 350 000; ● 690; ● 0,015; ● 2 678 300;

● 450; ● 0,00392. ③ 3; 12; 68; 3.

④ $(6 : 3 + 3) \cdot 3^2 = 45$; $6 : (3 + 3) \cdot 3^2 = 9$;

$(6 : 3) + (3 \cdot 3^2) = 29$.

③ ① ● x^{20} ; y^{102} ; 6^{115} ; ● x^{10} ; $(-b)^{16}$. ② ● a ;

● 35; ● 2 и p . ③ ● 17^2 ; $1,1^3$; ● $\frac{1}{x^3}$; $\frac{1}{3^{15}}$;

● 1; 1. ④ 4; $\frac{1}{3^7}$; 1 679. ⑤ 4; 4. ⑥ 1024.

④ ① $a^6 b^2$; $x^{28} y^{21}$; $a^2 y^6 b^{10}$; $7^9 a^{54} b^{36}$. ② $\frac{x^{15} y^{10}}{a^{10}}$;

$\frac{a^{10} c^{20}}{b^{15}}$. ③ $\left(\frac{a}{b}\right)^9$; $\left(\frac{1}{p}\right)^7$; $\left(\frac{2x}{y}\right)^{15}$. ④ а) $(a^2)^9$;

б) $(a^6)^3$; в) $(a^9)^2$. ⑤ а) $\frac{1}{27}$; б) 64. ⑥ а) $(ab)^2$;

б) $(3x)^6$; в) $(x^2 y z^3)^4$; г) $(2x^3 y^2)^3$.

⑤ ① а) 4,5; б) 72; в) 1. ② а) $x = 12$ или $x = -12$;

б) $x = 6$ или $x = -6$; в) $x = 6$ или $x = -6$. ③ 18 см.

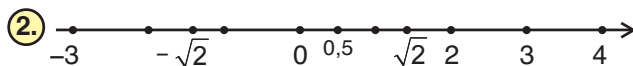
⑥ ① а) Броевите меѓу 2 и 3; б) Броевите меѓу 3

и 4. ② ● 7 и 8; ● 4 и 5; ● 10 и 11.

③ $\left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{16}{100}$, точно е. ④ Точни се равен-

ствата под а) и б). ⑤ 20 см.

⑦ ① Ирационални броеви се: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}$.



③ а) $4 + 3 = 7$; б) $6 + 1,73 = 7,73$;

в) $3 \cdot 1,73 + 1,41 = 6,60$; г) $2,65 - 1,73 + 1,41 = 2,33$;

⑧ ① ● Елементи на \mathbf{N} се броевите: 1 и 2;

● Елементи на \mathbf{Z} се броевите: $-2, 0, 1$ и 2 ;

● Елементи на \mathbf{Q} се броевите: $-\frac{3}{4}, -2, -\frac{1}{2}, 0,$

1 и 2; ● Елементи на \mathbf{R} се сите дадени броеви.

② Точно е под б) и г).

Тест: ① 5 – основа; 3 – експонент.

② а) 3^6 ; $(a - 1)^3$; б) $x x x x x x x$; $(-2)(-2)(-2)$;

$(x - y)(x - y)(x - y)(x - y)(x - y)$. ③ а) 625; б) -125 ;

в) -5 ; г) 1. ④ а) $25 \cdot 10^3$; б) $705 \cdot 10^4$.

⑤ а) $25 \cdot 0,1^5$; б) $2103 \cdot 0,1^3$; ⑥ а) 0; б) 2.

⑦ а) x^{10} ; б) $(a + 1)^4$. ⑧ а) a^{10} ; б) x^9 .

⑨ а) 5^{12} ; б) $0,2^6$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{35}$. ⑩ а) $a^3 b^3$;

б) $16x^{12} y^4$; в) $\frac{x^6}{y^3}$; г) $\frac{1}{a^4}$. ⑪ x^4 . ⑫ а) -12 ;

б) 1. ⑬ а) $x = 4$ и $x = -4$; б) $x = 9$ и $x = -9$.

⑭ а) $a = 49$; б) 5,4. ⑮ а) $\sqrt{4}$; 12;

б) -3 ; $\sqrt{4}$; 12; в) -3 ; $-\frac{2}{3}$; 0,5; $\sqrt{4}$; 3,2(7); 12; г) $\sqrt{5}$;

д) сите дадени броеви.

ТЕМА 3. ПОЛИНОМИ

⑦ ① а) 5; б) $-1 \frac{3}{4}$; в) $6 \frac{2}{3}$; г) $1 \frac{3}{4}$.

② Немаат бројна вредност изразите под б) и под в).

③ Изрази со променлива се: $a + 2$; $\frac{x-1}{x+1}$; $\frac{x^2-1}{2}$.

④ 15. ⑤ за $x = 5$. ⑥ $A(1) = B(1) = -2$;

$A(2) = B(2) = 0$; $A(3) = B(3) = 6$; $A(4) = B(4) = 16$.

⑦

	0	1	2	3
$4x^2 - 4$	-4	0	12	32
$4(x^2 - 1)$	-4	0	12	32

 Равенството $4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1)$ е идентитет.

⑧ Идентитет е

равенството $A(x) = B(x)$.

② ① ● $-6a^5 b^4 c$; ● $\frac{1}{6} x^3 y^4$. ② Коefициенти:

-4 и $\frac{1}{2}$; главни вредности: $x^2 y^3$ и $a^2 b^3 c$. ③ $-0,5 a^2 b^3$.

4. Слични мономи се: $-3a^2b^2c$ и $5a^2b^2c$; $2xy^2z^3$ и $\frac{1}{2}xy^2z^3$. 5. Спротивни мономи се: $\frac{1}{2}a^2b^3c$ и $-\frac{1}{2}a^2b^3c$. 6. $-\frac{1}{3}a^2b^3c$. 7. $3a^2b^3c^3$ е од шести степен, $-2x^2y$ е од трети степен, $-5a$ е од прв степен и $4x^3yz$ е од петти степен.
8. $-3a^3b$ и $-3a^2b^3$.

- 3 1. a) $2a^2b$; б) $-2x^2y^5$. 2. a) $4a^2b - 6a^2b^2$; б) $2x^2 + 3x^3$. 3. $8ay^3$. 4. $2xy$. 5. $-4a^2b^3$.

- 4 1. $2x^3y^3 - 3x^5y^4$; $-5a^3b^4 + 3a^2b^5 - 8a^2b^2$. 2. $5x^2y^3 - 8x^3y^2$; $5x^3 + 4x^3 - 3x$. 3. $2x^3y^4 + 3x^2y^3 - 2^4y$. $x^3y + 7xy^3$. 4. $5, -2a, b$ и -3 . 5. $-4a^2b + 2ab^2 - 3ab$; $x^2y^3 - 3xy^2 + 2xy$. 6. 23. 7. $9x^5y^2 - 2x^3y^2 + 2x^2y^4$ е од седми степен, $a - 4a^3b + 2a^7b - 3a^6b$ е од деветти степен. 8. $3x^2y^4 - 2x^3y^2 + 5x^2y - 7$.

- 5 1. $6a^3b^3$; $-a^3b^4c^6$. 2. $-10a^5b^5c^2$; $-8,4x^6y^6$. 3. $(-3a^2b^3) \cdot (2a^3b^2) = -6a^5b^5$; $(2a^3b^2) \cdot (-3a^2b^3) = -6a^5b^5$. 4. $((-2a^2bc) \cdot (3ab^2c)) \cdot (-4abc^2) = (-6a^3b^3c^2) \cdot (-4abc^2) = 24a^4b^4c^4$; $(-2a^2bc) \cdot ((3ab^2c) \cdot (-4abc^2)) = (-2a^2bc) \cdot (-12a^2b^3c^3) = 24a^4b^4c^4$. 5. a) $4x^4y^6$; б) $\frac{4}{9}a^4b^2c^6$. 6. $9y^4$; $6,25a^4b^6$; $27x^6y^9$. $\frac{1}{16}a^8b^4c^{12}$. 7. $12a^5b^4$; $-24x^9y^{14}$. 8. $x^{12}y^6$; $64a^{18}b^{12}$.

- 6 1. a) $4a^2b - 5ab^2$; б) $7x^3 + 3x^2 - 2x + 2$. 2. a) $9x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3$; б) $-7a^3b + 2ab^3$. 3. -4 . 4. $8x^2y^3 - 2x^3y^2$. 5. $(3x^2 - 2x + 5) + (-x^2 - 2x + 1) + (-2x^2 + 4x - 2) = 4$. 6. a) $3x^3 + 3x^2 - x$; б) $4,3a^3 - 2,4b^3$. 7. a) $2x^2 - 4xy + 4y^2$; б) $-2x^2 - 4xy + 5y^2$. 8. -37 . 9. $2x^2 - 6xy$. 10. $2a^2 - 8a - 1$; $6a^2 - 10a + 11$.

- 7 1. a) $8x^3y - 12xy^4$; б) $-10a^5b^3 + 6a^4b^4 - 2a^3b^5$. 2. a) $20a^2 + 8a - 12$; б) $7x^3 - 2x^2y^2 + 6y^3$. 3. a) $a^3b^2 - 2a^2b^3 - \frac{10}{9}ab^4$; б) $2x^4y - x^3y^2 + 3x^2y^3 - 4xy^4$.

4. a) $15x^5 - 10x^4 - 10x^3$; б) $5x^5 - 20x^4 + 20x^3$. 5. a) $3a^4b^3 - 3a^3b^4$; б) $11x^4 - 5x^3 + 13x^2$. 6. 12.

- 8 1. a) $2a^2 - ab - 6b^2$; б) $2x^3 + x^2y - 16xy^2 + 15y^3$. 2. a) $a^4 - b^4$; б) $x^4 - y^4$. 3. a) $1,2a^5 - 2,5a^4 - 1,48a^3 + 3,5a^2 - 0,28a$; б) $3x^4 + 1\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{4}x$. 4. $24x^4 - 46x^3 + 69x^2 - 56x + 15$. 5. 20. 6. a) 5616; б) 4221.

- 9 1. a) $x^2 - 9$; б) $4a^2 - 9$. 2. a) $9x^4y^2 - 4x^2y^4$; б) $36a^2b^6 - 25a^6b^2$. 3. a) 3599; б) 9984. 4. a) 8091; б) 39996. 5. a) $3x^2 - 5y^2$; б) $3a^4b^2 - 3a^2b^4$. 6. a) $(x+3)(x-3)$; б) $(2x+3y)(2x-3y)$. 7. a) $0,04a^2b^2 - c^2$; б) $\frac{x^2y^2}{4} - \frac{x^2}{25}$. 8. a) $z^4 - 81$; б) $(x+y)^2 - 1$.

- 10 1. a) $x^2 + 8x + 16$; б) $4x^2 + 28xy + 49y^2$. в) $9x^4 + 30x^2y^2 + 25y^4$. 2. a) $41^2 = (40+1)^2 = 1681$; б) $72^2 = (70+2)^2 = 5184$; в) $105^2 = (100+5)^2 = 11025$. 3. a) $2a^2 + 14a + 25$; б) $12x^2 + 14xy + 4y^2$. 4. a) $(a+x)^2$; б) $(2x+3y)^2$. 5. a) $x = 3$; б) $x = 1$. 6. a) $a^2 - 6a + 9$; б) $9x^2 - 12xy + 4y^2$; в) $16a^4 - 8a^2b^2 + b^4$. 7. a) $38^2 = (40-2)^2 = 1444$; б) 3481; в) 9216. 8. a) $10x^2 - 10xy + 5y^2$; б) $25a^2 - 24ab + 12b^2$. 9. a) $(x-2)^2$; б) $(3x-2y)^2$. 10. a) $10x^2 - 6x - 24$; б) $8a^2 + 18b^2$.

- 11 1. a) $4x^2y$; б) $-3ab^3$. 2. a) $1,2x^3$; б) $-\frac{3}{2}a^2$. 3. a) $-a^2b^2$; б) $\frac{12}{25}x^3y^3$. 4. 36. 5. a) $2x^2 - 3xy - 4y^2$; б) $3ax^2 - 2a^2x - a^3$. 6. a) $-x^2 + 3xy + 4y^2$; б) $1 - 3a^2b^2$. 7. a) $b^2 - 7a^2b^3$; б) $3x^4 - 2x^3y - 3y^2$. 8. a) $x = 2$; б) $x = 2$.

- 12 1. a) $a + 1$; б) $a - 1$. 2. a) $2a - 3b$; б) $2x^2 - x + 3$; в) $a^2 + 3ab - b^2$. 3. a) Точно е; б) Точно е. 4. $x^2 + xy + y^2$. Упатство. $(x^3 - y^3):(x - y) = A$.

- 13 1. Рационални изрази се: $5x - 2$; $\frac{x+5}{x-5}$ и $\frac{x+y}{3}$.

2. Цели рационални изрази се: $2x^2 - 3y^2$; и $\frac{x^2 - 3y + 5}{2}$; а дробно рационални изрази се: $\frac{5-x}{x^2}$, $\frac{x^2+1}{x} + 4$. 3. 4. 10. 5. $3a y = -2$. 6. $R \setminus \{2, -5\}$.

- 14 1. а) $5(a+x)$; б) $2a(x+2y)$; в) $xy(a-b)$. 2. а) $3xy(4x-3y+x^2y^2)$; б) $7x^2y^2(x-2y+3xy)$; в) $3a^2b^2(2a-3b+1)$. 3. а) $(x-3)(2a-3b)$; б) $(5-x)(5x-3y)$; в) $(2a-3b)(3x-1)$. 4. а) $(3y-4)(2a+5b)$; б) $(x-1)(3x^2-y^2)$; в) $(3x-2y)(a^2+1)$.

- 15 1. а) $(x-b)(x+b)$; б) $(2a-7y)(2a+7y)$; в) $(4a^2b+5)(4a^2b-5)$. 2. а) $5(a+2x)(a-2x)$; б) $7x^2(a-3b)(a+3b)$; в) $5x(x+1)(x-1)$. 3. а) $(x-5+y-3)(x-5-y+3) = (x+y-8)(x-y-2)$; б) $(4a+3b+a-2b)(4a+3b-a+2b) = (5a+b)(3a+5b)$; в) $(x^2+6+7)(x^2+6-7) = (x^2+13)(x-1)(x+1)$. 4. а) $(64+36)(64-36) = 100 \cdot 28 = 2800$; б) $(75+25)(75-25) = 100 \cdot 50 = 5000$; в) 450000 .

- 16 1. а) $(a+3)^2$; б) $(2x+5y)^2$. 2. а) $(48+52)^2 = 100^2 = 10000$; б) $(27+33)^2 = 60^2 = 3600$. 3. а) $2(x+3)^2$; б) $2x(y+4)^2$. 4. а) $A=y^2$; б) $A=2y^2$. 5. а) $(5x-1)^2$; б) $(2a-7b)^2$. 6. а) $(56-16)^2 = 40^2 = 1600$; б) $(47-27)^2 = 20^2 = 400$. 7. а) $2(5x-y^2)^2$; б) $2a(x-4)^2$. 8. а) $A=y^2$; б) $A=1$.

- Тест: 1. Константи: 3 ; $\frac{3}{4}$; $-0,5$; променливи: x, a, b, y . 2. $2a^4b^2$. 3. Нулти, први, втори, петти степен. 4. Збир: $-7x^2y$; разлика: $3x^2y$. 5. $x^2 - 2xy + y^2$. 6. а) $-6x^3y^4$; б) $\frac{1}{8}x^6y^9z^3$. 7. $-9x^5y^2 + 6x^4y^3 - 3x^3y^4 + 3x^2y^5$. 8. $x^3 - 2x - 1$. 9. а) $2a^2b$; б) $8xy^3z$. 10. $2x^2 - xy + \frac{2}{3}y^2$. 11. $x^3 - x - 3$. 12. а) $3a(ab+2c)$; б) $x^2y(2xy+4y^2-1)$. 13. а) $(a-3x)(2a^2+x^2)$; б) $(3x-5)(a+b)$. 14. $(6a+5a-3)(6a-5a+3) = (11a-3)(a+3)$. 15. $(x^2-3y)^2$.

ТЕМА 4.

КРУЖНИЦА И МНОГУАГОЛНИК. ПЛОШТИНА

- 1 1. 120° . 2. 60° . 3. $148^\circ 50'$. 4. по $112^\circ 30'$. 5. $18^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 90^\circ$ и 126° .

- 2 1. б). 2. 44° и 88° . 3. $\sphericalangle A = 65^\circ$; $\sphericalangle B = 55^\circ$; $\sphericalangle C = 60^\circ$. 5. а) три пати; б) за 7° и $30'$. 6. а) 30° ; б) $22^\circ 30'$; в) 15° ; г) 10° .

- 3 1. Упатство. Нацртај кружница со дијаметар АВ; нејзината пресечна точка со p е бараната точка М; задачата има 2, 1 или ни едно решение. 2. Конструирај кружница со дијаметар MN. 4. $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 50^\circ$, $\sphericalangle P = 80^\circ$. 5. $36^\circ, 54^\circ, 90^\circ$. 6. $\sphericalangle A_1BA = \sphericalangle B_1BA = 90^\circ$; зошто?

- 4 1. а) Да; б) не; в) да. 2. Спротивните агли $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_1 = 90^\circ$. 3. а) Да; б) не; в) да.

- 5 1. $\overline{CD} = 10$ cm. 2. Квадратот. 3. а) Да; б) не. 4. $\overline{CD} = 6,5$ cm; $\overline{AD} = 7,5$ cm.

- 6 1. а) Деветаголник; б) седумаголник; в) десетаголник. 2. а) Ни еден; б) секој. 3. а) 144° и 36° ; б) 162° и 18° . 4. а) Десетаголник; б) петнаесетаголник; в) шестаголник. 5. а) Десет; б) петнаесет. 6. $3,75$ dm. 7. $11,1$ dm. 8. Единаесетаголник. 9. а) $n = 4$; б) $n = 3$; в) $n = 8$.

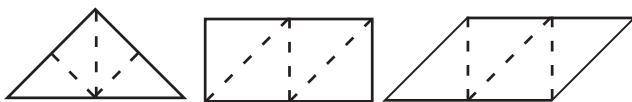
- 7 1. а) $150^\circ, 30^\circ, 30^\circ$; б) $156^\circ, 24^\circ, 24^\circ$; в) $162^\circ, 18^\circ, 18^\circ$. 2. а) $n = 9$; б) не; в) $n = 4$; г) не; д) $n = 3$. 3. а) Осумаголник; б) дванаесетаголник; в) десетаголник.

- 9** ①. а) Да; б) не; в) да; г) не. ②. а) 65; б) 35; в) $\approx 39,8$; г) 2,1; д) 0,16. ③. а) 3 см; б) 6 dm. ④. а) 2,4 m; б) 0,4 dm. ⑤. 54. ⑥. 32.

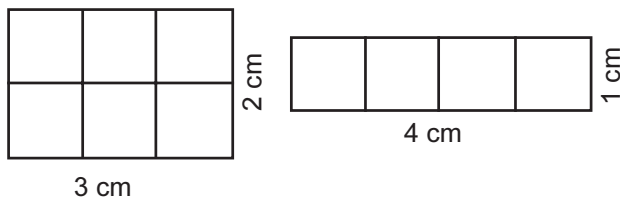
- 10** ①. а) 1 dm; б) 340 см. ②. а) 34 m; б) 19,4 dm. ③. $\approx 52,6$ dm. ④. $20\sqrt{2}$ см. ⑤. а) $R = 5\sqrt{2}$ см; $r = 5$ см; б) $R = 5$ см; $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ см. ⑥. а) $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $h = 50\sqrt{3}$, $r = \frac{50\sqrt{3}}{3}$; $R = \frac{100\sqrt{3}}{3}$; в) $h = \frac{3}{2}$, $r = \frac{1}{2}$; $R = 1$. ⑦. 36 см. ⑧. а) да; б) не; в) не; г) да. ⑨. $c^2 = a^2 + b^2$; $c = 5$ см.

- 11** ①. 35. ②. 128. ③. а) 32,6; б) $\approx 30,95$. ④. 4,2 dm. ⑤. 37 см. ⑥. 80 см. ⑦. 24 см. ⑧. 2,4 m.

- 12** ①. Сите добиени фигури се составени од по два соодветно складни триаголници. ②. Рамно-крак триаголник, правоаголник, ромбоид.



- ③. Не; види ја, на пример, задачата 1. ④. Да, мора. Ако a и b се страните на тие триаголници, тогаш $3a = 3b$, од каде што $a = b$, па триаголниците се складни. ⑤. Не мора; на пример:



- ⑥. а) Да; б) не мора; в) не мора; г) да; д) да. ⑧. Плоштината на KLMN е $\frac{1}{5}$ од плоштината на квадратот ABCD. ⑨. $16E < P < 36E$; $P \approx \frac{16+36}{2}$; $P \approx 26E$.

- 13** ①. а) 864 cm^2 ; б) $35,1 \text{ dm}^2$; в) $27 \frac{1}{12} \text{ cm}^2$;

- $\approx 27,08 \text{ cm}^2$. ②. 168 см. ③. 972 cm^2 . ④. а) $28,09 \text{ cm}^2$; б) $20,48 \text{ dm}^2$. ⑤. а) Ќе се зголеми 12 пати; б) ќе се намали 4 пати; в) не се менува; г) ќе се зголеми 3 пати. ⑥. а) Ќе се зголеми 4 пати; б) ќе се намали 9 пати; в) и г) ќе се зголеми 2,25 пати. д) ќе се намали четири пати; е) ќе се намали 6,25 пати.

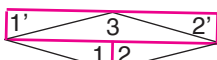
- ⑦. $P = ab$, $P' = (a+1)(b-1) = ab + b - a - 1$; 1) Ако $b > a + 1$, тогаш плоштината ќе се зголеми за $b - a - 1$; 2) ако $b = a + 1$, плоштината нема да се промени; 3) ако $b < a + 1$, плоштината ќе се намали за $a + 1 - b$. ⑧. 21%. ⑨. 1,5 пати.

- ⑩. 25 см. ⑪. а) 16 cm^2 ; б) 16 см. ⑫. а) Три правоаголници со страни: 5 см и 1 см ($P = 5 \text{ cm}^2$); 4 см и 2 см ($P = 8 \text{ cm}^2$); 3 см и 3 см ($P = 9 \text{ cm}^2$); б) Квадратот (страна 3 см; $P = 9 \text{ cm}^2$).

- ⑬. Собата не е доволно осветлена. Имено: $P = 22,68 \text{ m}^2$, а $P_1 = 3,84 \text{ m}^2 < 4,556 \text{ m}^2 = \frac{20}{100} P$.

- 14** ①. $216,72 \text{ cm}^2$. ②. 270 cm^2 . ③. 325 cm^2 ; 2,6 см. ④. 72 cm^2 . ⑤. 24 cm^2 . ⑥. $35,28 \text{ dm}^2$.

- ⑦. $\approx 320 \text{ mm}^2$. ⑧. Да;  ⑨. 84 см.

- ⑩. а)  б) $d_1 \cdot \frac{d_2}{2}$. ⑪. 168 cm^2 .

- 15** ①. а) 28 cm^2 ; б) 360 cm^2 ; в) 124,2. ②. а) Ќе се зголеми 1,5 пати; б) Ќе се намали 10 пати. ③. 5%. ④. а) 67,5; б) 200. ⑤. 360 cm^2 . ⑥. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. ⑦. а) 24 cm^2 ; б) 84 dm^2 ;

- в) $12\sqrt{10} \text{ cm}^2 \approx 37,9 \text{ cm}^2$. ⑧. $\frac{c^2}{4}$. ⑨. 675 cm^2 .
Помош: $P = 15a$ и $P = 18b$, каде што a е основата и b е кракот, па $b = \frac{5}{6}a$; $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 900$; $\left(\frac{5}{6}a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 900$; $\frac{25}{36}a^2 - \frac{a^2}{4} = 900$; $\frac{16}{36}a^2 = 900$, $a = 45$ см.

- 16** ①. 7 см. ②. 19 см. ③. 15 см. ④. 34 cm^2 . ⑤. 36 cm^2 . ⑥. а) 144 cm^2 ; б) 552 cm^2 . ⑦. 30 cm^2 . ⑧. $(192 + \sqrt{7} 48) \text{ cm}^2 \approx 319 \text{ cm}^2$. ⑨. 50 cm^2 .
Помош: Во правоаголен триаголник со агол од 30° , катетата спроти тој агол е половина од хипотенузата.

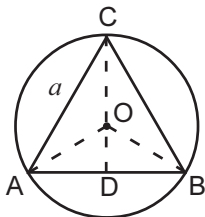
- 17** ① а) $27,72 \text{ cm}^2$; б) 36 cm^2 ; в) $27,4 \text{ cm}^2$;
 г) $1\,328 \text{ cm}^2$. ② 6 см. ③ $7k \text{ dm}$. ④ а) $9\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 15,57 \text{ cm}^2$ ($\sqrt{3} \approx 1,73$); б) $27\sqrt{3} \text{ cm}^2 \approx 46,71 \text{ cm}^2$.

Помош: Разгледај го цртежот. Апотемата е $\overline{OD} = 3 \text{ cm}$, а висината на $\triangle ABC$ е $\overline{CD} = 3\overline{OD} = 9 \text{ cm}$, па

$$\text{од } \triangle ADC: a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \overline{CD}^2,$$

се добива $a = 6\sqrt{3} \text{ cm}$. Така,

$$P = \frac{1}{2}Lh = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3.$$



в) $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. ⑤ а) $216\sqrt{3} \text{ cm}^2$; б) $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$;

в) $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$; г) $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$. ⑥ $2k$.

⑦ $P = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$; $a^2 = 24 \text{ cm}$, $a \approx 4,9 \text{ cm}$.

⑧ *Помош.* Ако a е страната на шестаголникот, а b е страната на триаголникот, тогаш од $3b = 6a$ се добива $b = 2a$. Плоштината P_3 на триаголникот е $P_3 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$, а плоштината P_6 на шестаголникот е $P_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}P_3$.

Значи: $P_3 = \frac{2}{3}P_6$.

- 18** ① 230 km^2 . ② $289,8 \text{ kg}$. ③ 612. ④ $65,25 \text{ t}$.

⑤ 30 m и 25 m. ⑥ Средините на страните од квадратот со дијагонала 5 cm избири ги за темиња.

⑦ Двапати. ⑧ 84. ⑨ 2291 m^2 .

- 19** ① а) $6\pi \text{ cm} \approx 18,84 \text{ cm}$; б) $\pi \text{ dm}$; в) $9\pi \text{ cm}$.

② а) 5 cm; б) 3 cm; в) 4 cm.

④	$r \text{ cm}$	3	3,14	5	4	0,5
	$L \text{ cm}$	6π	$6,28\pi$	10π	$25,12$	π

⑤ а) $11\pi \text{ cm} \approx 34,54 \text{ cm}$; б) $11\sqrt{2}\pi \text{ cm} \approx 48,7 \text{ cm}$.

⑥ а) 10 dm. ⑦ $40\,003,6 \text{ km}$ ($\pi \approx 3,14$).

⑧ $L = 32 \text{ cm}$; $P = 64 \text{ cm}^2$. ⑨ $18\pi \text{ cm} \approx 56,52 \text{ cm}$.

⑩ а) $1,5\pi \text{ cm}$; б) $12\pi \text{ cm}$; в) $2,56\pi \text{ cm} \approx 8,04 \text{ cm}$.

⑪ а) 72° ; б) 120° . ⑫ а) 12 cm; б) 12,9 cm.

⑬ 628 m/min . ⑭ 2,6 cm. ⑮ 12 cm. ⑯ 5 cm.

20 ① а) $64\pi \text{ cm}^2$; б) $20,25\pi \text{ cm}^2 \approx 63,59 \text{ cm}^2$;

в) $9\pi \text{ cm}^2$. ② 8 cm. ③ 100 пати. ④ $32\pi \text{ cm}^2$.

⑤ $L = 15\pi \text{ cm}$, $P = 56,25\pi \approx 176,6 \text{ cm}^2$. ⑥ а) 10 cm;

б) $\approx 5,3 \text{ cm}$. ⑦ а) $4,5\pi \text{ cm}^2$; б) $5,12\pi \text{ cm}^2$;

в) $\approx 10,24\pi \text{ cm}^2$; г) 39 cm^2 . ⑧ 90° . ⑨ $l \approx 7,33 \text{ cm}$,

$P \approx 22 \text{ cm}^2$. ⑩ 30%. ⑪ а) $4\pi \text{ cm}^2$; б) $\pi \text{ cm}^2$;

в) $9\pi \text{ cm}^2$. ⑫ Нека плоштината на фигурите од цртежот се означени на следниот начин: P_T – на $\triangle ABC$;

P_M – на обоената месечинка; P_O – на необоената месечинка; $P_{\text{и}}$ – на кружниот исечок

SAB ; $P_{\text{п}}$ – на полукругот над дијаметарот AB .

$$\text{Тогаш: } P_T = \frac{a^2}{2}; P_{\text{и}} = \frac{a^2\pi}{4}; P_{\text{п}} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi = \frac{a^2\pi}{4};$$

$$P_O = P_{\text{и}} - P_T = \frac{a^2\pi}{4} - \frac{a^2}{2}; P_M = P_{\text{п}} - P_O = \frac{a^2\pi}{4} -$$

$$- \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2}{2} = P_T. \text{ ⑬ } \text{Помош: } \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2\pi + \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Тест: ① 60° и 120° .

② Следува од Галесовата теорема.

③ $\angle C = 72^\circ$, $\angle D = 82^\circ$.

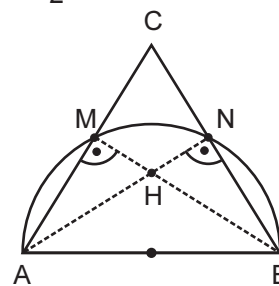
④ $\overline{CD} = 10 \text{ cm}$.

⑤ а) 8; б) 12; в) 9. ⑦ $b = 24 \text{ dm}$; $b > a$.

⑧ 3,6 dm. ⑨ 28. ⑩ 18 cm^2 . ⑪ 6 cm.

⑫ 216 cm^2 . ⑬ 42 cm. ⑭ 10,98 cm.

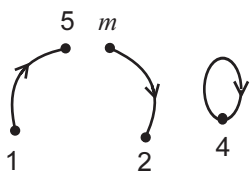
⑮ 1 000 пати. ⑯ 120 cm^2 .



ТЕМА 5.

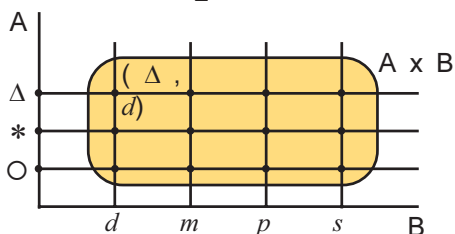
ФУНКЦИЈА. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ

1. 1.



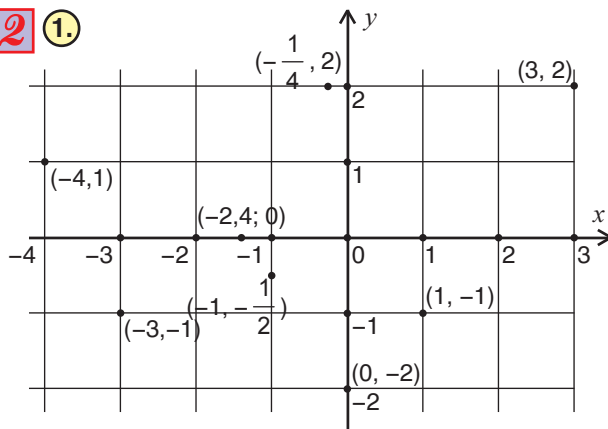
2. $A = \{a, b, c\}$,
 $B = \{1\}$.

3.

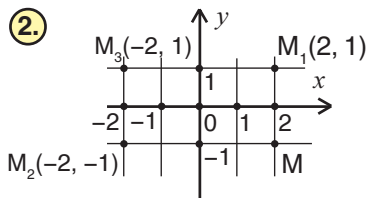


4. $A = \{1, 3, 4, m, n, a, 5\}$, $B = \{p, 2\}$.

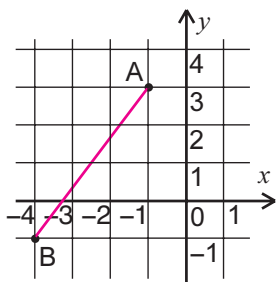
2. 1.



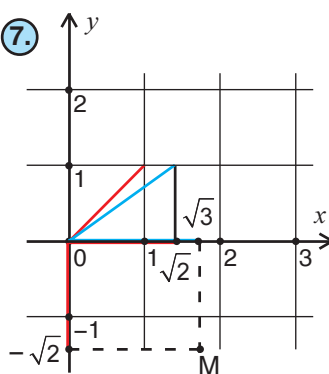
2.



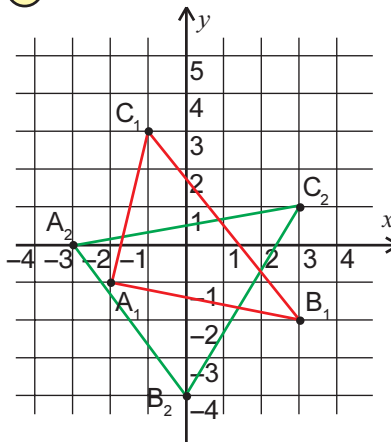
3.



7.

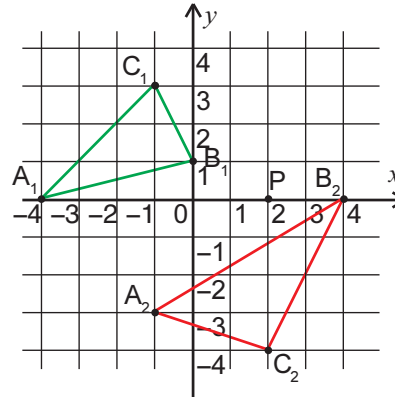


4. а) и б)



5. $A(-5, 3)$,
 $B(-4, 0)$,
 $C(-2, -4)$,
 $D(5, -1)$,
 $E(0, 2)$,
 $F(6, 3)$.

6.

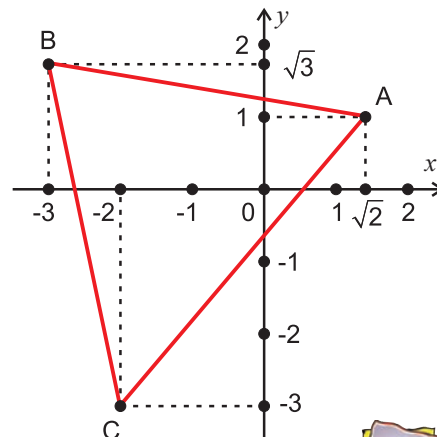


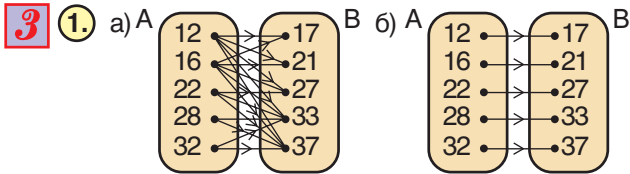
За должините на страните на $\Delta A_1 B_1 C_1$ имаме:

$$\overline{A_1 B_1} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}, \quad \overline{A_1 C_1} = 3\sqrt{2}, \quad \overline{B_1 C_1} = \sqrt{5}.$$

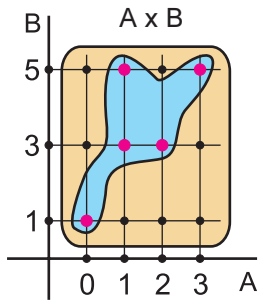
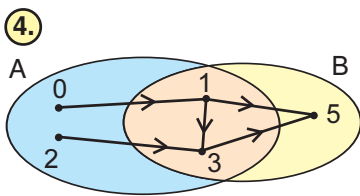
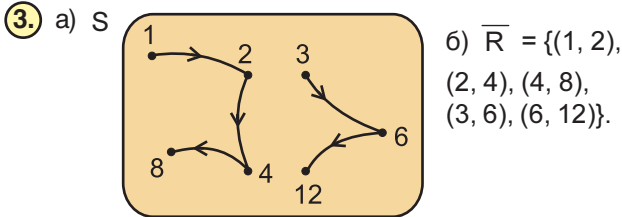
За должините на страните на $\Delta A_2 B_2 C_2$ имаме:

$$\overline{A_2 B_2} = \sqrt{34}, \quad \overline{B_2 C_2} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{A_2 C_2} = \sqrt{10}.$$

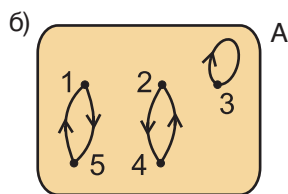
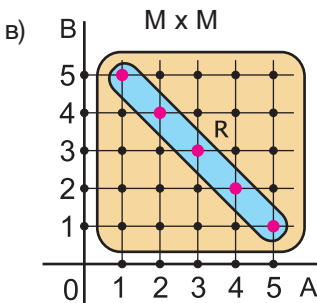




2. $R = \{(a, c), (c, b), (d, e)\}$.



5. а) $\bar{R} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.



5 1. а) Домен е $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, множество вредности $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. б) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $V = \{-1, 0, 1\}$. в) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $V = \{0, 5, 10, 15\}$.

2. ● $f(1) = 3$; $f(3) = 7$. ● $3a x = 0$.

3. $\Gamma_f = \{(-5, -2, 5), (-2, -1), (-1, -0, 5), (0, 0), (2, 1)\}$.

4. а) $A = \{-4, -3, -1, 1, 3, 4, 5\}$, $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

д) да; f за $x = 1$ и $x = 3$.

6 1. ● За 54 години. ● 7 пати. 2. а) Да. б) Не.

3. а) $24 : 96$. б) $3\frac{3}{4} : 3,4$. 4. б) и в). За в),

$5 \text{ km} : 5 \text{ cm} = 500\,000 \text{ cm} : 5 \text{ cm}$. 5. а) 81. б) 1, 58.

в) 2. г) 10. д) 0,1. f) 1 000. е) 0,01. 6. а) 1 : 1,25.

б) 1 : 7, 5. в) $1 : \frac{4}{9}$. 7. а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{2}{15}$; в) 0,001;

г) 9,45. 8. а) 4 : 9; б) 8 : 27.

7 1. а) Надворешни членови се 0,2 и 15, а внатрешни 3 и 1; б) Надворешни членови се a и y , а внатрешни b и x . 3. ● а) $56 : 14 = 92 : 23 (=4)$.

б) $\frac{15}{16} : \frac{1}{4} = \frac{5}{2} : \frac{8}{12} (= \frac{4}{15})$. ● Во двата случаи: да.

4. а) $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 8 : 4 = 2$; да. б) $8 : \frac{1}{3} \neq 4 : \frac{2}{3}$ – не.

в) $4 : 8 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ – да. 5. а) 24. б) 512. в) 2.

г) 12. д) 3,6. f) 8. 7. а) Да; $3 : 4 = 9 : 12$;

б) да. $1 : 5 = 17 : 85$; в) не; г) да; $\frac{1}{2} : \frac{1}{5} = \frac{1}{8} : \frac{1}{20}$.

8. $7,5 : 1 = \frac{20}{3} : x$; $x = \frac{8}{9}$. 9. $5 : 2 = x : 24$;

$x = 60$ (млади математичари).

4 1. а) Елементот $3 \in A$ нема своја слика во B . б) Елементите од A имаат повеќе од една слика.

2. ● Домен е A . ● Кодомен е B . ● Множество вредности на f е $\{3, 5, 7\}$. 3. ● $f(1) = 6$; $a = 6$.

$f(5) = 10$; $a = 10$. $f(9) = 14$; $a = 14$. ● $f(a) = 8$; $a = 3$;

$f(a) = 12$; $a = 7$. 4. ● $f(0) = 0$; $f(3) = 6$, $f(5) = 10$.

● $V = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. 5. Домен е множеството точки од полуокружницата AB ; кодомен е множеството точки од дијаметарот AB . Кодоменот истовремено е и множество вредности на пресликувањето.

8 1. а) $x = -20$ и $x = 20$; б) $x = 80$; в) $x = -12$ и $x = 12$. 2. $8 : 12 = 12 : 18$. 3. $a = 9$, $b = 12$, $c = 18$.

4. ● $120 + 600 + 1\,440 = 2\,160$. ● $60 + 600 +$

$+ 1\,500 = 2\,160$. 5. A – добила 80 000 денари;

B – добила 100 000 ден. и C – добила 150 000 ден.

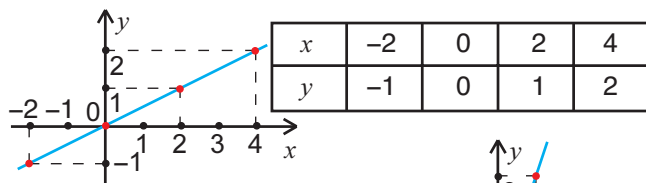
9 1. Право пропорционални се величините под

а), в) и г). 2. а) $y = 3x$;

б)

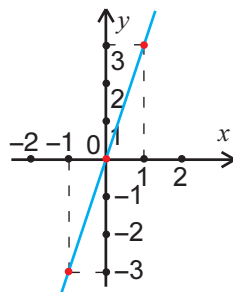
x	-2	-1	0	1	2	3
y	-6	-3	0	3	6	9

3. ● а) $L = 4a$; б) $L = 2r\pi$; в) $L = 3y$. ● а) $k = 4$; б) $k = 2\pi$; в) $k = 3$. Сите формули се за права пропорционалност. 4. а) $y = \frac{x}{2}$;



б) $y = 3x$;

x	-1	0	1
y	-3	0	3



5.

x	-2	0	2	4
y	-1	0	1	2

 ● $k = \frac{1}{2}$;
 ● $y = \frac{1}{2}x$;

- 10 1. Право пропорционална е величината под б). Обрато пропорционални се величините под а) и в). Величините под г) не се ни право ни обратно пропорционални. 2. а) $y = -\frac{4}{x}$;

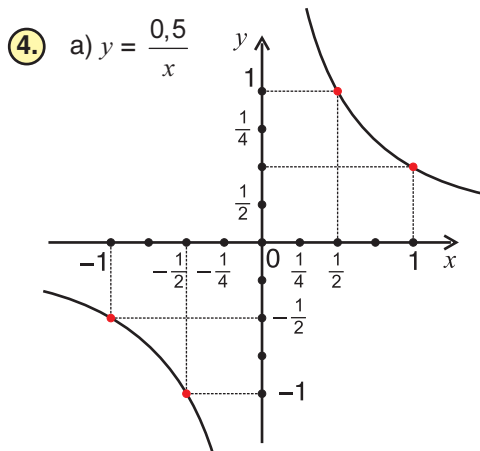
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	2	4	-4	-2	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{3}$

3. а)

x	-5	-4	-2	2	4	5
y	$-\frac{8}{5}$	-2	-4	4	2	$\frac{8}{5}$

б) $x = \frac{8}{y}$

y	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	4
x	-4	-8	-16	16	8	2



- 11 1. 12 780 ден. 2. За 12 дена. 3. 1 000 km.
 4. 4 h 30 min. 5. 15 дена. 6. 1 600 hl.

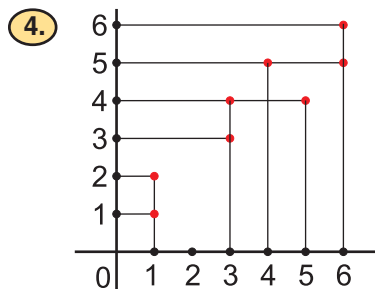
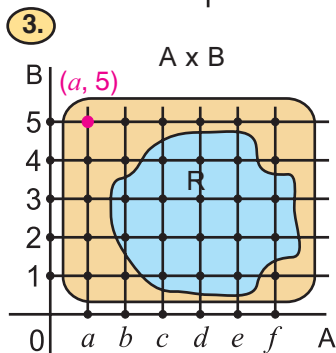
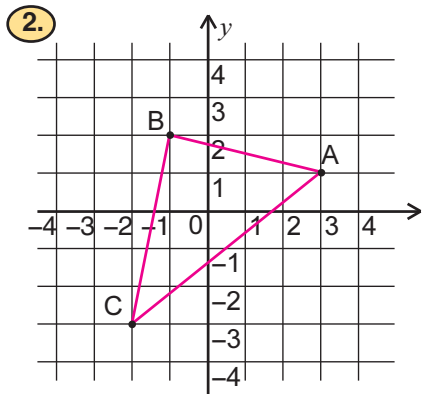
- 14 1. а) Нека имаме 1 200 топчиња (бројот на ученици) и 365 кутии (бројот на деновите во годината). $1\,200 = 365 \cdot 3 + 105$. Преостанатите 105 топчиња ќе се сместат во кутиите што веќе имаат по три топчиња. Значи, барем во една од кутиите ќе има повеќе од три топчиња, т.е. ќе има повеќе од тројца ученици кои слават роденден во ист ден. б) Различни иницијали може да имаат $31 \cdot 31 = 961$ лице. Преостанатите $1\,200 - 961 = 239$ лица имаат иницијали што се еднакви со иницијалите на некои од претходните лица.

2. Скопје има повеќе од 500 000 жители. Меѓу нив може да има лица што немаат ниту едно влакно на главата, потоа лица со едно влакно на главата, со две влакна итн. Така жителите на Скопје, според бројот на влакната на главата, може да се поделат во 200 001 група. Да претпоставиме дека во Скопје има точно 500 000 лица. $500\,000 = 200\,001 \cdot 2 + 99\,998$. Значи 99 998 лица имаат ист број влакна на главата како некои од претходните жители, т.е. има најмалку три лица со ист број влакна на главата.

3. Упатство. $37 = 12 \cdot 3 + 1$. Ако во секој месец се родиле по тројца ученици, тогаш од $12 \cdot 3 = 36$ и $37 - 36 = 1$, следи дека има ученик кој се родил во ист месец со една од претходните тројки ученици.

4. Упатство. $25 = 8 \cdot 3 + 1$. Работи како во претходната задача.

Тест: 1. Недостасуваат стрелките: од a кон c , од c кон b и од b кон b .



5. $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.

6. Релацијата R_2 . 7. (a, n) и (b, r) ; или (a, n) и (b, q) ; или (a, m) и (b, q) ; или (a, m) и (b, r) .

8. Со формула (аналитички), со табела и со график (координатна шема). 9. а) $x = 1,25$; б)

$x = \frac{4}{3}$. 10. $7 : 6 = 28 : 24$. 11. $x = 22,5$.

12. ● $k = 3,5$. ● $24,5$.

13.

x	4	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$	4 800
y	5	120	64	$\frac{1}{240}$

14. а) Два де-на;
б) 60 уче-ници.

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИ

А
агол, ли, 104
– периферен, 107
– централен, 104
апотема, 123
апсциса, 178
аритметичка средина, 169

Б
број, еви, 52
– ирационални, 52
– квадрат на, 45
– природни, 54
– рационални, 54
– реални, 55
– спротивни, 65
– цели, 54

бином, 69
– квадрат на, 83

В
вектор, и 8
– должина на, 9
– еднакви, 11
– збир на, 14
– колинеарни, 9
– надоврзани, 13
– насока на, 9
– нулти, 10
– пренесување на, 12
– разлика на, 18
– спротивни, 11
величина, и, 192
– поткоренова, 47

– векторски, 20
– обратно пропорцио-
нални, 207
– право пропорционални,
203
– променлива, 202
– скаларни, 19
веројатност, 220

Г
геометриска средина, 199

Д
делтоид,
– плоштина на, 150
дијаграм
– линиски, 100

– сликовит, 100
– столбест, 100

Е
експонент, 32

И
идентитет, 61
израз, и 60
– броен, 58
– бројна вредност на,
58, 60

– еднакви, 59
– идентични, 61
– рационален, 90
– дробен, 91
– цел, 91

– со променлива, 60

К

квадрант, 178
квадрат, 139
– плоштина на, 139
квадрирање, 46
количник, 43
– степен на, 43
– степенување на, 43
константа, 59
координатен систем,
178
– декартов правоаго–
лен, 178
координатна рамнина, 178
координатна шема, 175
корен, 47
– квадратен, 47
– основа на, 47
круг, 158
– периметар на, 158
– плоштина на, 171
кружен исечок, 164
– плоштина на, 164
кружен лак, 104
– должина на, 159
кружен прстен, 156
– плоштина на, 165

М

медијана, 169
мноугаголник, 113
– плоштина на, 135
– правилен, 119
– тангентен, 115
– тетивен, 113
мода, 169
моном, и 63
– главна вредност на, 64
– делење на, 86
– збир на, 67
– идентични, 63
– коефициент на, 63
– множење на, 73
– нормален вид на, 64
– одземање на, 68
– разлика на, 68
– слични, 65

– собирање на, 67,
– спротивни, 65
– степен на, 65

Н

насока, и 5
– иста, 5
– спротивни, 5

О

однос, 190
ордината, 178
оригинал, 22, 184
оска, и, 178
– апсцисна, 178
– координатни, 178
– ординатна, 178
отсечка, 7
– должина на, 7
– еднакви, 8
– насочена, 7
– нулта, 7
– тангентна, 112
– должина на, 112

П

паралелограм, и, 142
– плоштина на, 142
подреден пар, 7
полином, и 69
– делење на, 88
– квадрат на, 33
– коефициенти на, 70
– множење на, 79
– нормален вид на, 70
– одземање на, 75
– производ на, 78
– разложување на,
93, 95
– собирање на, 75
– спротивни, 71
– степен на, 72
– членови на, 69
полуправа, и, 4
– истонасочени, 5
– спротивнонасочени, 5
популација, 213
правило,
– на паралелограм, 16

– на триаголник, 14
– просто тројно, 221
правоаголник, 138,
– плоштина на, 139
пресликување, 184
– вредност(и) на, 185
– множество, 185
– график на, 185
– домен на, 187
– кодомен на, 184
примерок, 213
производ, 42
– декартов, 174
променлива, и 60
– вредност на, 60
– домен на, 60
– израз со, 60
– степен на, 43
– степенување на, 43
пропорција, 195
– основно својство на,
197
– продолжена, 200
– основно својствона, 200
пропорционалност, 203
– коефициент на, 203
– формула за права, 203
– формула за обратна,
207
– функција на, 203
пропорционала,
– четврта геометриска,
196
– средна геометриска,
199

Р

размер, и, 190, 193
– вредност на, 190
– еднакви, 191
– заемно обратни, 191
– обратен, 191
– основно својство на, 194
ранг, 170
релација, 182
– график на, 182

С

скалар, 20

слика, 22, 184
случаен избор, 214
случаен настан, 214
средина,
– аритметичка, 169
– геометриска, 199
степен, и, 32
– вредност на, 33
– количник на, 40
– основа на, 32
– производ на, 39
– степенување на, 42
степенување, 33

Т

транслација, 22
– вектор на, 22
– идентична, 23
– инверзна, 26
трансформација,
– идентична, 70
трапез, 149
– плоштина на, 149
триаголник,
– египетски, 127
– индиски, 127
– карактеристичен, 122
– плоштина на, 145
– правилен, 119
трином, 69

Ф

функција, 184
– вредност, и на, 18
– множество, 185
фигура, и, 136
– еднаквоплошни, 136

Х

Херонова формула, 147

Ц

централна тенденција
– мерки на, 169

Ч

четириаголник,
– правилен, 119
– тангентен, 115
– тетивен, 113

СОДРЖИНА

ТЕМА 1.	ВЕКТОРИ, ТРАНСЛАЦИЈА И РОТАЦИЈА	3
ТЕМА 2.	СТЕПЕНИ. КВАДРАТЕН КОРЕН.	31
ТЕМА 3.	ПОЛИНОМИ	57
ТЕМА 4.	КРУЖНИЦА И МНОГУАГОЛНИК. ПЛОШТИНА	103
ТЕМА 5.	ФУНКЦИЈА. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ	173

Автори: Јово Стефановски, д-р Наум Целакоски

Рецензенти: проф. д-р Никита Шекутковски
Гордана Андонова, професор
Шабан Алија, професор

Уредник: Јово Стефановски